

# 阿原一志-逆井卓也「パズルゲームで楽しむ写像類群入門」

## 補題 9.9, 補題 9.10 について<sup>1</sup>

逆井 卓也 (東京大学大学院数理科学研究科)

### 1 記号の確認

種数  $g$  の閉曲面  $\Sigma_g$  上の単純閉曲線を次のようにとります.

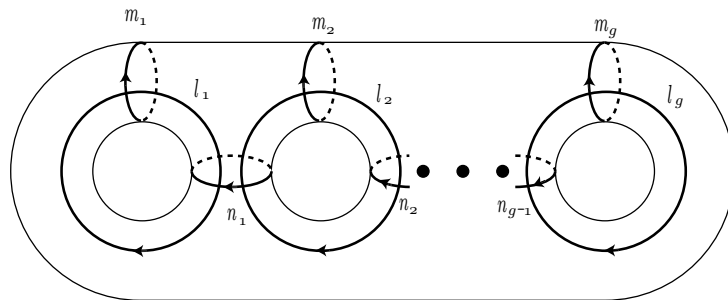


図 1: 閉曲面  $\Sigma_g$  上の単純閉曲線たち

さらに下図のように, 曲線  $m_i$  の反対側にある曲線を  $m'_i$  とします.

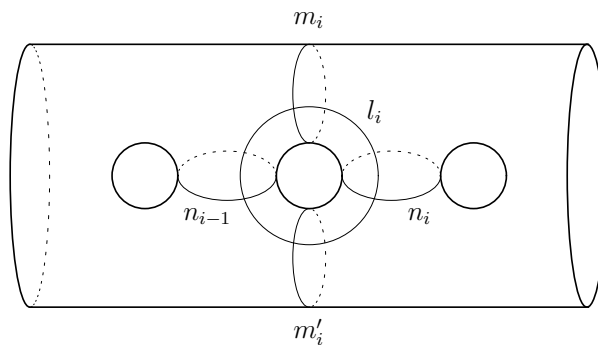


図 2: 曲線  $m'_i$  とその周辺

単純閉曲線  $c$  に対して,  $c$  に沿っての右ひねりのデーンツイストを  $\tau_c$  と書くことにします.

以下, 記事の中の補題 9.9 と 補題 9.10 にある等式に関して, Mathematica 版の **てるあき** を使って描いた絵を載せます. 実は, Mathematica 版では曲線の向きを表示することができません<sup>2</sup>ので, 曲線の向きを最初にどちらかに定めた上で, 曲線の変化を見進めて下さい (強引ですが, 演習課題とします).

<sup>1</sup>日本評論社「数学セミナー」2010年1月号, 阿原一志-逆井卓也「パズルから入る写像類群入門」連載第4回「リコリッシュの定理とその証明(1)」内の補題5と補題6に対応しています.

<sup>2</sup>プログラム内部では向きが考慮されているのですが, 表示の実装を忘れていました...

## 2 補題 9.9 について

補題 9.9 は次のようなものでした<sup>3</sup>.

### 補題 9.9 写像類

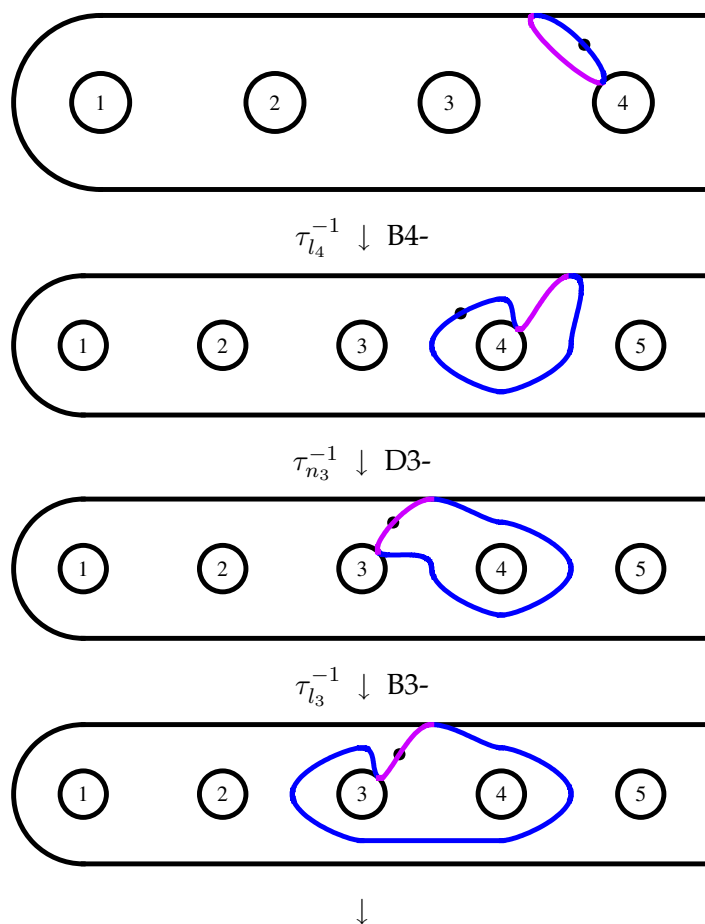
$$\varphi = \tau_{l_{i+1}}^{-1} \circ \tau_{n_i}^{-1} \circ \tau_{l_i}^{-1} \circ \tau_{m'_i}^{-1} \circ \tau_{m_i}^{-1} \circ \tau_{l_i}^{-1} \circ \tau_{n_i}^{-1} \circ \tau_{l_{i+1}}^{-1}$$

は  $m'_{i+1} = \varphi(m_{i+1})$  を満たす.

