対数的標準閾値と環論的性質

高木 俊輔　(東京大学)*

対数的標準閾値は極小モデル理論に現れる特異点の基本的な不変量である．この小文では，対数的標準閾値と非特異性，Gorenstein，Cohen-Macaulay 等の環論的性質の関係について解説する．以下，X は標数 0 の代数閉体 k 上定義された正規代数多様体とする．

1　対数的標準閾値

最初に対数的端末特異点，対数的標準特異点の定義を復習する．これらの特異点は古典的には $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規多様体に対してのみ定義されたが，de Fernex-Hacon は境界因子を考えることで，非 $\mathbb{Q}$-Gorenstein の場合に定義を拡張した．まずは古典的な定義を思い出そう．

Δ を $K_X + \Delta$ が $\mathbb{Q}$-Cartier になるような X 上の有効 $\mathbb{Q}$ 因子とし，$0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ を連接イデアル層，$t \geq 0$ を実数とする．$\pi : \widetilde{X} \to X$ を $(X, \Delta, \mathfrak{a})$ の対数的特異点解消とする．つまり π は，$\widetilde{X}$ が非特異代数多様体で，$\mathfrak{a}\mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-F)$ が可逆層であり，さらに $\mathrm{Exc}(\pi) \cup \mathrm{Supp}\, \pi_*^{-1}\Delta \cup \mathrm{Supp}\, F$ が単純正規交叉因子であるような固有双有理射である．このとき $\pi^*(K_X + \Delta)$ が定義でき，

$$K_{\widetilde{X}} = \pi^*(K_X + \Delta) + tF + \sum_i a_i E_i$$

と書ける．ただし各 E_i は $\widetilde{X}$ 上の素因子，各 a_i は有理数である．全ての i に対して $a_i \geq -1$ (resp. $a_i > -1$) が成り立つとき，$((X, \Delta); \mathfrak{a}^t)$ は**対数的標準的** (resp. **川又対数的端末的**) であるといい，さらに $\mathfrak{a} = \mathcal{O}_X$ であるとき (X, Δ) は対数的標準対 (resp. 川又対数的端末対) であるという．また

$$\mathcal{J}((X, \Delta); \mathfrak{a}^t) = \pi_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \left(\sum_i \lceil a_i \rceil E_i \right) \subset \mathcal{O}_X$$

* *E-mail:* `stakagi@ms.u-tokyo.ac.jp`

を $((X,\Delta);\mathfrak{a}^t)$ の**乗数イデアル層**という．これらの定義は特異点解消 π のとり方に依らない．

次に古典的な対数的標準閾値の定義を復習する．$x \in X$ を閉点とし，(X,Δ) は対数的標準対であるとする．このとき，

$$\mathrm{lct}_x((X,\Delta);\mathfrak{a}) = \sup\{t \geq 0 \,|\, ((X,\Delta);\mathfrak{a}^t) \text{ は } x \text{ の近傍で対数的標準的である }\}$$

を (X,Δ) に関する $\mathfrak{a}$ の x における **対数的標準閾値** という．

次に述べるのが，de Fernex-Hacon によって導入された対数的端末特異点，対数的標準特異点，対数的標準閾値の定義である．

定義 1.1 ([dFH])**.** $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ を 連接イデアル層，$t \geq 0$ を実数とする．

(i) $(X,\mathfrak{a}^t)$ が**対数的標準的** (resp. **川又対数的端末的**) であるとは，$K_X + \Delta$ が $\mathbb{Q}$-Cartier であり，$((X,\Delta);\mathfrak{a}^t)$ が対数的標準的 (resp. 川又対数的端末的) であるような X 上の有効 $\mathbb{Q}$ 因子 Δ が存在するときにいう．$(X,\mathcal{O}_X^1)$ が対数的標準的 (resp. 川又対数的端末的) であるとき，X は高々**対数的標準特異点** (resp. **対数的端末特異点**) しかもたないという．

