

可換環論の発展

—ホモロジカル予想を中心として—

高木 俊輔 (九州大学) *

高橋 亮 (信州大学) †

1 はじめに

2008 年秋, 日本大学の渡辺敬一先生から, 第 54 回代数学シンポジウムで可換環論の歴史について講演をしてほしいと依頼されました. 喜んでお引き受けして準備に取り掛かったものの, 著者らの力不足のため, 可換環論全般の歴史を 60 分講演でお話することはできないことが判明しました. そこで, ここ 50 年間の可換環論において中心的な研究テーマの 1 つであるホモロジカル予想に焦点を絞ってお話させていただくことにしました. ここで注意していただきたいのは, あくまで“1 つ”であるということです. 「可換環論の発展 \ni ホモロジカル予想」なのであって, 「可換環論の発展 = ホモロジカル予想」では決してないことを強調させていただきます.

講演の機会を与えて下さった渡辺敬一先生をはじめ, 世話人の方々に心から感謝を申し上げます.

2 取り決め

本稿では, 環と言えば常に単位元を持つ可換 Noether 環を意味するものとする. また用語の日本語訳は [38] に準じる.

3 ホモロジカル予想とは?

可換環論における研究手法は, 大きく分けて 2 つの手法がある. 1 つはイデアル論的手法, もう 1 つはホモロジー代数的手法である. そして, それぞれにおいてさまざまな不変量が定義されている. イデアル論的不変量としては, Krull 次元, 高度 (height), 重複度, 解析的広がり (analytic spread) 等があり, ホモロジー代数的不変

*E-mail: stakagi@math.kyushu-u.ac.jp

†E-mail: takahasi@math.shinshu-u.ac.jp

量としては、射影次元、入射次元、深度 (depth), Betti 数等がある。イデアル論的不変量とホモロジー代数的不変量の間を探ること、すなわち両者間にある不等式や等式を見出すことは、長らく可換環論における主要な研究の1つとなっている。

さて、 R を局所環とし、そのただ1つの極大イデアルを \mathfrak{m} で表す。上で述べた“関係を探る”例を1つ挙げる。環 R の Krull 次元と深度は次で定義される。

$$\dim R = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid R \text{ の素イデアルの列 } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_i \text{ が存在}\}$$

$$\text{depth } R = \min\{i \in \mathbb{Z} \mid \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{m}, R) \neq 0\}$$

このように、Krull 次元は素イデアルで定義されるためイデアル論的な不変量であり、深度は Ext で定義されるためホモロジー代数的な不変量であると言える。これらは、見た目からするとまったく無関係な量に見えるが、可換環論を主体的に勉強し始めてすぐに、これら間には一般に

$$\dim R \geq \text{depth } R$$

という不等式が成り立つことを学ぶ。そしてほぼ同時に、この不等式が真の不等号になる例が登場し、一般には等式にならないことを知る。

一般には等号が成立しない不等式があると、等号が成立する状態に名前を付け特別扱いしたくなるものである。上記の不等式の等号

$$\dim R = \text{depth } R$$

をみたす局所環 R を **Cohen-Macaulay 環** という。Cohen-Macaulay 環は、定義からわかるように Krull 次元がホモロジカルに与えられている (Krull 次元が Ext の消滅で計れている) 環である。定義は至ってシンプルであるが、Cohen-Macaulay 環は局所双対定理をはじめとして実に多くの良い性質を持っている。可換環論に携わるほぼすべての研究者が取り扱う環であり、まさしく現代の可換環論の主演と呼べる環である。

さて、表題にある **ホモロジカル予想** とは、

局所環上の有限生成加群の Krull 次元のホモロジカルな解釈に基づく一連の予想

である。“一連”という表現からわかるように、単一の予想ではない。著者らが確認しただけで20個近く存在する。次節および次々節では、そのうちのいくつかについて重点的に述べていく。

次節に進む前に環の標数について復習しておく。局所環 (R, \mathfrak{m}) の標数は

	R の標数	R/\mathfrak{m} の標数	
等標数 0	0	0	
等標数 p	p	p	(p は素数)
混標数 $(0, p)$	0	p	(p は素数)
混標数 (p^n, p)	p^n	p	(p は素数, $n \geq 2$)

の4パターンあり、 R が等標数であることと R が体を含むことは同値である。また R が整域ならば、混標数 (p^n, p) にはならないことを注意する。

4 ホモロジカル予想 第1幕

この節では、主に1980年代までのホモロジカル予想について述べる。まず、一連のホモロジカル予想が生まれるきっかけとなった結果を述べることから始める。

剛性 (rigidity) 定理. R を正則局所環とし、 M と N を有限生成 R 加群とする。このとき、もしある整数 n に対して $\text{Tor}_n^R(M, N) = 0$ ならば、任意の整数 $i \geq n$ に対して $\text{Tor}_i^R(M, N) = 0$ である。