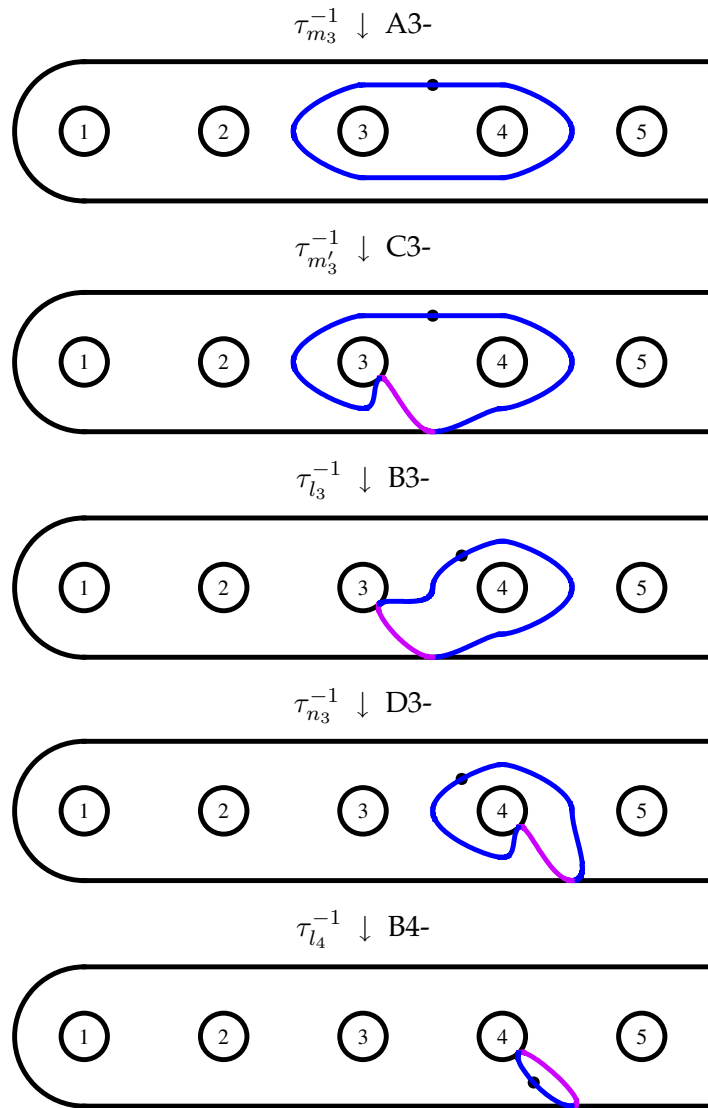
この補題を証明するためには, 実際に  $m_{i+1}$  に  $\varphi$  を施してみればよく, こういった時こそ **てるあき** の出番となります.

一般の  $i$  に関する主張となっていますが, 調べる際には, 種数  $g$  を 5 とし,  $i = 3$  のときを考えれば十分です (ひとつ境界を持つ曲面版のプログラムのときは種数を気にする必要はありません).

それでは,  $\varphi$  による  $m_{i+1} = m_4$  の移り方を順に見ていきましょう. 各ステップで, 矢印の左側にはどのデーンツイストを施したかを, 右側には Mathematica 版の **てるあき** を操作する際にパレット上のどのボタンを押せばよいかを記しておきます. 絵の中の青色の線がこちらから見て表側にあるもので, 紫色の線が裏側にあるものとなっています.



<sup>3</sup>本文の中から必要な部分のみを取り出しています.



以上より,  $\varphi(m_4) = \varphi(m'_4)$  であることが示され, 補題 9.9 の証明が完了しました.

□

### 3 補題 9.10 について

補題 9.10 は次のようなものでした.

**補題 9.10** 曲面  $Y_i$  において, 写像類  $\psi$  を

$$\psi = (\tau_{m_i} \circ \tau_{l_i} \circ \tau_{m'_i}) \circ (\tau_{m_i} \circ \tau_{l_i} \circ \tau_{m'_i}) \circ (\tau_{m_i} \circ \tau_{l_i} \circ \tau_{m'_i}) \circ (\tau_{m_i} \circ \tau_{l_i} \circ \tau_{m'_i})$$

