

教授 (Professor)

高木 俊輔 (TAKAGI Shunsuke)

A. 研究概要

今年度は F 特異点の変形問題について研究した。特に佐藤謙太 (九州大学) との共同研究において、以下の 2 つの結果を得た。

(1) X を $\mathbb{Q}$ 上定義された $\mathbb{Q}$ -Gorenstein 正規多様体とする。整数 n を上手く選ぶと、正規スキーム $\mathcal{X}$ からの平坦射 $\mathcal{X} \rightarrow B := \text{Spec } \mathbb{Z}[1/n]$ で、生成ファイバー $\mathcal{X}_\eta$ が X と同型になるものがとれる。Ma-Schwede は、 $\mathcal{X}$ が $\mathbb{Q}$ -Gorenstein であるとき、ある閉点 $p \in B$ 上のファイバー $\mathcal{X}_p$ が F 正則ならば、 X は高々対数端末特異点しか持たないことを証明した。この結果の類似として我々は、 $\mathcal{X}$ が $\mathbb{Q}$ -Gorenstein であるとき、ある閉点 $p \in B$ 上のファイバー $\mathcal{X}_p$ が正規かつ F 純ならば、 X は高々対数標準特異点しか持たないことを証明した。さらに Ma-Schwede の結果を、 $\mathcal{X}$ が $\mathbb{Q}$ -Gorenstein とは限らない場合に一般化した。

(2) R を剰余体が完全体であるような等標数の離散付置環とし、 $\mathcal{X} \rightarrow B := \text{Spec } R$ を固有平坦射とする。Esnault-Viehweg は標数 0 の場合に、閉ファイバー $\mathcal{X}_0$ が 2 次元対数端末的ならば、生成ファイバー $\mathcal{X}_\eta$ も対数端末的であることを証明した。この結果の正標数における類似として我々は、閉ファイバー $\mathcal{X}_0$ が 2 次元 F 正則ならば、幾何学的生成ファイバー $\mathcal{X}_\eta$ も F 正則であることを証明した。

上記 2 つの結果を用いて、孤立線型簡約商特異点の変形に関する Liedtke-Martin-Matsumoto の予想を肯定的に解決した。

This year I have worked on deformation problems of F -singularities. In particular, in joint work with Kenta Sato (Kyushu University), we prove the following two results.

(1) Let X be a $\mathbb{Q}$ -Gorenstein normal variety over $\mathbb{Q}$. We can pick an integer $n \geq 1$ and a flat morphism $\mathcal{X} \rightarrow B := \text{Spec } \mathbb{Z}[1/n]$ from a normal scheme $\mathcal{X}$ whose generic fiber $\mathcal{X}_\eta$ is isomorphic to X . Ma-Schwede proved, under the assumption that $\mathcal{X}$ is $\mathbb{Q}$ -Gorenstein, that X has only log terminal singularities if the closed fiber $\mathcal{X}_p$ is F -regular for a single $p \in B$. As an analog of their result, we prove, under the same assumption on $\mathcal{X}$, that X has only log canonical

singularities if the closed fiber $\mathcal{X}_p$ is normal and F -pure for a single $p \in B$. In addition, we generalize the result of Ma-Schwede to the case where $\mathcal{X}$ is not necessarily $\mathbb{Q}$ -Gorenstein.

(2) Let R be a DVR of equal characteristic with perfect residue field k and $\mathcal{X} \rightarrow B$ be a proper flat morphism. When k is of characteristic zero, Esnault-Viehweg proved that if the closed fiber $\mathcal{X}_0$ is two-dimensional log terminal, then so is the generic fiber $\mathcal{X}_\eta$. As a characteristic $p > 0$ analog of their result, we prove that if the closed fiber $\mathcal{X}_0$ is two-dimensional F -regular, then so is the geometric generic fiber $\mathcal{X}_\eta$.

As an application of the above two results, we give an affirmative answer to a conjecture of Liedtke-Martin-Matsumoto on deformations of isolated linearly reductive quotient singularities.