(ii) $x \in X$ を閉点とし，X は x の近傍で高々対数的標準特異点しか持たないとする（以下このような状況のとき，(X,x) は対数的標準特異点であるという）．このとき，$\mathfrak{a}$ の x における**対数的標準閾値** $\mathrm{lct}_x(\mathfrak{a})$ を

$$\mathrm{lct}_x(\mathfrak{a}) = \sup\{t \geq 0 \mid (X,\mathfrak{a}^t) \text{ は } x \text{ の近傍で対数的標準的である }\}$$

と定義する．

注意 1.2. 対数的標準特異点 (X,x) が対数的端末特異点であることと，任意の非零連接イデアル層 $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ に対し $\mathrm{lct}_x(\mathfrak{a}) > 0$ が成り立つことは同値である．また，対数的端末特異点は Cohen-Macaulay である．よって，対数的標準閾値を用いて Cohen-Macaulay 性の十分条件が与えられる．

対数的標準閾値を用いて，非特異性を特徴づけることができる．

定理 1.3. (X,x) は対数的標準特異点であるとし，$\mathfrak{m}_x$ を閉点 x に対応するイデアル層とする．このとき，(X,x) が非特異点であることと，$\mathrm{lct}_x(\mathfrak{m}_x) > \dim_x X - 1$ が成り立つことは同値である．

証明. (X,x) が非特異点ならば，X の x での爆発は $(X,\mathfrak{m}_x)$ の対数的特異点解消なので，$\mathrm{lct}_x(\mathfrak{m}_x) = \dim_x X$ であることが直ちに確かめられる．よって逆を示す．

$d = \dim_x X$，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X,x}$ とおく．まず $K_X + \Delta$ が $\mathbb{Q}$-Cartier で，(X,Δ) が x の近傍で川又対数的端末対であり，さらに $\mathrm{lct}_x((X,\Delta);\mathfrak{m}_x) > d-1$ であるよう

な X 上の有効 $\mathbb{Q}$ 因子 Δ が存在する場合に，(X,x) が非特異点であることを示す．$\mathrm{lct}_x((X,\Delta);\mathfrak{m}_x)$ の定義から，$\mathcal{J}((X,\Delta);\mathfrak{m}_x^{d-1})_x=\mathcal{O}_{X,x}$ が成り立つ．J を $\mathfrak{m}$ の極小還元イデアルとする．つまり，J は整閉包[*1]が $\mathfrak{m}$ と一致する $\mathcal{O}_{X,x}$ のイデアルのうち包含関係に関して極小なものである．[SH, Proposition 8.3.7] より，J は d 個の元で生成される．乗数イデアル層の Skoda の定理 (cf. [La, Remark 9.6.24]) を適用すると，

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}\mathcal{J}((X,\Delta);\mathfrak{m}_x^{d-1})_x\subset\mathcal{J}((X,\Delta);\mathfrak{m}_x^{d})_x\subset J$$

という包含関係が得られる．よって $\mathfrak{m}=J$ となり，$\mathfrak{m}$ が d 個の元で生成されることがわかるので，$\mathcal{O}_{X,x}$ は正則局所環である．

次に一般の場合を示す．必要ならば X を縮めることにより，$K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-Cartier であり，$((X,\Delta);\mathfrak{m}_x^t)$ が 対数的標準的であるような X 上の有効 $\mathbb{Q}$ 因子 Δ と実数 $t>d-1$ が存在すると仮定して良い．$f:(Y,\Delta_Y)\to X$ を (X,Δ) の dlt 爆発とし，$\Delta_Y=\sum_i d_iD_i$ を Δ_Y の既約分解とする ([Fu, Theorem 10.5] 参照)．$f^*(K_X+\Delta)=K_Y+\Delta_Y$ より，任意の閉点 $y\in f^{-1}(x)$ に対し，y に対応するイデアル層を $\mathfrak{m}_y$ とおくと，

$$\mathrm{lct}_y(Y,\mathfrak{m}_y)\geq\mathrm{lct}_y((Y,\Delta_Y);\mathfrak{m}_y)\geq\mathrm{lct}_x((X,\Delta);\mathfrak{m}_x)\geq t>d-1 \qquad (\star)$$

が成り立つ．Y は高々 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 対数的端末特異点しか持たないので，上で示したことから，Y は y で非特異であることがわかる．