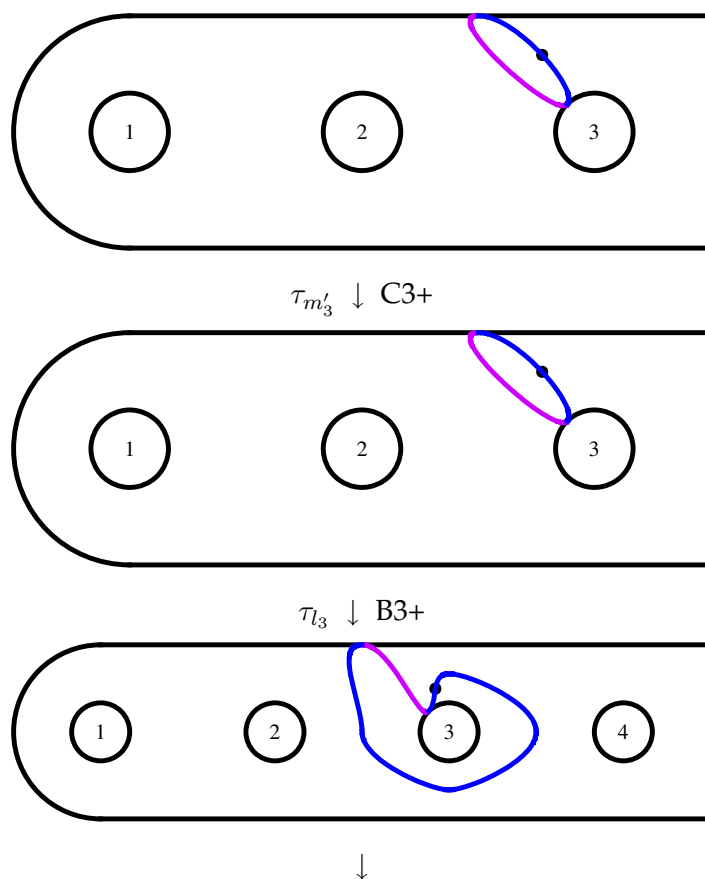
で定めると, 等式  $\tau_{q_{i+1}} = \tau_{q_i}^{-1} \circ \psi$  が成立する.

記事で述べましたように, この補題の証明は, 次の手順で行われます.

1.  $m_i$  に  $\psi$  を施しても元の位置とアイソトピックであることを見る.
2.  $l_i$  に  $\psi$  を施しても元の位置とアイソトピックであることを見る.
3.  $\psi(n_{i-1})$  が, 本文の図 9.10<sup>4</sup>にある位置で表されることを見る.
4.  $\psi(n_i)$  が, 本文の図 9.10 にある位置で表されることを見る.

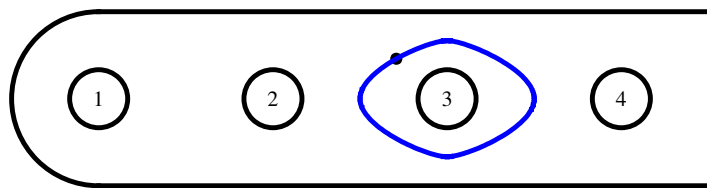
補題 9.9 のときと同じように,  $i = 3$  のときを調べれば十分です. 以下, 順番に見ていきましょう. ここでも曲線の向きは各自で付け加えてください.

#### 1. $m_3$ に $\psi$ を施す

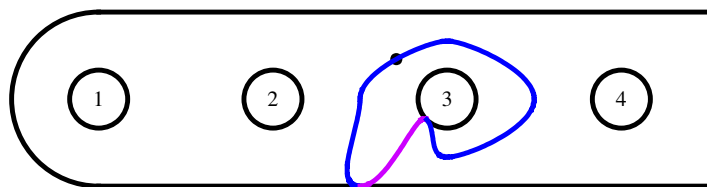


<sup>4</sup>連載記事「パズルから入る写像類群入門」第4回の図12と対応しています.