この定理は、Auslander [1]が R が不分岐正則局所環の場合に証明し、Lichtenbaum [29]が一般の場合に証明した。なお、 Tor の双対概念である Ext に関する同様の主張は成立しない。例えば、 k を体とし $R = k[[x]]$ を形式的べき級数環とすると、 $\text{Ext}_R^0(R/xR, R) = 0$ であるが $\text{Ext}_R^1(R/xR, R) \neq 0$ である。また、剛性定理はMurthy [30]によって完全交差環に拡張されている。すなわち次のことが成り立つ。 R を余次元 c の完全交差局所環とし、 n を整数、 M と N を有限生成 R 加群とする。このとき、もし $n \leq i \leq n + c$ をみたす任意の整数 i に対して $\text{Tor}_i^R(M, N) = 0$ ならば、任意の整数 $i \geq n$ に対して $\text{Tor}_i^R(M, N) = 0$ である。

Auslanderは上記の定理(の不分岐ケース)を示した後、環 R の正則性は加群 M の射影次元 $\text{pd}_R M$ の有限性にしか使われていないだろう、という予想を立てた。

剛性予想. R を局所環とし、 M と N を有限生成 R 加群とする。 $\text{pd}_R M < \infty$ と仮定する。このとき、もしある整数 n に対して $\text{Tor}_n^R(M, N) = 0$ ならば、任意の整数 $i \geq n$ に対して $\text{Tor}_i^R(M, N) = 0$ である。

これが最初のホモロジカル予想である。この予想が引き金となって他の一連のホモロジカル予想が生まれることになる。

剛性予想は次の場合に成り立つことがわかっている。

- (1) R が正則のとき
- (2) $n = 0$ のとき
- (3) $\text{pd}_R M \leq 1$ のとき
- (4) $\text{pd}_R M = 2$ かつ $\text{Ann}_R M \neq 0$ のとき
- (5) $M = R/xR$ のとき (ただし x は R 正則列)

(1) は剛性定理そのものであり, (2),(3),(5) は直接確かめられる. (4) は Peskine–Szpiro [31] の結果である.

Auslander は剛性予想を考察する中で次の予想を打ち立てた. 2つ目のホモロジカル予想である.

零因子予想. R を局所環とし, M を射影次元が有限な有限生成 R 加群とする. このとき, $x \in R$ が M 上の非零因子ならば, R 上の非零因子である.

Auslander は, 剛性予想が正しければ零因子予想も正しいことを示した. また, Peskine–Szpiro は, R が等標数 $p > 0$ のとき, および R が体上本質的有限型 (つまり R が体上有限生成な環の素イデアルによる局所化) のときに零因子予想が正しいことを示した. 剛性予想は特別な場合にしか正しいことがわからなかったが, 零因子予想はこのように広い環のクラスで正しいことがわかったわけである.

一方, 次の定理が Serre [35] によって示された. 局所環 R 上の加群 M の Krull 次元を $\dim_R M$ で, 長さを $\ell_R(M)$ で表す.

交差定理. R を正則局所環, M と N を有限生成 R 加群とし, $\ell_R(M \otimes_R N) < \infty$ と仮定する. このとき, 不等式

$$\dim_R M + \dim_R N \leq \dim R$$

が成り立つ.

この定理において R が正則という仮定は外すことができない. 実際, k を体とし, $R = k[[x, y, z, w]]/(xy - zw)$ とおき, R 加群 $M = R/(x, z)$, $N = R/(y, w)$ を考えると, $\dim M + \dim N = 2 + 2 = 4 > 3 = \dim R$ となる. なお, R の正則性の仮定を外し, かわりに $\text{pd}_R M < \infty$ を仮定した主張は, ホモロジカル予想の1つである (強重複度予想; §8 参照). 一方, 交差定理は代数閉体上の多項式環に対しても成り立つ. すなわち, アフィン空間の2つの部分多様体の共通部分の余次元はそれぞれの余次元の和以下である ([11, Chapter I, Proposition 7.1]). これが交差定理という名の由来である.

交差定理の不等式と Auslander–Buchsbaum の公式から

$$\dim_R N \leq \dim R - \dim_R M \leq \text{pd}_R M$$

となることがわかる. Peskine–Szpiro はこの不等式の成立には環 R の正則性は不要だろうと考えた.

交差予想. R を局所環とし, $M (\neq 0)$ と N を有限生成 R 加群とする. $\ell_R(M \otimes_R N) < \infty$ と仮定する. このとき, 不等式

$$\dim_R N \leq \text{pd}_R M$$

が成り立つ.

