INVARIANT SUBRINGS UNDER WILD P-CYCLIC ACTIONS

高木俊輔（東京大学大学院数理科学研究科）

1. 序

局所環 (R, m, k) に有限群 G が作用しているとし，G-不変元のなす R の部分環 R^G を考える．G の位数が k の標数で割り切れないとき G の作用が tame であると言い，そうでないとき wild であると言う．§2.2 で述べるように，tame な作用は常に線形化できるが，wild な作用は線形化できるとは限らない．このため wild な作用の不変式環は極めて扱いづらいものとなり，G が巡回群の場合ですら今までほとんど研究されてこなかった．しかし，wild な作用の不変式環こそ典型的な正標数特有の特異点であり，この特異点の構造を解明することが正標数の特異点解消にもつながるように思われる（cf. [AJ]）．この小文では，G が巡回群の場合に，wild な作用の不変式環に関する結果の概説を述べる．以下，(R, m, k) として，次元が 2 以上の Noether 局所整閉整域で剰余体 k を含むものを考える．剰余体 k は標数 p の代数閉体で，R には位数 n の巡回群 $G := \langle g \rangle$ が k 上自明に作用しているとし，$R^G \hookrightarrow R$ の分岐集合を $Z \subset \operatorname{Spec} R$ とおく．さらに，R は有限生成 R^G-加群になっていると仮定する．

Remark. (1) $q \in \operatorname{Spec} R$ が分岐集合 Z に属することは，q の惰性群 $I_q := \{\sigma \in G \mid \sigma \equiv 1 \pmod q\} \neq \{1\}$ と同値（[ZS]，[SGA1] を見よ）．

(2) ([Fog1]) R が有限生成 R^G-加群であることと，微分加群 $\Omega_{R/k}$ が有限生成 R-加群であることは同値である．従って，R が k 上の形式的冪級数環のときは，R は有限生成 R^G-加群になっている．

2. 一般次元に関する結果

2.1. depth について.

G の作用が wild な場合，高次元の結果はほとんど得られていない．それでも，R^G の depth についてはかなり研究が進んでいて，次の定理は基本的である．

Theorem 2.1 ([Fog2])**.** n は p で割り切れるとし，$P \in \operatorname{Spec}(R)$ を Z の極小素イデアルとする．このとき，次の式が成り立つ．

$$\operatorname{depth}(R^G) \leq \dim(R/p) + 2$$

特に，$Z = \{m\}$，つまり $R^G \hookrightarrow R$ が極大イデアルでのみ分岐する場合，R^G の depth は 2 になる．

Proof. まず $Z = \{m\}$ の場合に示す．$Y := \operatorname{Spec}(R^G)$，$X' := \operatorname{Spec}(R) \setminus \{m\}$，$Y' := \operatorname{Spec}(R^G) \setminus \{m^G\}$ とおく．このとき，$Y' = X'/G$. ここで，局所コホモロジーの長完全系列をとる．

$$\cdots \to H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \to H^1(Y', \mathcal{O}_{Y'}) \to H^2_{m^G}(R^G) \to H^2(Y, \mathcal{O}_Y) \to \cdots$$

Y はアフィンなので，$H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ ．従って，$H^2_{m^G}(R^G) \cong H^1(Y', \mathcal{O}_{Y'})$. $H^1(Y', \mathcal{O}_{Y'}) \neq 0$ を示す．仮定より，自然な射 $\pi : X' \to Y'$ は

不分岐なので，エタール．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}heaves/X' & \xrightarrow{\Gamma_{X'}} & \mathcal{A}b \\ {\scriptstyle \pi^*}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle (-)^G} \\ \mathcal{S}heaves/Y' & \xrightarrow{\Gamma_{Y'}} & \mathcal{A}b \end{array}$$

上の可換図式より，次のようなスペクトル系列を得る．

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X', \mathcal{O}_{X'})) \Rightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(Y', \mathcal{O}_{Y'}).$$

$E_2^{1,0} = H^1(G, R)$，$E^1 = H^1(Y', \mathcal{O}_{Y'})$ より，$H^1(G, R) \neq 0$ を示せば十分．G は巡回群なので，

$$H^1(G, R) = \{x \in R \mid \mathrm{Tr}\,(x) = 0\}/\mathrm{Im}\,(g-1) \quad (\mathrm{Tr} := 1 + g + \cdots + g^{n-1}).$$

n は p で割り切れるので，$\mathrm{Tr}\,(1) = 0$．一方，g は k 上自明に作用しているので，$\mathrm{Im}\,(g-1) \subset m$．よって $1 \notin \mathrm{Im}\,(g-1)$．以上より，$H^1(G, R) \neq 0$.