B. 発表論文

1. K. Sato and S. Takagi : “Arithmetic and geometric deformations of F -pure and F -regular singularities”, arXiv:2103.03721.
2. K. Sato and S. Takagi : “Weak Akizuki-Nakano vanishing theorem for globally F -split 3-folds”, arXiv:1912.12074.
3. S. Takagi : “Finitistic test ideals on numerically $\mathbb{Q}$ -Gorenstein varieties”, J. Algebra **571** (2021), 266–279.
4. K. Sato and S. Takagi : “General hyperplane sections of threefolds in positive characteristic”, J. Inst. Math. Jussieu. **19** (2020), no. 2, 647–661.
5. Y. Gongyo and S. Takagi : “Kollár’s injectivity theorem for globally F -regular varieties”, Eur. J. Math. **5** (2019), 872–880.
6. B. Bhatt and K. Schwede and S. Takagi : “The weak ordinarity conjecture and F -singularities”, Higher dimensional algebraic geometry, 11–39, Adv. Stud. Pure Math., 74, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2017.
7. A. Singh, S. Takagi and M. Varbaro : “A Gorenstein criterion for strongly F -regular

and log terminal singularities”, Int. Math. Res. Not. IMRN **2017**, no.21, 6484–6522.

8. V. Srinivas and S. Takagi : “Nilpotence of Frobenius action and the Hodge filtration on local cohomology”, Adv. Math. **305**, (2017), 456–478.
9. H. Dao and S. Takagi : “On the relationship between depth and cohomological dimension”, Compos. Math. **152** (2016), no.4, 876–888.
10. Y. Gongyo and S. Takagi : “Surfaces of globally F -regular and F -split type”, Math. Ann. **364** (2016), 841–855.

C. 口頭発表

1. On vanishing theorems for Frobenius split varieties in positive characteristic, Joint Tokyo/Kyoto Algebraic Geometry Seminar, オンライン, 2020 年 6 月.
2. F -singularities and singularities in birational geometry I, II, IIT Bombay Virtual Commutative Algebra Seminar, オンライン, 2020 年 9 月.
3. Arithmetic deformations of F -singularities, MSRI Fellowship of the Ring, National Seminar, オンライン, 2021 年 1 月.
4. Arithmetic deformations of F -pure singularities, OIST Workshop ”Quantum Math, Singularities and Applications”, オンライン, 2021 年 2 月.
5. Deformations of F -pure and F -regular singularities, Zoom Algebraic Geometry Seminar, オンライン, 2021 年 3 月.

D. 講義

1. 代数学 XH・数物先端科学 II : 可換環論の最新の結果を解説した. 3 次元完全交叉局所環の局所 Picard 群に関する Gabber の予想が Česnavičius–Scholze によって肯定的に解決されたが, 本講義では Dao による超曲面の場合の簡単な証明を紹介した. 次に, 正標数の特異点の因子類群に関する Hochster の疑

問をとりあげ, Polstra や Carvajal-Rojas–Stäbler による部分的な結果を紹介した. 最後に, 正則環のイデアルの記号冪の増大度に関する問題について解説した. 等標数の場合は 15 年以上前に解かれていたが, Ma–Schwede はパーフェクトイド空間論を用いることで, 混標数の場合にも同様の主張が成り立つことを証明した. 等標数の場合の証明を説明した後, Ma–Schwede の証明のアイディアを概説した. (数理大学院・4 年生共通講義)

2. 代数学 XC (本郷) : 有限群の表現論の基礎事項について講義し, McKay 対応の紹介を行った. (理学部 3 年生向け講義)
3. 線型代数学 II : 線型代数学の基礎事項について講義した. (教養学部前期課程講義)
4. 線型代数学演習 : 「線型代数学 II」に関する演習を行なった. (教養学部前期課程講義)
5. 数理代数学 : 群論及び有限群の表現論の基礎事項について講義した. (教養学部統合自然科学科)
6. 数理代数学演習 : 「数理代数学」に関する演習を行なった. (教養学部統合自然科学科)

E. 修士・博士論文

1. (修士) 山口 樹 (YAMAGUCHI Tatsuki): A characterization of multiplier ideals via ultraproducts.

F. 対外研究サービス

1. Algebra & Number Theory 編集委員.
2. Journal of the Korean Mathematical Society 編集委員.
3. 日本数学会代数学分科会 運営委員.
4. 岩波書店「数学叢書」編集顧問.
5. 文部科学省 科学技術・学術政策研究所 科学技術動向研究センター 専門調査員.
6. 東京可換環論セミナー 世話人.

G. 受賞

1. 2019 年度日本数学会代数学賞, 受賞題目「標数 0 の特異点と F 特異点」.
2. 平成 29 年度科学技術分野の文部科学大臣表彰若手科学者賞, 業績題目「正標数の手法を用いた双有理幾何学に現れる特異点の研究」.