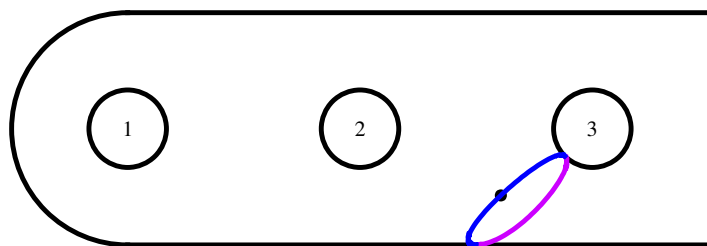
$\tau_{m_3} \downarrow A3+$



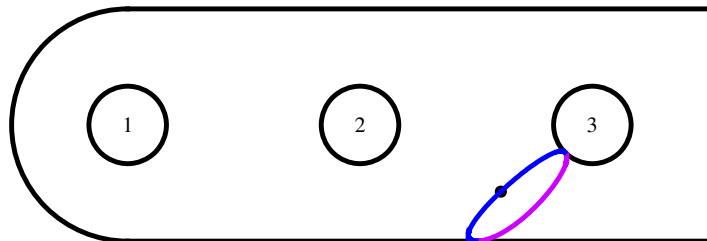
$\tau_{m'_3} \downarrow C3+$



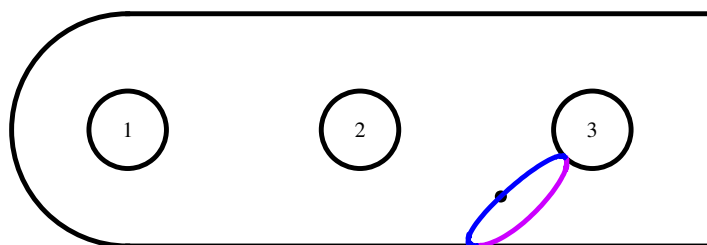
$\pi_{l_3} \downarrow B3+$



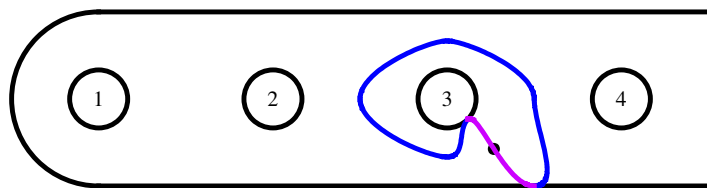
$\tau_{m_3} \downarrow A3+$



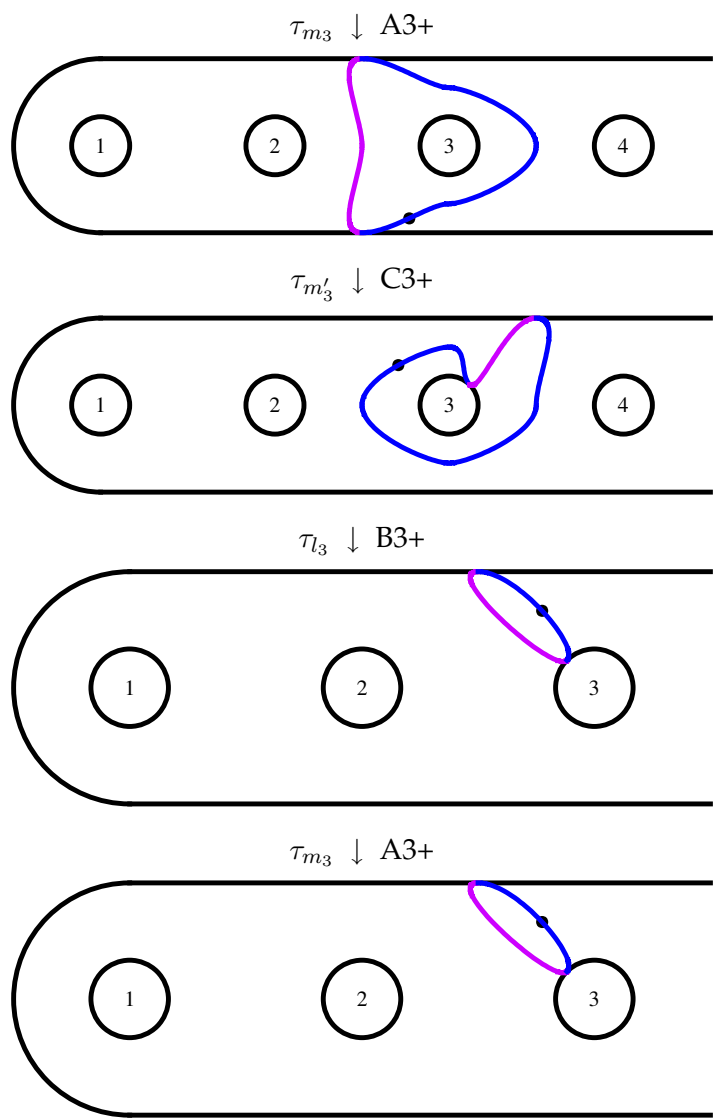
$\tau_{m'_3} \downarrow C3+$



$\pi_{l_3} \downarrow B3+$

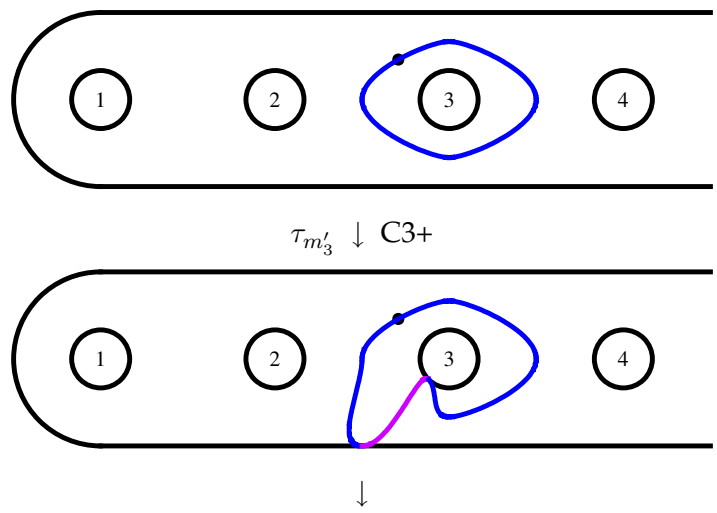


$\downarrow$

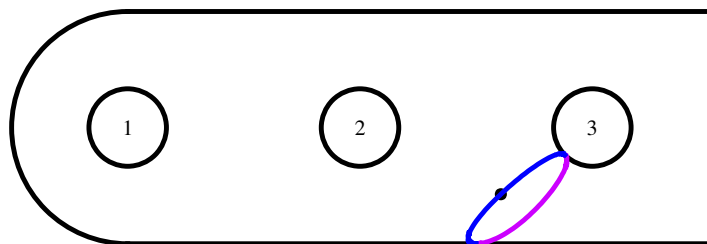


以上より,  $\psi(m_3) = m_3$  であることが確認できました.