次に一般の場合を示す．仮定より，$(R^G)_{PG} \hookrightarrow R_{PG}$ は極大イデアルでのみ分岐する．$\mathrm{ht}\, P^G \leq 2$ の場合は，$\mathrm{depth}\,(R^G)_{PG} \leq \dim (R^G)_{PG} \leq 2$．$\mathrm{ht}\, P^G \geq 2$ の場合は，Serreの正規性判定条件より，$\mathrm{depth}\, R_{PG} \geq 2$．$Z = \{m\}$ の場合の議論より，$\mathrm{depth}\,(R^G)_{PG} \leq 2$．従って，$P^G$ の高さに関わらず，$\mathrm{depth}\,(R^G)_{PG} \leq 2$．よって，

$$\mathrm{depth}\, R^G \leq \mathrm{depth}\,(R^G)_{PG} + \dim(R^G/P^G) \leq 2 + \dim(R/P).$$

□

Example ([Be])**.** $S := k[X_1, X_2, X_3, X_4]$($k$ は標数 2 の体)，G は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で生成される位数 4 の巡回群とすると，S^G は Cohen-Macaulay 環ではない（Galoisデサントより，UFD ではある．詳しくは [Fos]，[SGA2]）．実際，$M := (X_1, X_2, X_3, X_4)$，$R := S_M$ とおくと，$R^G \hookrightarrow R$ は (X_1, X_2, X_3) で分岐するので，$\mathrm{depth}\,(R^G) \leq 3$.

2.2. **線形化．** このセクションでは，R を完備化して考える．つまり

$$R = k[[X_1, X_2, \ldots, X_n]]$$

とする．

$$\begin{aligned} g(X_1) &= a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n + h_1(X_1, \ldots, X_n), \\ g(X_2) &= a_{21}X_1 + \cdots + a_{2n}X_n + h_2(X_1, \ldots, X_n), \\ &\;\;\vdots \\ g(X_n) &= a_{n1}X_1 + \cdots + a_{nn}X_n + h_n(X_1, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

とおく．但し，

$$a_{ij} \in k \ (i = 1, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, n), \quad h_i \in (X_1, \ldots, X_n)^2 \ (i = 1, \ldots, n).$$

g は k-自己同型なので，$\bar{g} := (a_{ij})$ も R の k-自己同型になる．$\bar{g}$ を g の線形部分と呼ぶ．$g = \bar{g}$ のとき，g の作用は線形であると言う．

Lemma 2.2. n は p で割り切れないとする．このとき，適当に座標を取り換えることによって G の作用を線形化することができる．

Proof. $\tilde{X}_i := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\sigma\in G}\bar{\sigma}^{-1}\sigma(X_i)$ $(i = 1,\ldots,n)$ と座標を取り換えればよい． □

これに対して，wild な作用は線形化できるとは限らない．

Lemma 2.3. n は p で割り切れるとし，$Z = \{m\}$ と仮定する．このとき，どのように座標を取り換えても，G の作用は線形化できない．

Proof. n が p で割り切れることから，位数 p の G の元 σ がとれる．G の作用が線形化できたとすると，さらに座標を取り換えて Jordan 標準形に直すことにより，σ の作用は次のように表せる，

$$\begin{aligned} g(X_1) &= X_1, \\ g(X_2) &= X_2 + e_1X_1, \\ &\vdots \\ g(X_n) &= X_n + e_{n-1}X_{n-1}. \end{aligned}$$

但し，$e_i \in \{0,1\}$ $(i = 1,\ldots,n-1)$．このとき，$R^{\langle\sigma\rangle} \hookrightarrow R$ は

$$(e_1X_1,\ldots,e_{n-1}X_{n-1})$$

で分岐しているが，これは極大イデアルにはなり得ない．よって矛盾． □

しかし,「部分的線形化」は常に出来る．

Proposition 2.4 ([Pe1])**.** $p = n$ とする．このとき，適当に座標を取り換えることによって，g の作用は

$$\begin{aligned} g(X_i) &= X_i + f_i(X_1,\ldots,X_n), \\ g(X_{i+1}) &= X_{i+1} + X_i, \\ &\vdots \\ g(X_{i+j}) &= X_{i+j} + X_{i+j-1} \end{aligned}$$

の形のブロックの和で表せる．このとき, (各ブロックの大きさ) $:= j+1 \le p$ で，等号が成立するならば，$f_i = 0$ となる．$Z = \{m\}$ ならば，$j+1 < p$, $f_i \neq 0$.