そして、さらに強い次の予想が Peskine–Szpiro および Roberts [32] によって独立に出された。

新交差予想.

$$F_{\bullet} = (0 \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow 0)$$

を有限生成自由 R 加群のなす完全列でない鎖複体とし、任意の i に対して $\ell_R(H_i(F_{\bullet})) < \infty$ と仮定する。このとき、不等式

$$n \geq \dim R$$

が成り立つ。

(新交差予想 \Rightarrow 交差予想) の証明. $N = R/I$ (I は R のイデアル) としてよい。 $\text{pd}_R M = n$ とおき、 M の極小自由分解

$$F_{\bullet} = (0 \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow 0)$$

をとる。このとき

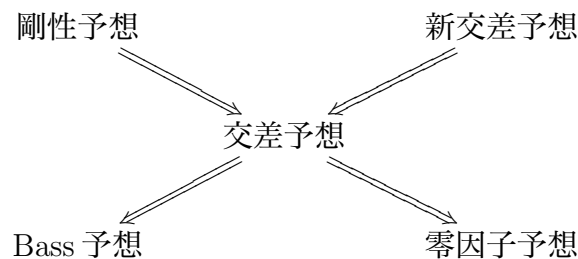
$$F_{\bullet} \otimes_R R/I = (0 \rightarrow F_n \otimes_R R/I \rightarrow F_{n-1} \otimes_R R/I \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \otimes_R R/I \rightarrow 0)$$

は有限生成自由 R/I 加群のなす完全列でない鎖複体で、各ホモロジー加群 $H_i(F_{\bullet} \otimes_R R/I) = \text{Tor}_i^R(M, R/I)$ の長さは有限である。よって新交差予想より不等式 $\dim_R N = \dim R/I \leq n = \text{pd}_R M$ を得る。 \square

一方、時代が少しさかのぼるが、Bass [3] が次の予想を与えている。

Bass 予想. R を局所環とする。もし入射次元が有限な零でない有限生成 R 加群が存在すれば、 R は Cohen-Macaulay である。

ここまで計5つのホモジカル予想が登場したが、それらの間には次のような関係がある (Peskine–Szpiro [31])。



新交差予想は R が等標数 $p > 0$ のとき、および R が体上本質的有限型のときに成り立つことを、Peskine–Szpiro と Roberts が独立に Frobenius 関手を駆使して示した。その後 Hochster [16] が、 R が等標数の場合にビッグ Cohen-Macaulay 加群の存在を示すことで新交差予想が成り立つことを証明した。そして10数年が経過した1980

年代末, Roberts [33] が Chern 指標と Dutta 重複度の計算を通して任意の局所環 R について新交差予想が成り立つことを証明し, この結果は現在**新交差定理**と呼ばれている. 新交差予想が完全に解決したことにより, 交差予想, 零因子予想, Bass 予想も一般に正しいことがわかり, これらの結果は可換環論のいろいろな場面で応用されている. また, 新交差定理自体に関する研究も盛んである ([2, 6, 9]).

こうして, ここまで登場した5つのホモロジカル予想のうち, 剛性予想以外の4つが肯定的に解決したことになる. 残った剛性予想については, 1990年代に入ってから Heitmann [12] によって反例が与えられた. ある局所環 R とその上の有限生成加群 M, N で,

- $\text{pd}_R M = 2$
- $\ell_R(N) < \infty$
- $\text{Tor}_1^R(M, N) = 0$
- $\text{Tor}_2^R(M, N) \neq 0$

をみたすものが存在する. こうして剛性予想は一般には正しくないことが判明したが, $\text{pd}_R M < \infty$ だけでなく $\text{pd}_R N < \infty$ も仮定すると未解決である. しかしながら, 剛性予想の研究はこの方向よりもむしろ先に述べた Murthy の結果を一般化する方向の研究が盛んである ([24, 25, 26, 27, 28]).

5 ホモロジカル予想 第2幕

新交差予想が完全解決して新交差定理になったことでとりあえずの結末をみたわけであるが, その完全解決以前に Evans-Griffith [8] によって新交差定理の仮定を少し弱めた次の予想が提示されていた.

改新交差予想. R を局所環とし, \mathfrak{m} をその極大イデアルとする.

$$F_\bullet = (0 \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow 0)$$

を有限生成自由 R 加群のなす完全列でない鎖複体で, 次の2条件をみたすものとする.

- (1) 任意の $i \neq 0$ に対して $\ell_R(H_i(F_\bullet)) < \infty$
- (2) $\ell_R(xR) < \infty$ なる元 $x \in H_0(F_\bullet) \setminus \mathfrak{m}H_0(F_\bullet)$ が存在

このとき, 不等式

$$n \geq \dim R$$

が成り立つ.

