論理式 $\forall x \in \mathbb{N}.\, A(x)$ は $\forall x.\, \mathbb{N}(x) \Rightarrow A(x)$ の略記とする．また, $\exists x \in \mathbb{N}.\, A(x)$ は $\exists x.\, \mathbb{N}(x) \wedge A(x)$ の略記とする．

二引数の関数記号 $x+y$ が与えられているとする．また, それは公理 $x+0=x$ および $x+\mathsf{S}y = \mathsf{S}(x+y)$ を満たすものとする．また, 交換法則や結合法則も公理として仮定してしまおう．

述語 $x<y$ と $x \leq y$ を

$$\begin{aligned} x < y &\equiv \exists u \in \mathbb{N}.\, (x+u=y) \\ x \leq y &\equiv \exists u \in \mathbb{N}.\, (x+\mathsf{S}u=y) \end{aligned}$$

で定義する．

まず, $\forall x \in \mathbb{N}.\, (0=x) \vee (0<x)$ を, $x \in \mathbb{N}$ の帰納法で証明する．

$$Q(x) \equiv (0=x) \vee (0<x)$$

と置く．型 $\mathsf{t}Q(x)$ は, $1+(\mathsf{N}\times 1)$ に等しい．命題 $Q(0)$ の証明は

$$\dfrac{\dfrac{}{0=0}}{(0=0)\vee(x<0)}$$

で得られ, そこから抽出されるラムダ項は, $\iota *$ である．ここで $*:1$ であり, $\iota : 1 \Rightarrow 1+(\mathbb{N}\times 1)$ である．次に $Q(x)$ を仮定して, $Q(\mathsf{S}x)$ を導く．その導出木は

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(0=x)\vee(0<x) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathbb{N}(0)} \quad \cancel{0=x}}{\mathbb{N}(x)} \qquad \dfrac{\cancel{0<x} \quad \overset{\vdots\,\pi_1}{\mathbb{N}(x)}}{\mathbb{N}(x)}}{\dfrac{\mathbb{N}(x)}{\mathbb{N}(\mathsf{S}x)}} \qquad \dfrac{}{0+\mathsf{S}x=\mathsf{S}x}}{\dfrac{\mathbb{N}(\mathsf{S}x)\wedge(0+\mathsf{S}x=\mathsf{S}x)}{0<\mathsf{S}x}}}{(0=\mathsf{S}x)\vee(0<\mathsf{S}x)}$$

$$\pi_1 \;=\; \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\mathbb{N}(u)\wedge(0+u=x)}}{\mathbb{N}(u)} \qquad \dfrac{}{u=0+u}}{\mathbb{N}(0+u)} \qquad \dfrac{\cancel{\mathbb{N}(u)\wedge(0+u=x)}}{0+u=x}}{\mathbb{N}(x)}$$

で得られる．ただし、自明な等式の処理は省略した．たとえば $u=0+u$ の導出は, 正しくは

$$\dfrac{\dfrac{\overline{u+0=u+0} \qquad \overline{u+0=u}}{u=u+0} \qquad \overline{u+0=0+u}}{u=0+u}$$

のように何ステップか必要である. しかし, ラムダ項の抽出の際には, このような導出木はたいした意味はない (次の問題参照).

問題 1. 上の $u=u+0$ の導出木からラムダ項を抽出せよ.

問題 2. 仮定 $Q(x)$ から $Q(\mathsf{S}x)$ を導く, 上に示した導出木からラムダ項を抽出せよ. 仮定 $Q(x)$ に型 $\mathsf{t}Q(x)=1+\mathbb{N}\times 1$ の変数 z を割り当てるとすると, 求めるラムダ項 N は z を自由変数にもち, 型は $\mathsf{t}Q(\mathsf{S}x)=1+\mathbb{N}\times 1$ となる. このような状況を, 変数と型を明示して, $z:(1+\mathbb{N}\times 1)\vdash N:(1+\mathbb{N}\times 1)$ の形式で書くことにする. この問を含めラムダ項を問われたときは, この形式 $x_1:\sigma_1,\, x_2:\sigma_2,\, \ldots,\, x_n:\sigma_n\vdash M:\tau$ を使って答えよ (そうしないと, どの変数にどのような型を想定したのか分からないので).

よって,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\mathbb{N}(x)} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ Q(0)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{Q(x)}\\ \vdots\\ Q(\mathsf{S}x)\end{array}}{Q(x)}}{\mathbb{N}(x)\Rightarrow Q(x)}}{\forall x\in\mathbb{N}.\,Q(x)}$$

によって, $\forall x\in\mathbb{N}.\,(0=x)\vee(0<x)$ の証明を得る.

問題 3. この $\forall x\in\mathbb{N}.\,Q(x)$ の導出木からラムダ項を抽出せよ. このラムダ項を M_0 と書くことにする.