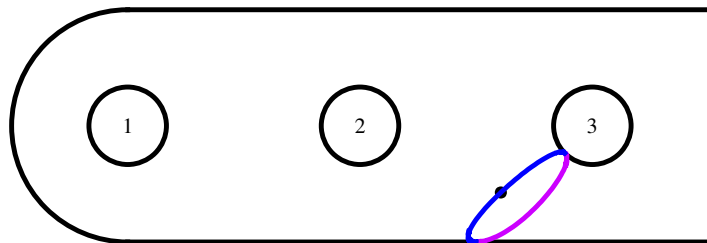
2.  $l_3$  に  $\psi$  を施す



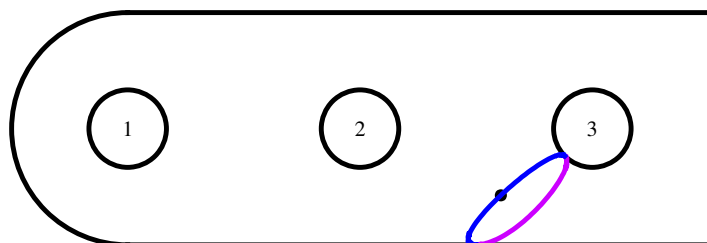
$\pi_{l_3} \downarrow B3+$



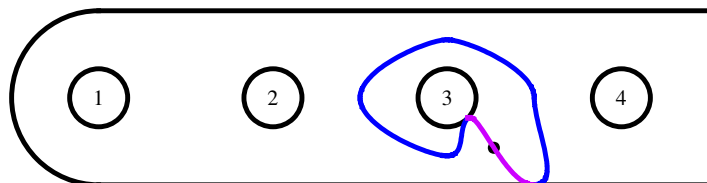
$\tau_{m_3} \downarrow A3+$



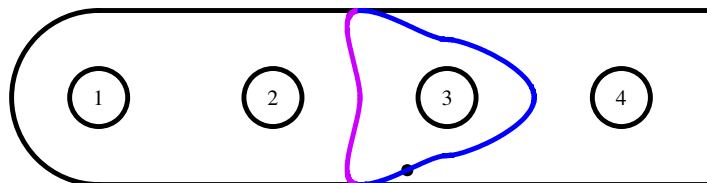
$\tau_{m'_3} \downarrow C3+$



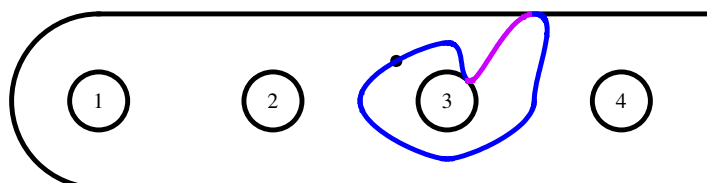