この予想は新交差予想とほとんど変わらないように見えるが、一般の場合は現在もなお解決していない。 R が等標数の場合は Hochster [18] によって、 $\dim R$ が 3 以下の場合は Hochster [19] (cf. Heitmann [13]) によって正しいことが証明されている (詳細は §6 参照)。

1973 年 Peskine–Szpiro [31] はフロベニウス関手を用いて、等標数 $p > 0$ の場合に、多くのホモロジカル予想を肯定的に解決した。この Peskine–Szpiro の証明を精査した Hochster [17] は、正則列の存在の重要性に気がつき、次の予想を提唱した。

ビッグ CM 予想. R を局所環とする。このとき R の任意に与えられた巴系 x_1, \dots, x_d に対して、 x_1, \dots, x_d を正則列とするような (有限生成とは限らない) R 加群 M が存在する。この M を R 上の **ビッグ Cohen-Macaulay 加群** (big Cohen-Macaulay module) と言う。

ビッグ CM 予想は 2 次元以下では明らかである。まず極小素因子で割ることにより、ビッグ CM 予想は整域の場合に帰着されることに注意する。 R を局所整域とする。 $\dim R = 1$ のときは $M = R$ とおけば良い。 $\dim R = 2$ のときは M として R の正規化をとれば良い。

ビッグ CM 予想から次の 2 つの重要な予想が従う。

単項式予想. R を局所環とし、 x_1, \dots, x_d を R の巴系とする。このとき任意の自然数 t に対し、

$$x_1^{t-1} \cdots x_d^{t-1} \notin (x_1^t, \dots, x_d^t)$$

が成り立つ。

完備化は忠実平坦なので、単項式予想は完備局所環の場合に帰着される。さらに極小素因子で割ることにより、完備局所整域の場合に帰着される。また R が Cohen-Macaulay 環のとき、単項式予想は自明である。 R が Buchsbaum 環¹のときも、単項式予想は正しいことが知られている ([10] 参照)。

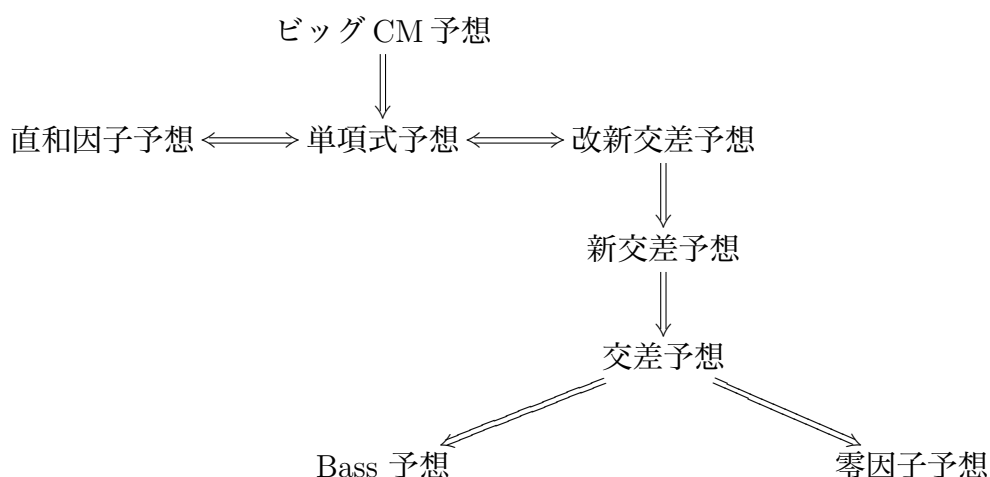
直和因子予想. A を正則局所環とし、 $A \subseteq R$ を A 代数で A 加群として有限生成なものとする。このとき A は A 加群として R の直和因子になる。

R が等標数 0 のときは、整閉整域の場合に帰着した後、トレース写像を使うことによって、直和因子予想は容易に従う (例えば, [7, Remark 9.2.4 (a)] 参照)。

今まで列挙した予想の間には次のような関係がある (詳細は [18] 参照)。ただし、これらの関係は環を固定した場合に示されているものではないことに注意する。例えば、局所環 R に対してビッグ CM 予想が成り立てば、同じ R に対して単項式予

¹ここでは定義は述べないが、Cohen-Macaulay 環より広い環のクラスである。定義及び基本性質は、例えば [37] を参照されたい。

想, 改新交差予想も成り立つ. しかし R に対して単項式予想が成り立つからと言って, 同じ R に対して改新交差予想が成り立つかどうかは (今のところ) 分からない.



Hochster はビッグ CM 予想から多くのホモロジカル予想が従うことに着目し, 1974 年等標数の場合にビッグ CM 予想を肯定的に解決した.

定理 5.1 ([18]). 局所環 R が等標数ならば, ビッグ CM 予想は正しい. 特に単因子予想, 直和因子予想, 改新交差予想も正しい.

1974 年の時点ではビッグ Cohen–Macaulay 加群の具体的な記述は得られていなかったが, 1992 年 Hochster–Huneke は正標数の場合には絶対整閉包 (absolute integral closure) がビッグ Cohen–Macaulay 加群になることを証明した.

