

教授 (Professor)

高木 俊輔 (TAKAGI Shunsuke)

A. 研究概要

今年度前半は、 F 符号と呼ばれる正標数の特異点の不変量の一様正値性について研究した。複素数体 \mathbb{C} 上本質的有限型な局所環 R が klt 型特異点であるとき、ほとんどすべての素数 p に対して、その標数 p への還元 $R \bmod p$ は F 正則特異点となる。Aberbach–Leuschke により、 F 正則特異点の F 符号は正であること、すなわち、 $s(R \bmod p) > 0$ が知られている。Carvajal-Rojas, Schwede, Tucker は、その極限 $\lim_{p \rightarrow \infty} s(R \bmod p)$ も正であると予想した。この予想は、Fermat 超曲面やトーリック特異点などの特別な場合にしか知られていなかったが、山口樹との共同研究 [3] において、 R が簡約商特異点の場合にこの予想が正しいことを証明した。

今年度後半は、準 F 特異点と双有理幾何に現れる特異点との関係について研究した。準 F 特異点の理論は、呼子による Calabi–Yau 多様体の研究に端を発し、河上、高松、田中、呼子、吉川、Witaszek らにより、現在急速に進展している。佐藤謙太、吉川翔との共同研究 [2] では、 \mathbb{Q} -Gorenstein 正規準 F^∞ 分裂特異点が対数標準特異点であることを証明し、河上龍郎、吉川翔との共同研究 [1] では、Cohen-Macaulay 正規準 F 単射特異点の擬 Du Bois 特異点であることを証明した。現在、これらの結果をまとめた論文を執筆中である。

In the first half of this academic year, I studied the uniform positivity of the invariant of singularities in positive characteristic called the F -signature. When a local ring R essentially of finite type over \mathbb{C} is of klt type, its reduction $R \bmod p$ to characteristic p is known to be strongly F -regular for all sufficiently large prime numbers p . By a result of Aberbach–Leuschke, the F -signature of a strongly F -regular singularity is positive, that is, $s(R \bmod p) > 0$. Carvajal-Rojas, Schwede, and Tucker conjectured that its limit $\lim_{p \rightarrow \infty} s(R \bmod p)$ is also positive. Although this conjecture had previously been known only in special cases such as

Fermat hypersurfaces and toric singularities, in joint work with Tatsuki Yamaguchi [3], I proved that the conjecture holds when R is a reductive quotient singularity.

In the second half of this academic year, I studied the relationship between quasi- F -singularities and singularities arising in birational geometry. The theory of quasi- F -singularities originated in Yobuko’s study of Calabi–Yau varieties and is currently developing rapidly through the work of Kawakami, Takamatsu, Tanaka, Witaszek, Yobuko, Yoshikawa, and others. In joint work with Kenta Sato and Shou Yoshikawa [2], I proved that \mathbb{Q} -Gorenstein normal quasi- F^∞ -split singularities are log canonical. In joint work with Tatsuro Kawakami and Shou Yoshikawa [1], I proved that Cohen–Macaulay normal quasi- F -injective singularities are pseudo-Du Bois singularities. I am currently preparing two papers [1] and [2] containing these results.

B. 発表論文

1. T. Kawakami, S. Takagi and S. Yoshikawa : “Quasi- F -singularities and singularities in birational geometry”, preprint.
2. K. Sato, S. Takagi and S. Yoshikawa : “Quasi- F -splitting versus log canonicity”, in preparation.
3. S. Takagi and T. Yamaguchi : “On the uniform positivity of F -signature under reduction modulo p ”, arXiv:2507.16566.
4. P. Cascini, T. Kawakami and S. Takagi : “Threefolds of globally F -regular type with nef anti-canonical divisor”, arXiv:2410.03871.
5. S. Takagi and T. Yamaguchi : “On the behavior of adjoint ideals under pure morphisms”, to appear in Journal of EMS.
6. K. Sato and S. Takagi : “Deformations of log terminal and semi log canonical singularities”, Forum Math. Sigma **11** (2023), E35.
7. K. Sato and S. Takagi : “Arithmetic and

geometric deformations of F -pure and F -regular singularities”, arXiv:2103.03721, to appear in Amer. J. Math.

8. K. Sato and S. Takagi : “Weak Akizuki-Nakano vanishing theorem for globally F -split 3-folds”, manuscripta math. (2024).
9. S. Takagi : “Finitistic test ideals on numerically \mathbb{Q} -Gorenstein varieties”, J. Algebra **571** (2021), 266–279.

C. 口頭発表

1. Quasi- F -singularities and singularities in birational geometry, The Ubiquity of Commutative Algebra, CIRM, France, 2026年3月.
2. Uniform positivity of local F -alpha invariants, Algebraic Geometry Workshop - SMRI, Sydney Mathematical Research Institute, Australia, 2026年2月.
3. Quasi- F -split and log canonical singularities, The 3rd Niigata Algebra Symposium, 新潟大学, 2025年11月.
4. Uniform positivity of F -signature and F -alpha invariants, Birational geometry in positive and mixed characteristics and connections to commutative algebra, 2025 Summer Research Institute in Algebraic Geometry, Colorado state university, USA, 2025年7月.
5. Uniform positivity of F -signature under reduction modulo p , Singularities in Algebra and Geometry, CIMAT, Mexico, 2025年6月.
6. Threefolds of globally F -regular type with nef anti-canonical divisor, P -adic and Characteristic p Methods in Algebraic Geometry, EPFL, Switzerland, 2025年6月.

D. 講義

1. 常微分方程式：常微分方程式の入門的講義を行った。(教養学部前期課程)
2. 全学自由研究ゼミナール：可換環論の入門的講義として、完備局所環の構造定理について解説した。(教養学部前期課程)
3. 代数学 II ・代数学特別演習 II：環上の加群

の理論について講義・演習を行った。単因子論、有限群の表現論、可換環論の初歩を説明した。(3年生向け講義)

E. 修士・博士論文

1. (課程博士) 大貫 紘嵩 (ONUKI Hirotaka): Global $+$ -regularity of regular del Pezzo surfaces in mixed characteristic.
2. (修士) 岩根 僚太郎 (IWANE Ryotaro): Non-nef loci in mixed characteristic.

F. 対外研究サービス

1. 日本数学会 理事.
2. 日本数学会代数学分科会 評議員.
3. 日本数学会代数学分科会 運営委員.
4. 男女共同参画学協会連絡会 総務委員.
5. Algebra & Number Theory 編集委員.
6. 岩波書店「数学叢書」編集委員.
7. 東京可換環論セミナー 世話人.
8. 研究集会「Workshop on Algebraic Geometry in Kanazawa」世話人.