

准教授 (Associate Professor)

高木 俊輔 (TAKAGI Shunsuke)

A. 研究概要

今年度は以下の2つの研究を行った。

Hailong Dao との共同研究において、体上本質的有限型な n 次元正則局所環 $(S, \mathfrak{m})$ とそのイデアル I が与えられたとき、局所コホモロジー加群 $H_I^i(S)$ と S/I の深さ $\text{depth} S/I$ の関係について調べた。特に、 $\text{depth} S/I \geq 3$ ならば、 $H_I^{n-2}(S) = H_I^{n-1}(S) = H_I^n(S) = 0$ を証明した。また $S/\mathfrak{m}$ が標数 0 の代数閉体のとき、 $\text{depth} S/I \geq 4$ ならば、 $H_I^{n-3}(S) = 0$ と、 S/I の $\mathfrak{m}$ 進完備化 $\widehat{S/I}$ の局所 Picard 群 $\text{Pic}^{\text{loc}}(\widehat{S/I})$ が捩れ群であることが同値であることを証明した。

Vasudevan Srinivas との共同研究において、 F 冪零環の性質を調べた。特に、 (X, x) が 3 次元以下の複素正則孤立特異点ならば、十分大きい p に対し (X, x) の標数 p への還元が F 冪零であることと、任意の i に対し $\text{Gr}_F^0 H_{\{x\}}^i(X_{\text{an}}, \mathbb{C}) = 0$ となることが同値であることを証明した。この系として、 $(R, \mathfrak{m})$ を $\mathbb{C}$ 上本質的有限型な 2 次元正則局所環としたとき、十分大きい p に対し R の標数 p への還元が F 冪零であることと、 R の $\mathfrak{m}$ 進完備化 $\widehat{R}$ の因子類群 $\text{Cl}(\widehat{R})$ が $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を含まないことが同値であることを証明した。

I have worked on two research projects this year.

In the joint work with Hailong Dao, given an n -dimensional regular local ring $(S, \mathfrak{m})$ essentially of finite type over a field and its ideal $I \subset S$, we studied a relationship between local cohomology $H_I^i(S)$ and $\text{depth} S/I$. In particular, we proved that if $\text{depth} S/I \geq 3$, then $H_I^{n-2}(S) = H_I^{n-1}(S) = H_I^n(S) = 0$. We also showed, under the assumption that $S/\mathfrak{m}$ is an algebraically closed field of characteristic zero, that if $\text{depth} S/I \geq 4$, then $H_I^{n-3}(S) = 0$ if and only if the local Picard group $\text{Pic}^{\text{loc}}(\widehat{S/I})$ of the $\mathfrak{m}$ -adic completion $\widehat{S/I}$ of S/I is torsion. In the joint work with Vasudevan Srinivas, we studied the properties of F -nilpotent rings. In particular, we proved that given a complex normal isolated singularity (X, x) of dimension ≤ 3 , its modulo p reduction is F -nilpotent for almost all p if and only if $\text{Gr}_F^0 H_{\{x\}}^i(X_{\text{an}}, \mathbb{C}) = 0$ for all i . As a corollary, we showed that if R is

a two-dimensional normal local ring essentially of finite type over $\mathbb{C}$, then its modulo p reduction is F -nilpotent for almost all p if and only if the divisor class group $\text{Cl}(\widehat{R})$ of the $\mathfrak{m}$ -adic completion $\widehat{R}$ of R does not contain $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

B. 発表論文

1. H. Dao and S. Takagi: “On the relationship between depth and cohomological dimension”, arXiv:1502.06077.
2. S. Takagi and K.-i. Watanabe: “ F -singularities: applications of characteristic p methods to singularity theory”, to appear in Sugaku Expositions.
3. T. de Fernex, R. Docampo, S. Takagi and K. Tucker: “Comparing multiplier ideals to test ideals on numerically $\mathbb{Q}$ -Gorenstein varieties”, to appear in Bull. London Math. Soc.
4. B. Bhatt, K. Schwede and S. Takagi: “The weak ordinarity conjecture and F -singularities”, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.
5. Y. Gongyo and S. Takagi: “Surfaces of globally F -regular and F -split type”, arXiv:1305.3056, submitted.
6. Y. Gongyo, S. Okawa, A. Sannai and S. Takagi: “Characterization of varieties of Fano type via singularities of Cox rings”, J. Algebraic. Geom. **24** (2015), 159–182.
7. O. Fujino and S. Takagi: “On the F -purity of isolated log canonical singularities”, Compositio Math. **149** (2013), no.9, 1495–1510.
8. S. Takagi: “Adjoint ideals and a correspondence between log canonicity and F -purity”, Algebra Number Theory **7** (2013), 917–942.
9. S. Takagi: “Subadditivity formula for multiplier ideals associated to log pairs”, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 93–102.

C. 口頭発表

1. Globally F -regular and Frobenius split surfaces, 名古屋大学, 代数幾何セミナー, 2014 年 5 月.
2. Nilpotency of Frobenius and divisor class groups, FRG Special Month in Ann Arbor, University of Michigan, USA, 2014 年 6 月.
3. F 特異点論の最近の進展について, 第 59 回代数学シンポジウム, 東京大学, 2014 年 9 月.
4. Frobenius action on local cohomology and the Hodge filtration, 代数多様体とその周辺, 琉球大学, 2014 年 10 月.
5. Depth and cohomological dimension, 第 27 回可換環論セミナー, 静岡大学, 2015 年 1 月.
6. 深さとコホモロジー次元, 岡山可換代数表現セミナー, 岡山大学, 2015 年 2 月.

D. 講義

1. 数学 II: 理系向けに線形代数の基礎を講義した (教養学部前期課程講義)
2. 代数学 XC (本郷): 有限群の表現論・可換環論の初歩について講義し, 代数的 McKay 対応についても言及した (理学部 3 年生向け講義)
3. 代数幾何学・数学統論 XF: 正標数の代数多様体の大域的な性質について概説した (数理大学院・4 年生共通講義)

E. 修士・博士論文

1. (修士) 江尻 祥 (EJIRI Sho): 弱正值性定理と幾何学的生成ファイバーのフロベニウス安定標準環.
2. (修士) 田中 悠樹 (TANAKA Yuki): On tautness of two-dimensional F -regular and F -pure rational singularities.

F. 対外研究サービス

1. 文部科学省 科学技術・学術政策研究所 科学技術動向研究センター 専門調査員
2. 研究集会 “Commutative Algebra and Singularity Theory 2014” (立山国際ホテル・2014 年 7 月 28 日–8 月 1 日) 世話人