(X,Δ) は x の近傍で川又対数的端末対でないと仮定する．このとき，x を含む (X,Δ) の対数的標準中心 C が存在するが，dlt 爆発のとり方から，ある $y\in f^{-1}(x)$ が存在して y は $\Delta_Y^{=1}:=\sum_{d_i=1}D_i$ に含まれる．$g:Z\to Y$ を y での爆発とし，E をその例外因子とすると，(Y,y) は非特異点なので，$K_{Z/Y}=(d-1)E$ と書ける．一方 $y\in\Delta_Y^{=1}$ なので，$\mathrm{ord}_E(g^*\Delta_Y)\geq 1$ である．よって

$$\mathrm{lct}_y((Y,\Delta_Y);\mathfrak{m}_y)\leq\sup\{t\geq 0\,|\,\mathrm{ord}_E(K_{Z/Y}-g^*\Delta_Y-tE)\geq -1\}\leq d-1$$

となるが，これは $(\star)$ に矛盾する．従って，(X,Δ) は x の近傍で川又対数的端末対であり，上述の場合に帰着される． $\square$

2 Du Bois 閾値

この節では，対数的標準閾値と Gorenstein 性と関係について説明する．そのために，Du Bois 閾値という新しい不変量を導入する．

[*1] 整閉整域 A のイデアル I の整閉包 $\overline{I}$ は，$\rho:Y\to\mathrm{Spec}\,A$ を $V(\mathfrak{a})$ を中心とする正規化爆発としたとき，$\overline{I}=H^0(Y,I\mathcal{O}_Y)$ と定義される．

$0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ を連接イデアル層，$t \geq 0$ を実数とし，$\pi : \widetilde{X} \to X$ を $(X, \mathfrak{a})$ の対数的特異点解消とする．$\mathfrak{a}\mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-F)$，$\mathrm{Exc}(\pi) = \bigcup_i E_i$ とし，$E = \sum_i E_i$ とおいたとき，ω_X の部分加群 $\mathcal{I}(\omega_X, \mathfrak{a}^t)$ を次のように定義する：十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\mathcal{I}(\omega_X, \mathfrak{a}^t) = \pi_* \omega_{\widetilde{X}}(\lceil \varepsilon E - t(1-\varepsilon)F \rceil) \subset \omega_X$$

とおく．ε を十分小さくとれば，この定義は ε のとり方に依らない．また π のとり方にも依らない．$\mathcal{I}(\omega_X, \mathcal{O}_X^1)$ を単に $\mathcal{I}(\omega_X)$ と書く．$\mathcal{I}(\omega_X)$ は Du Bois 特異点と密接に関係している．

定理 2.1 ([KSS])**.** X が高々 Du Bois 特異点しか持たないならば，$\mathcal{I}(\omega_X) = \omega_X$ が成り立つ．X が Cohen-Macaulay ならば，逆も正しい．

定義 2.2. (X, x) を Du Bois 特異点とし，$0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ を連接イデアル層とする．このとき，$\mathfrak{a}$ の x における **Du Bois 閾値**[*2] $\mathrm{dbt}_x(\mathfrak{a})$ を

$$\mathrm{dbt}_x(\mathfrak{a}) = \sup\{t \geq 0 \mid \mathcal{I}(\omega_X, \mathfrak{a}^t)_x = \omega_{X,x}\}$$

と定義する．

Kollár-Kovács [KK] は，（古典的）対数的標準特異点は Du Bois であることを証明した．また Kovács [Kov, Theorem 3.6] により，X が準 Gorenstein (つまり，ω_X が可逆層である) ならば，逆も正しいことが知られている．この結果の一般化として次が成り立つ．

命題 2.3 (cf. [STV, Lemma 5.7])**.** (X, x) を対数的標準特異点とし，$0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ を連接イデアル層とする．

(1) $\mathrm{lct}_x(\mathfrak{a}) \leq \mathrm{dbt}_x(\mathfrak{a}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{a})$.
(2) (X, x) が準 Gorenstein ならば，$\mathrm{lct}_x(\mathfrak{a}) = \mathrm{dbt}_x(\mathfrak{a})$ が成り立つ．