定理 5.2 ([22]). R を正標数の優秀局所整域とし, R^+ を R の商体の代数閉包 $\overline{Q(R)}$ における R の整閉包とする. このとき R^+ は R のビッグ Cohen–Macaulay 加群になる.

一方 R が等標数 0 の 3 次元以上の局所環の場合には, R^+ は R のビッグ Cohen–Macaulay 加群にはならない.

6 密着閉包とホモロジカル予想

1980 年代後半に入ると Hochster–Huneke は, フロベニウス写像を用いて, 密着閉包と呼ばれる, 等標数の環におけるイデアル (及び加群) の閉包操作を導入した. この閉包操作を用いることによって, 等標数の場合のホモロジカル予想の証明は著しく簡略化された.

まず密着閉包の定義と基本性質を復習する. 証明等は [21], [23] を参照されたい.

定義 6.1 ([21]). R を等標数 $p > 0$ の環とし, $R^\circ := R \setminus \bigcup_{P \in \text{Min}(R)} P$ とおく. ここで $\text{Min}(R)$ は R の極小素因子全体を表す. また p 冪 $q = p^e \geq 1$ と R のイデアル $I = (a_1, \dots, a_r)$ に対して,

$$I^{[q]} := (a^q \mid a \in I) = (a_1^q, \dots, a_r^q) \subseteq R$$

とおく. このとき I の**密着閉包** (tight closure) I^* を次のように定義する: R の元 x に対し, $c \in R^\circ$ が存在して, 十分大きな任意の p 冪 $q = p^e \gg 0$ に対し

$$cx^q \in I^{[q]}$$

が成り立つとき, x は I^* に含まれる.

命題 6.2 ([21]). R, I は定義 6.1 と同じとする.

- (1) $I \subseteq I^* = (I^*)^* \subseteq \bar{I} \subseteq \sqrt{I}$. ただし \bar{I} は I の整閉包である.
- (2) R が正則環ならば, R の全てのイデアル I に対し, $I^* = I$ が成り立つ.
- (3) R を等次元の局所環で, Cohen-Macaulay 局所環の準同型像と仮定する. このとき R の任意の巴系 x_1, \dots, x_d と任意の $0 \leq i \leq d-1$ に対して,

$$(x_1, \dots, x_i) : x_{i+1} \subseteq (x_1, \dots, x_i)^*$$

が成り立つ.

(3) の性質を密着閉包の**コロン補足**と呼ぶ. R が Cohen-Macaulay のとき (3) は自明である. また一般に密着閉包は局所化と可換ではないことに注意する ([5] 参照).

以上の基本性質を認めると, 正標数の場合の単項式予想は直ちに従う.

正標数の場合の単項式予想の証明. R は完備局所整域として良い. 任意の自然数 t に対し,

$$(x_1^t, \dots, x_d^t) : x_1^{t-1} \cdots x_d^{t-1} \subseteq (x_1, \dots, x_d)^* \subseteq \sqrt{(x_1, \dots, x_d)} \subsetneq R.$$

ここで最初の (\subseteq) は命題 6.2 (3) から, 2 番目の (\subseteq) は命題 6.2 (1) から従う. よって $x_1^{t-1} \cdots x_d^{t-1} \notin (x_1, \dots, x_d)^*$. \square

標数 $p > 0$ への還元を考えることにより, 等標数 0 の場合も従う. 混標数 $(0, p)$ の場合も, 命題 6.2 と類似の性質を満たす閉包操作を定義できれば, 同様の議論から単項式予想を始めとする一連の予想が従う.

Hochster の夢. 混標数の環上で “密着閉包” を定義したい.

実際、この Hochster の夢を実現すべく、多くの閉包操作が導入された。プラス閉包 (plus closure), 拡張されたプラス閉包 (extended plus closure), solid closure, parasolid closure, dagger closure, 等々。ここではプラス閉包と拡張されたプラス閉包について説明する。

定義 6.3. R を整域とし、 R^+ を R の商体の代数閉包 $\overline{Q(R)}$ における整閉包とする。このとき、任意の R のイデアル I に対し、 I の **プラス閉包** I^+ を

$$I^+ := IR^+ \cap R$$

と定義する。

正標数の場合、プラス閉包は密着閉包と一致すると期待されていた。実際、Smith [36] は R が正標数の優秀局所整域で I が巴系イデアルの場合に、Brenner [4] は S が有限体の代数的閉包上有限生成な 2 次元次数環で I が斉次イデアルの場合に、 $I^+ = I^*$ を証明した。しかし最近になって Brenner–Monsky [5] によって $I^+ \subsetneq I^*$ となる例が発見された。

混標数 $(0, p)$ の場合、イデアル I が p 冪 p^n を含むならば、そのプラス閉包 I^+ は密着閉包に似た振る舞いをする。このことに注目した Heitmann は、 (I, p^n) のプラス閉包を用いて、拡張されたプラス閉包という新しい閉包操作を導入した。