問題 4. 自然数 n に対し, $\overline{n}=\Lambda X\lambda z^X\lambda y^{X\Rightarrow X}.\,y(y(\cdots(yz)\cdots))$ と置く. ここで, y の適用回数が n 回であるとする. たとえば $\overline{3}=\Lambda X\lambda z^X\lambda y^{X\Rightarrow X}.\,y(y(yz$ $))$ である. このような $\overline{n}$ を Church 数といったりする. $\overline{n}$ が型 $\mathbb{N}$ すなわち $\forall X.\,X\Rightarrow(X\Rightarrow X)\Rightarrow X$ を持つことを示せ. ちなみに $\rho\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau$ と書いたら, $\rho\Rightarrow(\sigma\Rightarrow\tau)$ と読むことにするのが決まりである.

問題 5. 問題 3 で求めた M_0 に対して, $M_0\overline{0}$ および $M_0\overline{3}$ を簡約して正規形に直せ.

これらの考察からわかるように, $\mathsf{t}Q(x)=1+\mathbb{N}\times 1$ において, 右側の 1 はたいした意味を持っていない. 実際, ペアの第二成分としては常に $*$ であって

変化していない．そこで, $\mathsf{t}B = 1$ のとき, $\mathsf{t}(A \wedge B) = \mathsf{t}A$ と型の定義を変えて, さらにラムダ項抽出の規則を

$$
\begin{array}{|c|}\multicolumn{1}{l}{(\wedge\mathrm{I})}\\ \hline \dfrac{\begin{array}{cc} \vdots_M & \vdots_N \\ A & B \end{array}}{A \wedge B} \\ \hline \rightsquigarrow\ M \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|}\multicolumn{1}{l}{(\wedge\mathrm{E}^1)}\\ \hline \dfrac{\begin{array}{c} \vdots_M \\ A \wedge B \end{array}}{A} \\ \hline \rightsquigarrow\ M \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|}\multicolumn{1}{l}{(\wedge\mathrm{E}^2)}\\ \hline \dfrac{\begin{array}{c} \vdots_M \\ A \wedge B \end{array}}{B} \\ \hline \rightsquigarrow\ * \\ \hline \end{array}
\qquad (\text{ただし } \mathsf{t}B = 1)
$$

と変えてしまっても, 本質的には変わらず, 抽出される項はだいぶすっきりする．以降はできるだけ, こちらの規則で考える．

問題 6．　このように規則を変えたときに, 問題 3 で抽出された M_0 はどのように変わるか.

次に, $\forall x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N}.\, (x < y) \vee (y \leq x)$ を証明する．$D(x, y) \equiv (x < y) \vee (y \leq x)$ と置く．上のように改変した規則下で, $\mathsf{t}D(x, y) = \mathbb{N} + \mathbb{N}$ である．$\mathbb{N}(x)$ を仮定して, $\forall y \in \mathbb{N}.\, D(x, y)$ を $y \in \mathbb{N}$ に関する帰納法で示す．$D(x, 0)$ の証明を作るのは, 簡単である.

問題 7．　実際に $D(x, 0)$ の導出木を作り, そこからラムダ項を抽出せよ．$\mathbb{N}(x)$ を仮定として使ってよいことに注意.

$D(x, y)$ を仮定して $D(x, \mathsf{S}y)$ を示す．仮定は $x < y$ または $y \leq x$ ということなので, 場合分けをする.

問題 8．　仮定 $x < y$ から $x < \mathsf{S}y$ を導け．それを用いて, $x < y$ から $D(x, \mathsf{S}y)$ を導き, ラムダ項を抽出せよ.

$y \leq x$ の場合の処理は, もう一工夫必要である．この論理式は $\exists u \in \mathbb{N}.\, y + u = x$ という意味であった．いま $\mathbb{N}(u)$ と仮定すると, 前に示したように $Q(u)$ が導かれる．すなわち, $0 = u$ または $0 < u$ である.

問題 9．　$0 = u$ と $y + u = x$ を仮定して $x < \mathsf{S}y$ を導け．また, $0 < u$ と $y + u = x$ を仮定して $\mathsf{S}y \leq x$ を導け．これらから $(y \leq x) \Rightarrow D(x, \mathsf{S}y)$ の導出木を作り, ラムダ項を抽出せよ．また, 問題 8 の結果と合わせて, 仮定 $D(x, y)$ から $D(x, \mathsf{S}y)$ を導く導出木が作られる．抽出したラムダ項を求めよ.

以上で $D(x, 0)$ と, $D(x, y)$ から $D(x, \mathsf{S}y)$ を導く導出木が作られた．よって, 帰納法により, 次ができる.

問題 10. $\forall x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}.\, (x < y) \vee (y \leq x)$ の導出木から抽出したラムダ項を求めよ. そのラムダ項を M_1 と書くことにする.

自然数間の引き算 $x - y$ を考える. ただし $x < y$ のときは負になってしまうので, 切り捨てて 0 とみなすことにする. つまり, 公理として

$$\begin{aligned}&\mathsf{sub}(x + y, y) = x\\&(x < y) \Rightarrow \mathsf{sub}(x, y) = 0\end{aligned}$$

の 2 つを考える.

問題 11. $\forall x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}.\, \mathbb{N}(\mathsf{sub}(x, y))$ の証明を与え, ラムダ項を抽出せよ.