$\pi_{l_3} \downarrow B3+$



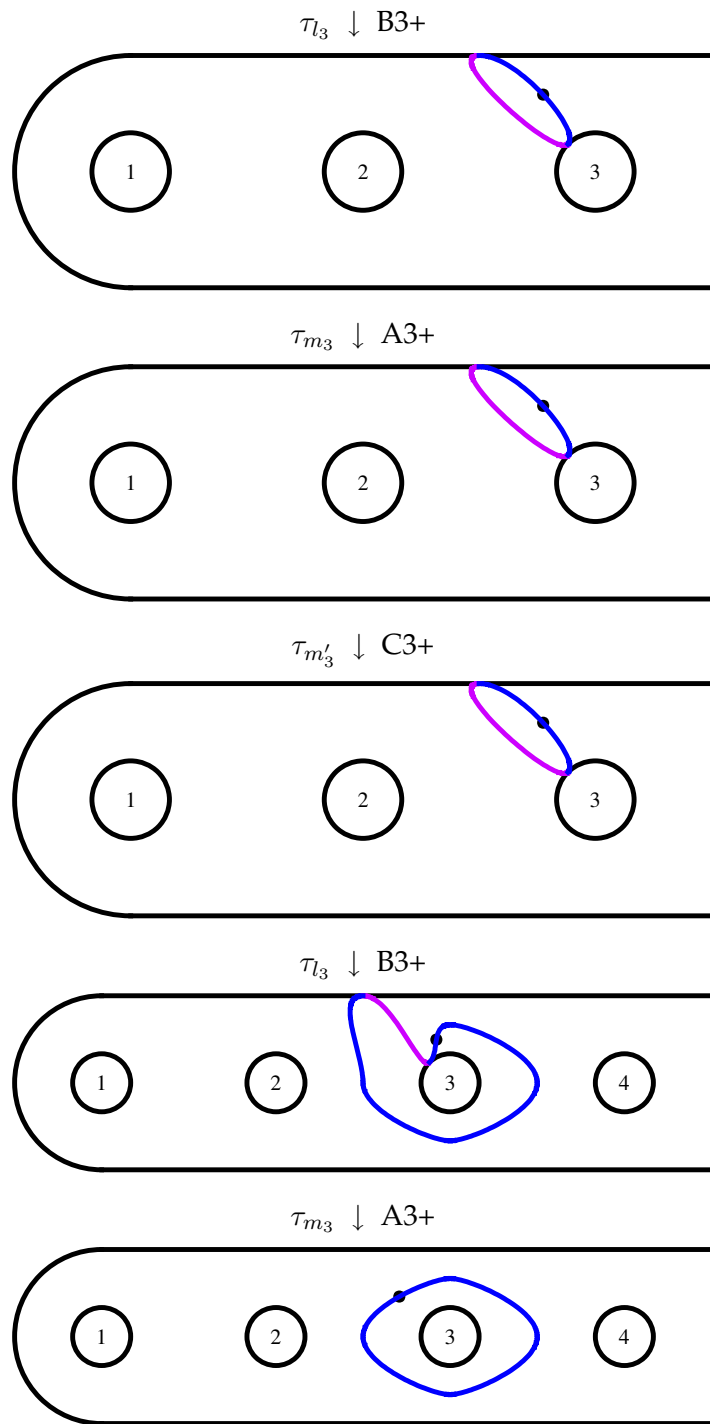
$\tau_{m_3} \downarrow A3+$



$\tau_{m'_3} \downarrow C3+$



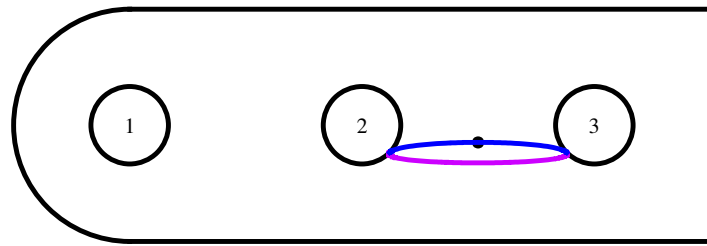
$\downarrow$



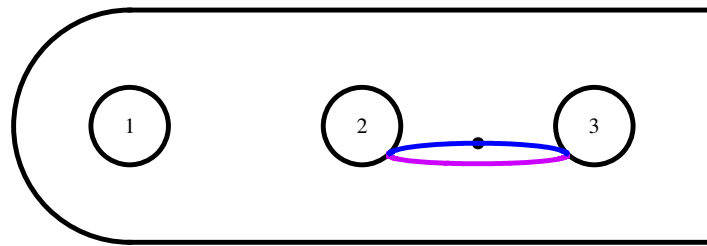
以上より,  $\psi(l_3) = l_3$  であることが確認できました. ちなみに, 1. の 4 つめの絵と 2. の最初の絵が同じであることに気付くと, この作業は大幅にショートカットすることができます.