Proof. 線形部分を Jordan 標準形に直すことによって，g は以下の形のブロックからなるとして良い．

$$\begin{aligned} g(X_i) &= X_i + h_i(X_1,\ldots,X_n), \\ g(X_{i+1}) &= X_{i+1} + X_i + h_{i+1}(X_1,\ldots,X_n), \\ &\vdots \\ g(X_{i+j}) &= X_{i+j} + X_{i+j-1} + h_{i+j}(X_1,\ldots,X_n). \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{i+j} &:= X_{i+j},\\ \tilde{X}_{i+j-1} &:= (g-1)X_{i+j} = X_{i+j-1} + h_{i+j},\\ &\vdots\\ \tilde{X}_i &:= (g-1)^j X_{i+j} = X_i + h_{i+1} + \cdots + (g-1)^{j-1} h_{i+j}\end{aligned}$$

と座標を取り換え,

$$f_i := (g-1)\tilde{X}_i = h_i + \cdots + (g-1)^j h_{i+j}$$

とおけば，proposition の前半の主張を得る．$(\bar{g}-1)^p = \bar{g}^p - 1 = 0$ より，$j+1 \leq p$ も従う．そして $j+1 = p$ ならば,

$$f_i = (g-1)\tilde{X}_i = (g-1)^p X_{i+j} = 0.$$

□

3. 2 次元に関する結果

§2.1 で見たように，3 次元以上では R^G が Cohen-Macaulay 環になることは稀である．また標数 0 の場合と比べ，特異点解消の存在が確かめられていないなど，正標数の高次元代数幾何についてはまだまだ道具が整備されていない．このような理由によって，3 次元以上では R^G の性質についてはほとんど何も分かっていない．従って，以下では R の次元は 2 とする．

3.1. **特異点の例.** 標数が 2，3 の場合は Artin，Peskin が R^G の構造を解明している．

Theorem 3.1 ([Ar1])**.** $R = k[[U,V]]$ とし，$p = n = 2$ とする．$Z = \{m\}$ ならば,

$$R^G \cong k[[x,y,z]]/(z^2 + abz + a^2y + b^2x).$$

但し，$a, b \in k[[x,y]]$ は互いに素とする．また逆にこの形の環は，全て上のような群作用による不変式環として実現できる．

Example. Theorem 3.1 の式に $a = y^i, b = x$ を代入すると,
$(i=1)$ $z^2 + xyz + y^3 + x^3 = 0$ D_4 型 (cf. [Ar2])
$(i=2)$ $z^2 + xy^2z + y^5 + x^3 = 0$ E_8 型 (cf. [Ar2])
$(i \geq 3)$ 有理特異点ではない (cf. [L]).

Definition. 局所環 (S, n, K) に有限群 H が K 上自明に作用しているとし，$\epsilon : H \to GL_K(n/n^2)$ を標準的な写像とする．このとき $h \in H$ が pseudo-reflection とは，$\mathrm{rank}\,(\epsilon(h) - 1) = 1$ と定義する．

Theorem 3.2 ([Pe1])**.** $R = k[[U,V]]$ とし，$p = n = 3$ とする．g がpseudo-reflection でかつ $Z = \{m\}$ ならば,

$$R^G \cong k[[x,y,z]]/(z^3 + y^{2j}z^2 - y^{3j+1} - x^2)\ (j > 0).$$

また逆にこの形の環は，全て上のような群作用による不変式環として実現できる．

Remark. Theorem 3.2 において,

(1) g が pseudo-reflection であることは，適当に座標を取り換えて $\bar{g} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とできることと同値（cf. Proposition 2.4）．

(2) $(j=1)$　$z^3+y^4z^2-y^4-x^2=0$　E_6 型 (cf. [Ar2])
$(j>1)$　有理特異点ではない (cf. [L]).