ある種の有限性を仮定すると，命題 2.3 (2) の逆も正しい．

定理 2.4 ([STV, Theorem 5.10])**.** (X, x) を対数的標準特異点とし，反標準環 $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(-nK_X)$ は k 上有限生成であると仮定する．このとき，(X, x) が準 Gorenstein であることと，$\mathrm{lct}_x(\mathfrak{m}_x) = \mathrm{dbt}_x(\mathfrak{m}_x)$ が成り立つことは同値である．

(X, x) が対数的端末特異点ならば，x の近傍で $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(-nK_X)$ は常に有限生成であるので，上の定理から次の系が直ちに従う．

[*2] これは一般的な用語ではない．X が Cohen-Macaulay ならば，定理 2.1 の観点から，これは Du Bois 閾値と呼ぶに相応しい不変量である．しかし X が Cohen-Macaulay でないときは，この不変量の意味はよくわかっていない．

系 2.5. (X,x) を対数的端末特異点とする．このとき，(X,x) が Gorenstein であることと，$\mathrm{lct}_x(\mathfrak{m}_x)=\mathrm{dbt}_x(\mathfrak{m}_x)$ が成り立つことは同値である．

注意 2.6. 講演時に「$\mathrm{lct}_x(\mathfrak{m}_x), \mathrm{dbt}_x(\mathfrak{m}_x)$ を用いて $\mathbb{Q}$-Gorenstein 性を特徴づけることができるか？」という質問を受けたが，これは難しいと思われる．例えば，$\mathrm{dbt}_x(\mathfrak{m}_x)-\mathrm{lct}_x(\mathfrak{m}_x)=1$ を満たす対数的標準特異点 (X,x) は，$\mathbb{Q}$-Gorenstein のものもあれば，$\mathbb{Q}$-Gorenstein でないものも存在する．

3 例

この節では，対数的標準閾値と Du Bois 閾値の計算例を紹介する．

例 3.1.

(1) (X,x) を $(1/r)(1,1,\ldots,1)$ 型の d 次元巡回商特異点とする．環論的にいえば，多項式環 $S=\bigoplus_{n\geq 0}S_n=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_d]$ の r 次 Veronese 部分環を $S^{(r)}=\bigoplus_{n\geq 0}S_{rn}$ と表したとき，$(X,x)=(\operatorname{Spec}S^{(r)},\mathbf{0})$ である．このとき $\mathrm{lct}_x(\mathfrak{m}_x)=d/r$，$\mathrm{dbt}_x(\mathfrak{m}_x)=\lceil d/r\rceil$ となる．

(2) $X=(x^2+y^3+z^5=0)\subset\mathbb{C}^3$ とし，x を $\mathbb{C}^3$ の原点 $\mathbf{0}$ とする．このとき $\mathrm{lct}_x(\mathfrak{m}_x)=\mathrm{dbt}_x(\mathfrak{m}_x)=1/6$ となる．

(3) X をアフィン行列式多様体 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[X_{ij}\,|\,i=1,\ldots,m,\,j=1,\ldots,n]/I_t$ とする．ただし，$1\leq t\leq m\leq n$ とし，$(X_{ij})_{i,j}$ は 変数 X_{ij} を成分とする $m\times n$ 行列であり，I_t は $(X_{ij})_{i,j}$ の t 次小行列式で生成される $\mathbb{C}[X_{ij}\,|\,i=1,\ldots,m,\,j=1,\ldots,n]$ のイデアルである．このとき $\dim X=(m+n-t+1)(t-1)$ である．また，X が $\mathbb{Q}$-Gorenstein であるのは，X が Gorenstein であるときに限られ，これは $t=1$ もしくは $m=n$ のときである．x を $\mathbb{C}^{mn}$ の原点 $\mathbf{0}$ としたとき，$\mathrm{lct}_x(\mathfrak{m}_x)=m(t-1)$，$\mathrm{dbt}_x(\mathfrak{m}_x)=n(t-1)$ となる．