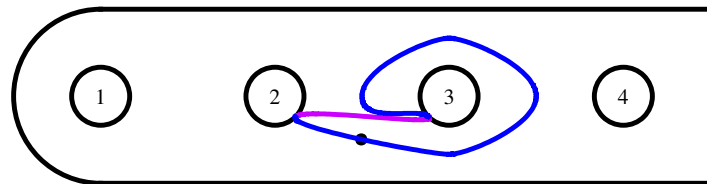
3.  $n_2$  に  $\psi$  を施す



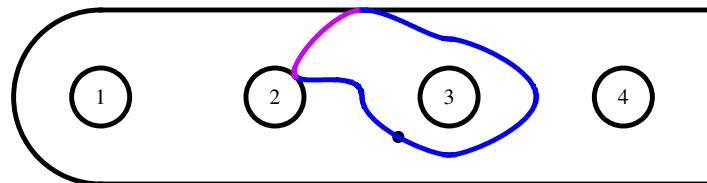
$\tau_{m'_3} \downarrow C3+$



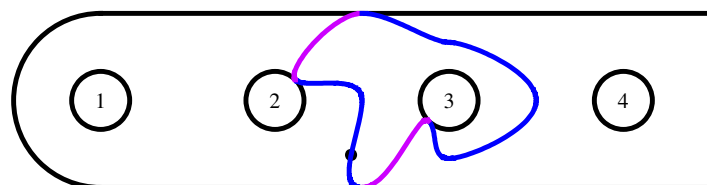
$\pi_3 \downarrow B3+$



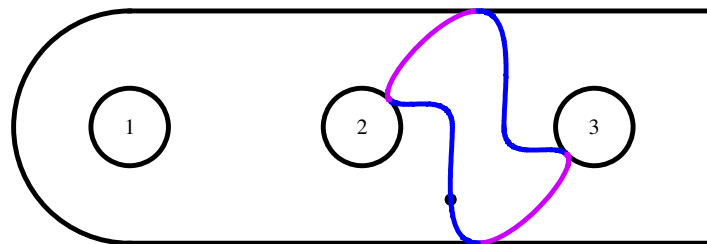
$\tau_{m_3} \downarrow A3+$



$\tau_{m'_3} \downarrow C3+$

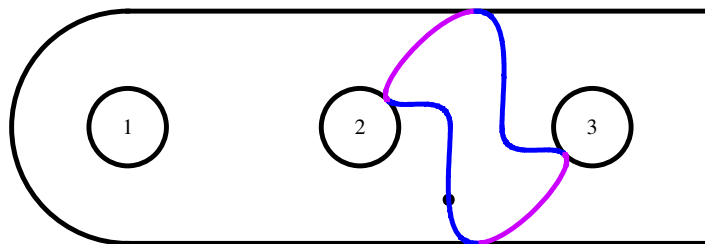


$\pi_3 \downarrow B3+$

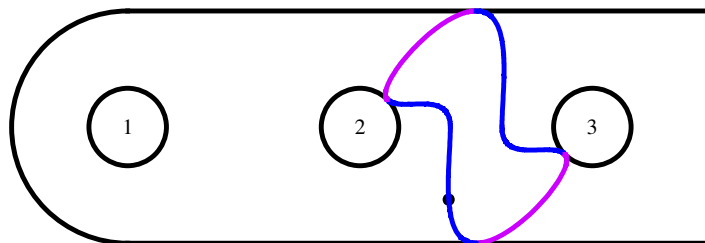


↓

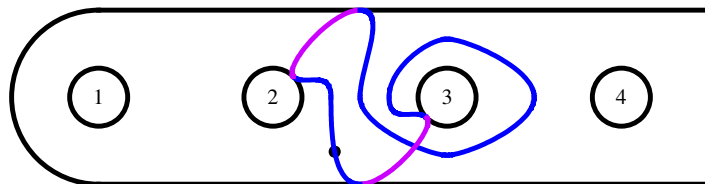
$\tau_{m_3} \downarrow A3+$



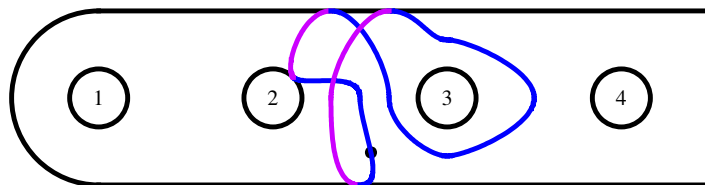
$\tau_{m'_3} \downarrow C3+$



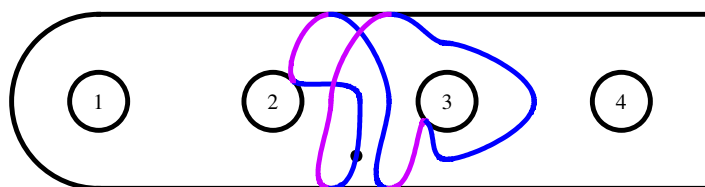
$\tau_{l_3} \downarrow B3+$



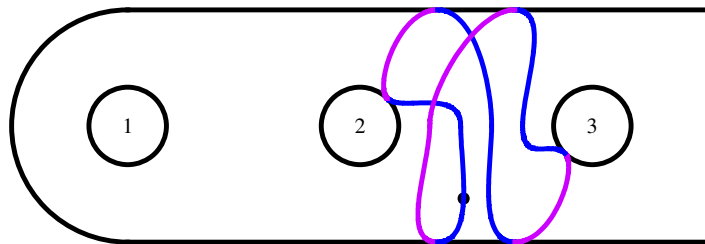
$\tau_{m_3} \downarrow A3+$



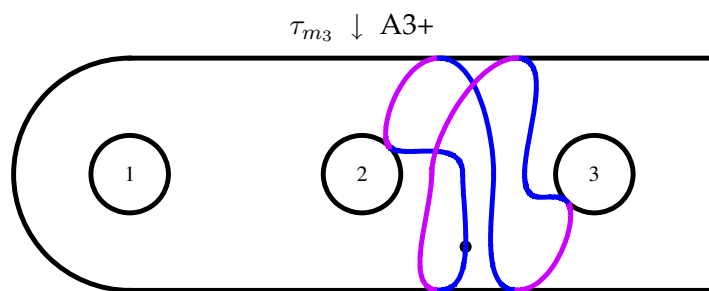
$\tau_{m'_3} \downarrow C3+$



$\tau_{l_3} \downarrow B3+$

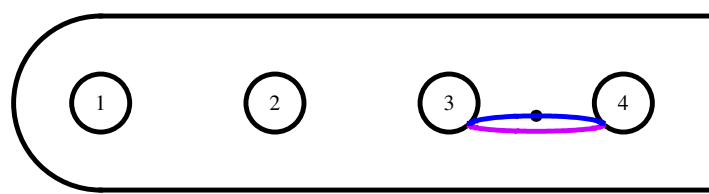


$\downarrow$

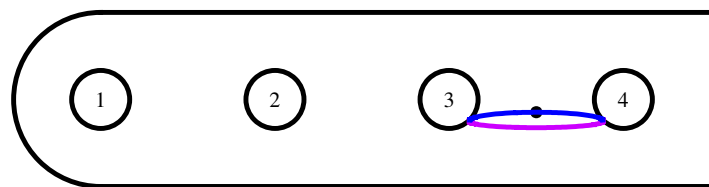


これより,  $\psi(n_2)$  が本文の図 9.10 にある位置となることが確認できました.