このように標数 0 の場合とは異なり，巡回商特異点は必ずしも有理特異点にはならないし，有理二重点になる場合も A_n 型とは異なる特異点が現れる．次のセクションでは，いつ R^G が有理特異点になるか考える．

3.2. **いつ有理特異点になるか．** ここでは，次の Boutot の定理の正標数への拡張を考える．

Theorem 3.3 ([Bo])**.** K を標数 0 の体とし，S を K 上本質的有限生成な環とする．さらに有限群 H が K-自明に S に作用しているとする．このとき S が有理特異点ならば，S^H も有理特異点になる．

次の定理は Boutot の定理の一種の拡張を与えている．

Theorem 3.4 ([DK], [Pe2])**.** (R,m,k) は 2 次元のNoether 局所整閉整域とし，$n=p^\nu$ とする．さらに $Z=\{m\}$ で，$\dim_k R^G/\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}\ =1$ と仮定する．このとき R が有理特異点ならば，R^G も有理特異点になる．

Proof. $\mathrm{Spec}\,R^G$ の特異点解消を Y とし，Y の $Q(R)$ での正規化を X とおく．このとき Stein 分解より，次の図式を可換にするような双有理射 $\phi : X \to \mathrm{Spec}\,R$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\,R \arrow[d] & X \arrow[l, "\phi"'] \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{Spec}\,R^G & Y \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

この双有理射によって X にも G が作用し，$Y=X/G$ となる．ここで，次の 2 つの関手の列を考える．

G-$\mathcal{S}heaves/X \to \mathcal{A}b \to \mathcal{A}b$　$\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X,\mathcal{F}) \mapsto \Gamma(X,\mathcal{F})^G$.

G-$\mathcal{S}heaves/X \to \mathcal{S}heaves/Y \to \mathcal{A}b$　$\mathcal{F} \mapsto \pi_*^G\mathcal{F} \mapsto \Gamma(Y,\pi_*^G\mathcal{F})$.

この 2 つの列より，次の 2 つのスペクトル系列を得る．

$${}^{I}E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X,\mathcal{O}_X)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}.$$

$${}^{II}E_2^{p,q} = H^p(Y, \mathcal{H}^q(G,\mathcal{O}_X)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}.$$

但し Y 上の層 $\mathcal{H}^q(G,\mathcal{O}_X)$ を，Y の開集合 U に対し，

$$\mathcal{H}^q(G,\mathcal{O}_X)(U) = H^q(G, \mathcal{O}_X|_{\pi^{-1}(U)})$$

と定義する．R は有理特異点なので，$H^1(X,\mathcal{O}_X)=O$．従って，$H^p(G,R) = {}^{I}E_2^{p,0} \cong \mathbb{H}^p$. これより，次の完全列を得る．

$$0 \to H^1(Y,\mathcal{O}_Y) \to H^1(G,R) \to H^0(Y,\mathcal{H}^1(G,\mathcal{O}_X)) \to H^2(Y,\mathcal{O}_Y) \to \cdots$$

次の補題より，$H^1(G,R) \to H^0(Y,\mathcal{H}^1(G,\mathcal{O}_X))$ が単射であることを示せば良い．

Lemma 3.5 ([DK])**.** $R^G \hookrightarrow R$ が極大イデアルでのみ分岐しているならば，

$$H^1(G,R) \cong H^2(G,R) = R^G/\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}\,.$$

F を $\pi : X \to Y$ の分岐集合とし，F のイデアル層を $\mathcal{I}(F)$ とおく．このとき，$g : \pi_* \mathcal{O}_X \to \pi_* \mathcal{O}_X$ とみなすと，$\mathrm{Im}\,(g-1) \subset \mathcal{I}(F)$．$\pi$ はエタールでないので，$F \neq 0$．従って，$k \not\subseteq \mathrm{Im}\,(g-1)$．よって，

$$k \hookrightarrow \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Tr}\,)/\mathrm{Im}\,(g-1) = \mathcal{H}^1(G, \mathcal{O}_X).$$

従って，

$$H^1(G, R) \cong k \hookrightarrow H^0(Y, \mathcal{H}^1(G, \mathcal{O}_X)).$$

□

3.3. **いつ非特異点になるか．** ここでは，次の Serre の定理の拡張を考える．

Theorem 3.6 ([Se])**.** (S, K) を正則局所環とし，剰余体 K の標数を p とおく．S には位数 n の有限群 H が K-自明に作用していて，n が p で割り切れないとする．このとき，H がpseudo-reflection で生成されているならば，S^G は正則.

Theorem 3.2 より，n が p で割り切れないという条件を外すと反例がある．そこで，次の事実に注目する．

Proposition 3.7 ([Av])**.** n が p で割り切れないならば，g がpseudo-reflection であることと，$\{g(x) - x | x \in R\}R$ が R の単項イデアルであることは同値.