例 3.1 (3) において $\mathrm{lct}_x(\mathfrak{m}_x)$ を定義通り計算することはそれほど容易ではない（ように筆者には感じられる）．しかし次の正標数の手法を用いると，簡単に計算することができる．まず対数的標準閾値の正標数における対応物である F 純閾値を定義する．

R を標数 $p>0$ の整域とする．$\overline{K}$ を R の商体 K の代数閉包とし，任意の自然数 $e\geq 1$ に対し，$R^{1/p^e}=\{x\in\overline{K}\mid x^{p^e}\in R\}$ とおく．包含写像 $R\hookrightarrow R^{1/p^e}$ によって R^{1/p^e} を R 加群と見なす．$R^{1/p}$ が有限生成 R 加群であるとき，R は F **有限**であるという．例えば，標数 $p>0$ の完全体上本質的有限型な環は F 有限である．以下，R は F 有限であると仮定する．

定義 3.2. (i) 包含写像 $R\hookrightarrow R^{1/p}$ が R 準同型として分裂するとき，つまり R

準同型 $\varphi : R^{1/p} \to R$ が存在して合成写像 $R \hookrightarrow R^{1/p} \xrightarrow{\varphi} R$ が恒等写像になるとき，R は F **純環**であるという．これは，任意の自然数 $e \geq 1$ に対し，$R \hookrightarrow R^{1/p^e}$ が R 準同型として分裂することと同値である．

(ii) R は F 純環であるとし，$\mathfrak{a}$ を R の非零イデアルとする．任意の自然数 $e \geq 1$ に対し，

$$\nu_e(\mathfrak{a}) = \{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid R \hookrightarrow R^{1/p^e} \xrightarrow{\times c^{1/p^e}} R^{1/p^e} \text{が分裂する } c \in \mathfrak{a}^r \text{ が存在する }\}$$

とおくと，$\{\nu_e(\mathfrak{a})/p^e\}_{e\geq 1}$ は上に有界な単調増加列になる．この極限 $\lim_{e\to\infty} \nu_e(\mathfrak{a})/p^e$ を $\mathfrak{a}$ の F **純閾値** $\mathrm{fpt}(\mathfrak{a})$ と定義する．

定理 3.3 ([CEMS, Corollary 6.6])**.** (X, x) を標数 0 の代数閉体 k 上定義された対数的端末特異点とし，$0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ を 連接イデアル層とする．$(X_p, x_p), \mathfrak{a}_p$ をそれぞれ $(X, x), \mathfrak{a}$ の十分大きい標数 p への還元とする[*3]．このとき，

$$\mathrm{lct}_x(\mathfrak{a}) = \lim_{p\to\infty} \mathrm{ftp}(\mathfrak{a}_{p,x_p})$$

が成り立つ．

定理 3.3 を例 3.1 (3) に適用する．$S_p = \mathbb{F}_p[X_{ij} \mid i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n]/I_t$, $\mathfrak{n}_p = (x_{ij} \mid i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n) \subset S_p$, $(R_p, \mathfrak{m}_p) = ((S_p)_{\mathfrak{n}_p}, \mathfrak{n}_p(S_p)_{\mathfrak{n}_p})$ とおいたとき，$\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}_p)$ がわかれば $\mathrm{lct}_x(\mathfrak{m}_x)$ が計算できる．ここで，次の命題を用いる．

命題 3.4 ([STV, Theorem 4.1])**.** $S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$ を標数 $p > 0$ の完全体 S_0 上次数 1 の元で生成される F 純正規次数付環とし，$\mathfrak{n} = \bigoplus_{n\geq 1} S_n$ を S の斉次極大イデアルとする．このとき，$Z = \mathrm{Proj}\, S$ 上の豊富な Cartier 因子 H が存在して，$S = \bigoplus_{n\geq 0} H^0(Z, \mathcal{O}_Z(nH))$ と書ける．任意の自然数 $e \geq 1$ に対し，次数付 S 加群 $\omega_S^{(1-p^e)} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(Z, \mathcal{O}_Z((1-p^e)K_Z + nH))$ の極小斉次生成系を $\{\omega_1^{(e)}, \ldots, \omega_s^{(e)}\}$ としたとき，次が成り立つ：

$$-\nu_e(\mathfrak{n}) \in \{\deg \omega_1^{(e)}, \ldots, \deg \omega_s^{(e)}\}.$$