定義 6.4 ([14]). R を混標数 $(0, p)$ の整域とし、 I を R のイデアルとする。 I の **拡張されたプラス閉包** I^{ep} とは、次のように定義される: R の元 x に対し、 $c \in R^\circ$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$c^{1/n}x \in (I, p^n)R^+$$

が成り立つとき、 x は I^{ep} に含まれる。

Heitmann は 3 次元の場合に拡張されたプラス閉包のコロン補足を証明した。

定理 6.5 ([15, Theorem 1.3], cf.[13]). R を混標数 $(0, p)$ の優秀正規局所環とし、 x, y, z を R の巴系の一部とする。このとき

$$(x, y) : z \subseteq (x, y)^{\text{ep}}$$

が成り立つ。

混標数の場合の単項式予想を考える際には、次の Hochster の補題が有用である。

補題 6.6 ([18, Section 6]). R は定理 6.5 と同じとする。このとき単項式予想が成り立つことと、任意の (p, x_2, \dots, x_d) の形の巴系と $t \in \mathbb{N}$ に対し

$$p^{t-1}x_1^{t-1} \cdots x_d^{t-1} \notin (p^t, x_1^t, \dots, x_d^t)$$

が成り立つことは同値である。

定理 6.5 と 補題 6.6 を組み合わせることにより, Heitmann は 3次元混標数の場合の単項式予想を証明した.

定理 6.7 ([13]). 局所環 R の次元が 3 以下ならば, 単項式予想は正しい. ゆえに直和因子予想も正しい.

証明. R は 3次元混標数 $(0, p)$ の完備局所整域と仮定してよい. 補題 6.6 より, p, x, y を R の巴系としたとき, この巴系に対し単項式予想が成り立たないと仮定して矛盾を導けば良い. すなわち, ある自然数 t が存在して,

$$p^{t-1}x^{t-1}y^{t-1} \in (p^t, x^t, y^t)$$

と仮定する. このとき, 正規化をとることにより, R は正規局所環として良い. 上記仮定より, $a_1 \in R$ が存在して, $p^{t-1}(x^{t-1}y^{t-1} - a_1p) \in (x^t, y^t)$ と書ける. p^{t-1}, x^t, y^t は R の巴系なので, 定理 6.5 より, $x^{t-1}y^{t-1} - a_1p \in (x^t, y^t)^{\text{ep}}$ を得る. ここで R^+ の付値 v を 1 つ固定する. 拡張されたプラス閉包の定義より, $c_1 \in R$, $3v(c_1) < n_1 \min\{v(p), v(x), v(y)\}$ となる自然数 n_1 , 優秀正規局所環 $R \subseteq R_1 \subseteq R^+$ が存在して,

$$c_1^{1/n_1}x^{t-1}y^{t-1} \in (p, x^t, y^t)R_1$$

が成り立つ.

上と同様にして, $a_2 \in R$ が存在して, $x^{t-1}(c_1^{1/n_1}y^{t-1} - a_2x) \in (p, y^t)R_1$ と書ける. p, x^{t-1}, y^t は R_1 の巴系なので, 定理 6.5 より, $c_1^{1/n_1}y^{t-1} - a_2x \in (p, y^t)^{\text{ep}}$ を得る. 拡張されたプラス閉包の定義より, $c_2 \in R$, $3v(c_2) < n_2 \min\{v(p), v(x), v(y)\}$ となる自然数 n_2 , 優秀正規局所環 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq R^+$ が存在して,

$$c_1^{1/n_1}c_2^{1/n_2}y^{t-1} \in (p, x, y^t)R_2$$

が成り立つ.

この議論を繰り返すことにより, $c_3 \in R$, $3v(c_3) < n_3 \min\{v(p), v(x), v(y)\}$ となる自然数 n_3 , 優秀正規局所環 $R_2 \subseteq R_3 \subseteq R^+$ が存在して,

$$c_1^{1/n_1}c_2^{1/n_2}c_3^{1/n_3} \in (p, x, y)R_3$$

が成り立つ. よって

$$\frac{1}{n_1}v(c_1) + \frac{1}{n_2}v(c_2) + \frac{1}{n_3}v(c_3) \geq \min\{v(p), v(x), v(y)\}$$

となるが, これは n_1, n_2, n_3 の取り方に反する. □

Heitmann が単項式予想を解決してからほどなくして, Heitmann の証明を改良することによって, Hochster は 3次元混標数の場合のビッグ CM 予想を証明した.

定理 6.8 ([19]). 局所環 R の次元が 3 以下ならば, ビッグ CM 予想は正しい. 特に改新交差予想も正しい.