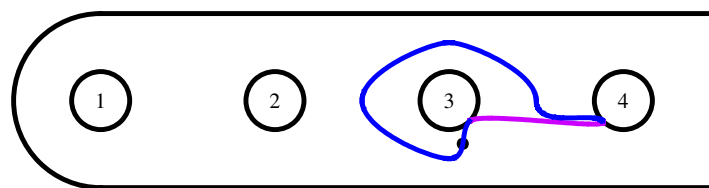
4.  $n_3$  に  $\psi$  を施す



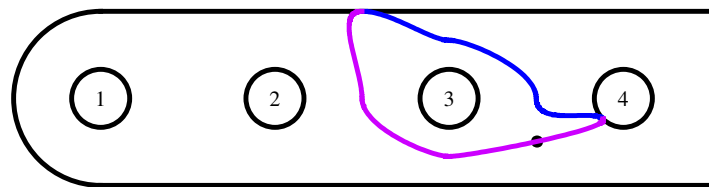
$\tau_{m'_3} \downarrow C3+$



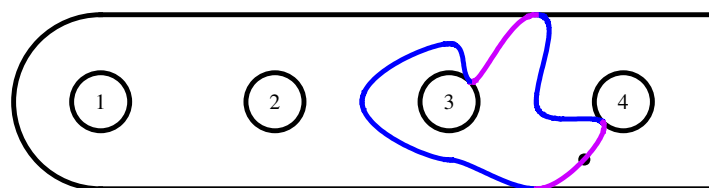
$\tau_{l_3} \downarrow B3+$



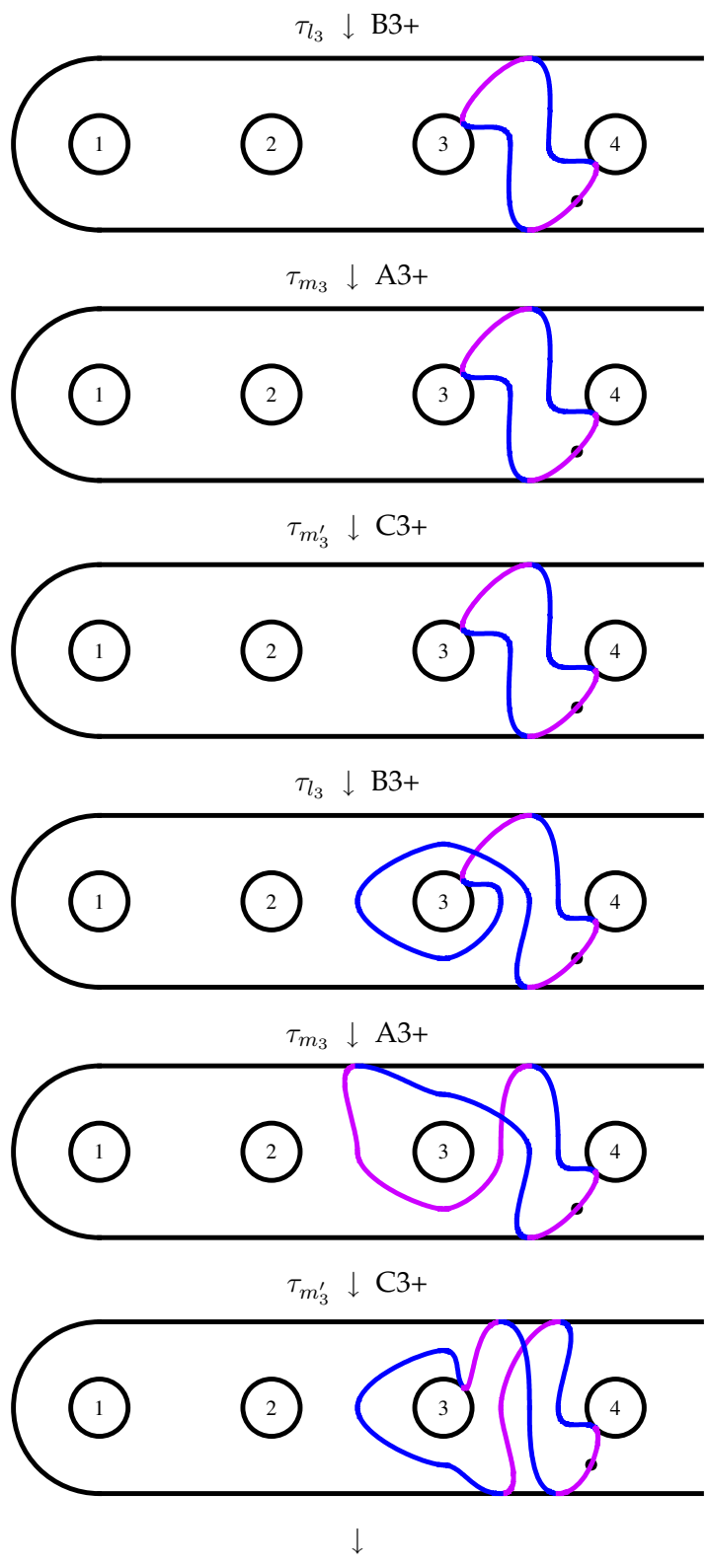
$\tau_{m_3} \downarrow A3+$

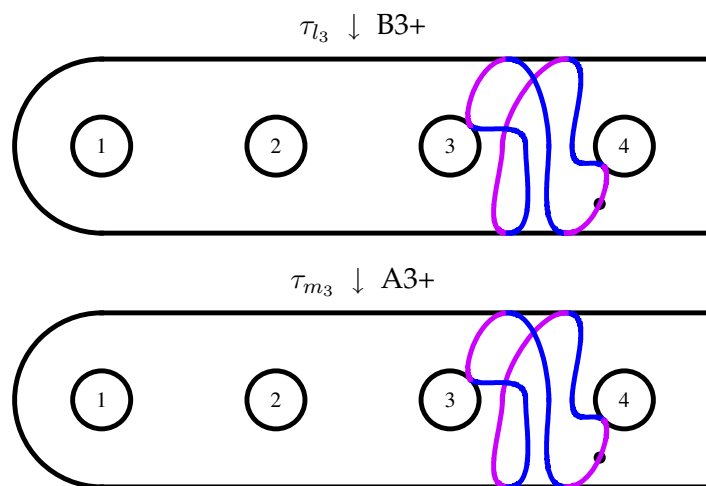


$\tau_{m'_3} \downarrow C3+$



↓





これより,  $\psi(n_3)$  が本文の図 9.10 にある位置となることが確認できました.

以上より, 補題 9.10 の証明が完了しました.

□

おしまい