行列式環の一般論 ([BV] 参照) から，$\omega_{S_p}^{(1-p^e)}$ の極小斉次生成系は次数 $-m(p^e - 1)(t-1)$ の元からなることが知られている．命題 3.4 より，$\nu_e(\mathfrak{n}_p) = m(p^e-1)(t-1)$ となり，

$$\mathrm{fpt}(\mathfrak{m}_p) = \mathrm{fpt}(\mathfrak{n}_p) = \lim_{e\to\infty} m(p^e-1)(t-1)/p^e = m(t-1)$$

[*3] $X = \mathrm{Spec}\, k[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$, $\mathfrak{a} = (\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_s) \subset \mathcal{O}_X$ とし，$\mathbb{Z}$ 上 f_i, g_j 達の係数で生成される k の部分環を A としたとき，X の「十分大きい標数 p への還元」X_p とは，自然な射 $X_A = \mathrm{Spec}\, A[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r) \to \mathrm{Spec}\, A$ の一般閉ファイバーのことである．$\mathfrak{a}$ の「十分大きい標数 p への還元」$\mathfrak{a}_p$ とは，$\mathfrak{a}_p = (g_1, \ldots, g_s)\mathcal{O}_{X_p}$ のことである．

を得る．従って，$\mathrm{lct}_x(\mathfrak{m}_x)$ は

$$\mathrm{lct}_x(\mathfrak{m}_x) = \lim_{p\to\infty} \mathrm{fpt}(\mathfrak{m}_p) = \lim_{p\to\infty} m(t-1) = m(t-1)$$

と計算できる．一方，$\mathrm{dbt}_x(\mathfrak{m}_x)$ は次の命題から容易に計算できる．

命題 3.5 (cf. [STV, Proposition 5.12])**.** $S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$ を標数 0 の代数閉体 S_0 上次数 1 の元で生成される d 次元正規次数付環とし，$\mathfrak{n} = \bigoplus_{n\geq 1} S_n$ を S の斉次極大イデアルとする．このとき，$Z = \operatorname{Proj} S$ 上の豊富な Cartier 因子 H が存在して，$S = \bigoplus_{n\geq 0} H^0(Z, \mathcal{O}_Z(nH))$ と書ける．さらに $d \geq 2$ とし，$\operatorname{Spec} S$ は高々 Du Bois 特異点しかもたないとする．$\mathfrak{n}$ に対応する閉点を $x \in \operatorname{Spec} S$ とおくと，

$$\mathrm{dbt}_x(\mathfrak{n}) = -\max\{n \in \mathbb{Z} \mid H^{d-1}(Z, \mathcal{O}_Z(nH)) \neq 0\}$$

が成り立つ．

参考文献

[BV] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal rings*, Lecture Notes in Math. **1327**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[CEMS] A. Chiecchio, F. Enescu, L. E. Miller and K. Schwede, Test ideals in rings with finitely generated anti-canonical algebras, to appear in J. Inst. Math. Jussieu.

[dFH] T. de Fernex and C. Hacon, Singularities on normal varieties, Compos. Math. **145** (2009), 393–414.

[Fu] O. Fujino, Fundamental theorems for the log minimal model program, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **47** (2011), no. 3, 727–789.

[KK] J. Kollár and S. J. Kovács, Log canonical singularities are Du Bois, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 3, 791–813.

[Kov] S. J. Kovács, Rational, log canonical, Du Bois singularities: on the conjectures of Kollár and Steenbrink, Compos. Math. **118** (1999), 123–133.

[KSS] S. J. Kovács, K. Schwede and K. E. Smith, The canonical sheaf of Du Bois singularities, Adv. Math. **224** (2010), 1618–1640.

[La] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry II*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 3. Folge, A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 49, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[STV] A. Singh, S. Takagi and M. Varbaro, A Gorenstein criterion for strongly F-regular and log terminal singularities, to appear in Int. Math. Res. Not.

[SH] I. Swanson and C. Huneke, *Integral closure of ideals, rings, and modules*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 336, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.