7 その他のホモロジカル予想

ここまでに述べることができなかつたホモロジカル予想について、その主張のみをここで紹介する。部分的に解決しているものもあるが、完全に解決しているものは Vasconcelos 予想のみである（正しいことがわかっている）。詳しくは、[7, 17, 20, 23, 34, 38] を参照されたい。

ホモロジカル高度予想. $R \rightarrow S$ を環の準同型とし、 M を有限生成 R 加群とする。このとき、 S のイデアル $(\text{Ann}_R M)S$ の極小素イデアル \mathfrak{p} に対し、不等式

$$\text{ht}_S \mathfrak{p} \leq \text{pd}_R M$$

が成り立つ。

スモール CM 予想. R を完備局所環とする。このとき、 R 上有限生成なビッグ Cohen-Macaulay 加群（すなわち極大 Cohen-Macaulay 加群）が存在する。

Serre 予想. R を正則局所環、 M, N を有限生成 R 加群とし、 $\ell_R(M \otimes_R N) < \infty$ と仮定する。このとき、**交差重複度**

$$\chi_R(M, N) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \ell_R(\text{Tor}_i^R(M, N))$$

が定義される。

(1) $\dim_R M + \dim_R N < \dim R$ ならば $\chi_R(M, N) = 0$ である。

(2) $\dim_R M + \dim_R N = \dim R$ ならば $\chi_R(M, N) > 0$ である。

強重複度予想. R を局所環とし、 M, N を有限生成 R 加群とする。 $\text{pd}_R M < \infty$ かつ $\ell_R(M \otimes_R N) < \infty$ と仮定する。このとき、

(1) $\dim_R M + \dim_R N \leq \dim R$ である。

(2) $\dim_R M + \dim_R N < \dim R$ ならば $\chi_R(M, N) = 0$ である。

(3) $\dim_R M + \dim_R N = \dim R$ ならば $\chi_R(M, N) > 0$ である。

強交差予想. R を局所環とし、 M と N を有限生成 R 加群とする。 $\text{pd}_R M < \infty$ かつ $\ell_R(M \otimes_R N) < \infty$ と仮定する。このとき、不等式

$$\dim_R N \leq \text{grade}_R M$$

が成り立つ。

余因子予想 (グレード予想). R を局所環とし, M を射影次元が有限な有限生成 R 加群とする. このとき, 等式

$$\text{grade}_R M = \text{codim}_R M$$

が成り立つ.

強直和因子予想. $A \rightarrow R$ を正則局所環から局所整域への有限局所準同型写像とする. \mathfrak{p} を高度 1 の R の素イデアルで, $\mathfrak{p} \cap A$ が A の極大イデアルの極小生成元で生成されているものとする. このとき, 包含写像 $x_A \rightarrow \mathfrak{p}$ は A 加群準同型として分裂単射である.

Tor 写像消滅予想. $A \rightarrow R \rightarrow T$ を環の準同型とする. A, T は正則で, R は A の有限かつねじれない拡大であると仮定する. このとき, A 加群 M と整数 $i > 0$ に対し, 誘導写像

$$\text{Tor}_i^A(M, R) \rightarrow \text{Tor}_i^A(M, T)$$

は零写像である.

標準元予想. R を局所環とし, \mathfrak{m} を極大イデアルとする. $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_d$ を R の巴系とする. F_\bullet を R 加群 $R/\mathbf{x}R$ の極小自由分解とし, $f_\bullet : K_\bullet(\mathbf{x}) \rightarrow F_\bullet$ を Koszul 複体からの自然な写像とする. このとき, $f_d(K_d(\mathbf{x})) \not\subseteq \mathfrak{m}F_d$ である.

シジジー予想. R を局所環とし, M を射影次元が有限な有限生成 R 加群とする. このとき, $1 \leq i < \text{pd}_R M$ に対して不等式

$$\text{rank}_R(\Omega^i M) \geq i$$

が成り立つ. ただし, $\Omega^i M$ は M の第 i シジジーを表す.

Vasconcelos 予想. R を局所環, 極大イデアルを \mathfrak{m} とし, $d = \dim R$ とする. もし $\text{Ext}_R^d(R/\mathfrak{m}, R) \cong R/\mathfrak{m}$ ならば, R は Gorenstein である.

参考文献

- [1] M. AUSLANDER, Modules over unramified regular local rings. *Illinois J. Math.* **5** (1961), 631–647.
- [2] L. L. AVRAMOV; R.-O. BUCHWEITZ; S. IYENGAR, Class and rank of differential modules. *Invent. Math.* **169** (2007), no. 1, 1–35.
- [3] H. BASS, On the ubiquity of Gorenstein rings. *Math. Z.* **82** (1963), 8–28.
- [4] H. BRENNER, Tight closure and plus closure in dimension two. *Amer. J. Math.* **128** (2006), no. 2, 531–539.

