

教授 (Professor)

高木 俊輔 (TAKAGI Shunsuke)

#### A. 研究概要

今年度は、佐藤謙太との共同研究において、正標数の秋月・中野型の消滅定理について研究した。特に、孤立特異点しか持たない3次元大域的  $F$  正則射影多様体上の非常に豊富な直線束に対し、秋月・中野の消滅定理が成り立つことを証明した。この応用として、以下の2つの結果を得た。

##### (1) 3次元大域的 $F$ 分裂ファノ多様体の変形

$X$  を標数  $p > 0$  の代数閉体上で定義された、高々通常二重点しか持たない3次元大域的  $F$  分裂ファノ多様体とする。もし  $-iK_X$  が非常に豊富であるような整数  $1 \leq i \leq p$  が存在するならば、 $X$  は非特異なファノ多様体に平坦変形できることを証明した。これは並河良典氏の結果の正標数への拡張に当たる。

##### (2) 局所完全交叉射影多様体の thickening に対する小平の消滅定理

$Y$  を標数  $p > 0$  の完全体上で定義された、高々完全交叉孤立特異点しか持たない3次元大域的  $F$  正則射影多様体とする。このとき、任意の自然数  $t \leq p$  に対し、 $Y$  の  $t$  次 thickening  $Y_t$  は小平の消滅定理を満たすことを証明した。これは Bhatt-Blickle-Lyubeznik-Singh-Zhang の結果の正標数3次元の場合への拡張に当たる。

I've worked on Akizuki-Nakano type vanishing theorems in positive characteristic. In particular, in joint work with Kenta Sato, we prove that the Akizuki-Nakano vanishing theorem holds for very ample line bundles on globally  $F$ -regular 3-folds with only isolated singularities. We have the following two applications of this vanishing theorem.

##### (1) Deformations of globally $F$ -split Fano 3-folds

Let  $X$  be a globally  $F$ -split Fano 3-fold over an algebraically closed field of characteristic  $p > 0$  which has only ordinary double points. We prove that if there exists an integer  $1 \leq i \leq p$  such that  $-iK_X$  is very ample, then  $X$  is smoothable by a flat deformation. This is a generalization of a result of Yoshinori

Namikawa to fields of positive characteristic.

##### (2) Kodaira vanishing theorem for thickenings of lci projective varieties

Let  $Y$  be a globally  $F$ -regular 3-fold over a perfect field of characteristic  $p > 0$  which has only isolated complete intersection singularities. We prove that for each integer  $t \leq p$ , the  $t$ -th thickening  $Y_t$  of  $Y$  satisfies the Kodaira vanishing theorem. This is a generalization of a result of Bhatt-Blickle-Lyubeznik-Singh-Zhang to fields of positive characteristic in dimension three.

#### B. 発表論文

1. K. Sato and S. Takagi : “Weak Akizuki-Nakano vanishing theorem for globally  $F$ -split 3-folds”, arXiv:1912.12074.
2. Y. Gongyo and S. Takagi : “Kollár’s injectivity theorem for globally  $F$ -regular varieties”, Eur. J. Math. **5** (2019), 872–880.
3. S. Takagi : “Finitistic test ideals on numerically  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein varieties”, to appear in J. Algebra.
4. K. Sato and S. Takagi : “General hyperplane sections of threefolds in positive characteristic”, to appear in J. Inst. Math. Jussieu.
5. S. Takagi and K.-i. Watanabe : “ $F$ -singularities: applications of characteristic  $p$  methods to singularity theory”, Sugaku Expositions **31** (2018), 1–42.
6. B. Bhatt and K. Schwede and S. Takagi : “The weak ordinarity conjecture and  $F$ -singularities”, Higher dimensional algebraic geometry, 11–39, Adv. Stud. Pure Math., 74, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2017.
7. A. Singh, S. Takagi and M. Varbaro : “A Gorenstein criterion for strongly  $F$ -regular and log terminal singularities”, Int. Math. Res. Not. IMRN **2017**, no.21, 6484–6522.
8. V. Srinivas and S. Takagi : “Nilpotence of Frobenius action and the Hodge filtration on local cohomology”, Adv. Math. **305**, (2017), 456–478.
9. H. Dao and S. Takagi : “On the relationship between depth and cohomological

dimension”, Compos. Math. **152** (2016), no.4, 876–888.

10. Y. Gongyo and S. Takagi : “Surfaces of globally  $F$ -regular and  $F$ -split type”, Math. Ann. **364** (2016), 841–855.

#### C. 口頭発表

1. Vanishing theorems on globally  $F$ -regular varieties, Special Conference on Commutative Algebra and its Interaction with Algebraic Geometry, USA, 2019 年 6 月.
2. Kodaira vanishing for thickenings in positive characteristic, 東京可換環論セミナー, 東京大学, 2019 年 11 月.
3. Kodaira vanishing for thickenings of globally  $F$ -regular threefolds, 第 41 回可換環論シンポジウム, 倉敷シーサイドホテル, 2019 年 11 月.
4. Weak Akizuki-Nakano vanishing for globally  $F$ -split 3-folds, Tokyo-Seoul Conference in Mathematics 2019 -Algebraic Geometry-, 東京大学, 2019 年 11 月.

#### D. 講義

1. 数理科学基礎：線型代数学の導入部分について講義した. (教養学部前期課程講義)
2. 線型代数学 I・II：線型代数学の基礎事項について講義した. (教養学部前期課程講義)
3. 線型代数学演習：「線型代数学 II」に関する演習を行なった. (教養学部前期課程講義)
4. 数理科学概論 III (文科生)：有理数の完備化について講義した. (教養学部前期課程講義)
5. 代数学 XC・代数構造論 II：代数曲線論の基礎事項について講義した. (数理大学院・4 年生共通講義)

#### F. 対外研究サービス

1. Algebra & Number Theory 編集委員
2. Journal of the Korean Mathematical Society 編集委員
3. 岩波書店「数学叢書」編集顧問
4. 文部科学省 科学技術・学術政策研究所 科学技術動向研究センター専門調査員
5. 東京可換環論セミナー世話人
6. 研究集会「ファノ多様体及び関連する代数幾

何学」(九州大学・11 月 13–15 日) 世話人

7. JAMI conference “Higher Dimensional Algebraic Geometry in honor of Prof. Shokurov’s 70th Birthday” (Johns Hopkins University・3 月 16–22 日) 日本側世話人

#### G. 受賞

1. 2019 年度日本数学会代数学賞 (2019 年 3 月)
2. 平成 29 年度科学技術分野の文部科学大臣表彰 若手科学者賞 (2017 年 4 月)