これより，次の Conjecture は Serre の定理の wild な作用の場合への自然な拡張と言える．

Conjecture 3.8 (-)**.** R は 2 次元の正則局所環とする．$\{g(x) - x | x \in R\}R$ が R の単項イデアルでかつ g がpseudo-reflection ならば，R^G は正則か？

Remark. (1) $p = n = 2, 3$ のときは正しい (cf. [Pe1]).

(2) $\{g(x) - x | x \in R\}R$ が R の単項イデアルという条件から，R^G は有理特異点ではある．以下にその証明を述べる．

X，Y を Theorem 3.4 の証明と同様に定義する．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}\, R & \longleftarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathrm{Spec}\, R^G & \longleftarrow & Y \end{array}$$

G は X に作用し，$Y = X/G$ となる．このとき，次のような $\mathcal{O}_Y$-加群の完全列が得られる．

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to \pi_* \mathcal{O}_X \to \mathrm{Im}\,(g-1) \to 0$$

コホモロジーの長完全列をとると，

$$\begin{aligned} \cdots \to R = H^0(X, \mathcal{O}_X) &\to H^0(Y, \mathrm{Im}\,(g-1)) \\ &\to H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \cdots. \end{aligned}$$

R は正則なので，$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$．従って，$g - 1 : R \to H^0(Y, \mathrm{Im}\,(g-1))$ が全射を示す．もしも全射でなければ，$H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$ の部分加群 $M \neq 0$ が存在して，次のような R^G-加群の完全列がある．

$$0 \to \{g(x) - x | x \in R\}R \to H^0(Y, \mathrm{Im}\,(g-1)) \to M \to 0$$

$H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$ は長さ有限なので，$\mathrm{depth}\, M = 0$．$H^0(Y, \mathrm{Im}\,(g-1))$ は R の部分加群なので，ねじれがない．従って，$\mathrm{depth}\, H^0(Y, \mathrm{Im}\,(g-1)) \geq 1$．ところが $\{g(x) - x | x \in R\}R$ は単項なので，$\mathrm{depth}\, \{g(x) - x | x \in R\}R = 2$．これは矛盾．従って，$g - 1 : R \to H^0(Y, \mathrm{Im}\,(g-1))$ は全射.

References

[AJ] D. Abramovich and A. J. de Jong, *Smoothness, semistability, and toroidal geometry*, J. Algebraic Geom. **6** (1997), 789-801.

[Ar1] M. Artin, *Wildly ramified $Z/2$ actions in dimension two*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 60-64.

[Ar2] M. Artin, *Coverings of the rational double points in characteristic p*, in Complex Analysis and Algebraic Geometry, Iwanami Shoten, Tokyo, and Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1977, 11-22.

[Av] L. L. Avramov, *Pseudoreflection group actions on local rings*, Nagoya. Math. J. **88** (1982), 161-180.

[Be] M. -J. Bertin, *Anneaux d'invariants d'anneaux de polynômes, en caractéristique p*, C. R. Acad. Sc., Paris, t. **264** (1967), série A, 653-656.

[Bo] J. -F. Boutot, *Singularités rationelles et quotients par les groupes réductifs*, Invent. Math. **88** (1987), 65-68.

[DK] I. Dolgachev and J. Keum, *Wild p-cyclic actions on $K3$-surfaces*, J. Algebraic Geom. **10** (2001), 101-131.

[Fog1] J. Fogarty, *Kähler differentials and Hilbert's fourteenth problem for finite groups*, Amer. J. Math. **102** (1980), 1159-1175

[Fog2] J. Fogarty, *On the depths of local rings of invariants of cyclic groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), 448-452.

[Fos] R. M. Fossum, *The Divisor Class Group of a Krull Domain*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973.

[L] J. Lipman, *Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **36** (1969), 195-280.

[Pe1] B. R. Peskin, *Quotient-singularities in characteristic p*, J. Algebra **81** (1983), 72-99.

[Pe2] B. R. Peskin, *On rings of invariants with rational singularities*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 621-626.

[Se] J.-P. Serre, *Groupes finis d'automorphismes d'anneaux locaux réguliers*, in Colloque d'algèbre ENSJF, Paris 1967, Secrétariat mathématique, 1968.

[ZS] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, vol. 1, Grad. Texts in Math. **28**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1979.

[SGA1] *Revêtements Etales et Groupe Fondamental*, Lecture Notes in Math. 224, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.

[SGA2] *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, Adv. Stud. Pure Math., 2, North-Holland, Amsterdam, 1968.

Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo, Komaba, Meguro, Tokyo 153-8914, Japan

E-mail address: `stakagi@ms.u-tokyo.ac.jp`