- [5] H. BRENNER; P. MONSKY, Tight closure does not commute with localization. arXiv: 0710.2913v2, to appear in *Ann. of Math.*
- [6] T. BRIDGELAND; S. IYENGAR, A criterion for regularity of local rings. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **342** (2006), no. 10, 723–726.
- [7] W. BRUNS; J. HERZOG, Cohen-Macaulay rings. Revised edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 39. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1998.
- [8] E. G. EVANS; P. GRIFFITH, The syzygy problem. *Ann. of Math. (2)* **114** (1981), no. 2, 323–333.
- [9] H.-B. FOXBY; E. B. HALVORSEN, Grothendieck groups for categories of complexes. *J. K-Theory* **3** (2009), no. 1, 165–203.
- [10] S. GOTO, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings. *J. Algebra* **85** (1983), no.2, 490–534.
- [11] R. HARTSHORNE, Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. *Springer-Verlag, New York-Heidelberg*, 1977.
- [12] R. C. HEITMANN, A counterexample to the rigidity conjecture for rings. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **29** (1993), no. 1, 94–97.
- [13] R. C. HEITMANN, The direct summand conjecture in dimension three. *Ann. of Math. (2)* **156** (2002), no. 2, 695–712.
- [14] R. C. HEITMANN, Extensions of plus closure. *J. Algebra* **238** (2001), 801–826.
- [15] R. C. HEITMANN, Extended plus closure and colon-capturing. *J. Algebra* **293** (2005), 407–426.
- [16] M. HOCHSTER, The equicharacteristic case of some homological conjectures on local rings. *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974), 683–686.
- [17] M. HOCHSTER, Topics in the homological theory of modules over commutative rings. Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of Nebraska, Lincoln, Neb., June 24–28, 1974. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 24. *Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society, Providence, R.I.*, 1975.
- [18] M. HOCHSTER, Canonical elements in local cohomology modules and the direct summand conjecture. *J. Algebra* **84** (1983), no. 2, 503–553.

- [19] M. HOCHSTER, Big Cohen-Macaulay algebras in dimension three via Heitmann's theorem. *J. Algebra* **254** (2002), no. 2, 395–408.
- [20] M. HOCHSTER, Homological conjectures, old and new. *Illinois J. Math.* **51** (2007), no. 1, 151–169.
- [21] M. HOCHSTER; C. HUNEKE, Craig Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem. *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), no. 1, 31–116.
- [22] M. HOCHSTER; C. HUNEKE, Infinite integral extensions and big Cohen-Macaulay algebras. *Ann. of Math. (2)* **135** (1992), 53–89.
- [23] C. HUNEKE, Tight closure and its applications. With an appendix by Melvin Hochster. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 88. *Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI*, 1996.
- [24] C. HUNEKE; D. A. JORGENSEN; R. WIEGAND, Vanishing theorems for complete intersections. *J. Algebra* **238** (2001), no. 2, 684–702.
- [25] C. HUNEKE; R. WIEGAND, Tensor products of modules and the rigidity of Tor. *Math. Ann.* **299** (1994), no. 3, 449–476.
- [26] C. HUNEKE; R. WIEGAND, Tensor products of modules, rigidity and local cohomology. *Math. Scand.* **81** (1997), no. 2, 161–183.
- [27] D. A. JORGENSEN, Complexity and Tor on a complete intersection. *J. Algebra* **211** (1999), no. 2, 578–598.
- [28] D. A. JORGENSEN, Vanishing of (co)homology over commutative rings. *Comm. Algebra* **29** (2001), no. 5, 1883–1898.
- [29] S. LICHTENBAUM, On the vanishing of Tor in regular local rings. *Illinois J. Math.* **10** (1966), 220–226.
- [30] M. P. MURTHY, Modules over regular local rings. *Illinois J. Math.* **7** (1963), 558–565.
- [31] C. PESKINE; L. SZPIRO, Dimension projective finie et cohomologie locale. Applications à la démonstration de conjectures de M. Auslander, H. Bass et A. Grothendieck. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. 42 (1973), 47–119.
- [32] P. ROBERTS, Two applications of dualizing complexes over local rings. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **9** (1976), no. 1, 103–106.

- [33] P. ROBERTS, Le théorème d'intersection. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **304** (1987), no. 7, 177–180.
- [34] P. C. ROBERTS, Multiplicities and Chern classes in local algebra. Cambridge Tracts in Mathematics, 133. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1998.
- [35] J.-P. SERRE, Algèbre locale. Multiplicités, Cours au Collège de France, 1957–1958, rédigé par Pierre Gabriel. Seconde édition, 1965. Lecture Notes in Mathematics, 11, *Springer-Verlag, Berlin-New York*, 1965.
- [36] K. E. SMITH, Tight closure of parameter ideals. *Invent. Math.* **115** (1994), no. 1, 41–60.
- [37] J. STÜCKRAD; W. VOGEL, Buchsbaum rings and applications. An interaction between algebra, geometry and topology. *Springer-Verlag, Berlin*, 1986.
- [38] 岩波数学辞典, 第4版, 岩波書店, 2007.