解答

1. $\log\sin x^2$ の微分および 2 階微分を求めよ.

(解答) $f(x) = \log\sin x^2$ と置く. このとき $f'(x) = 2x\cot x^2$ および $f''(x) = 2\cot x^2 - 4x^2(1+\cot^2 x^2)$.

2. $x^3/(2x^2-1)$ の不定積分を求めよ.

(解答) 割り算をすると $x/2 + (1/2)\cdot x/(2x^2-1)$ となる. 第二項の積分には $2x^2-1$ を置換すればよい. 答えは, $x^2/4 + (1/8)\log|2x^2-1| + C$.

3. $(\log x)^2$ の原始関数を求めよ.

(解答) まず $\log x$ の原始関数を求めると, $1\cdot\log x$ とみて部分積分することで, $x\log x - x$ となる. そこで $(\log x)^2 = \log x\cdot\log x$ とみて部分積分することで, $(\log x)^2$ の原始関数 (の一つ) $x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x$ が得られる.

4. $f(x) = x^3 - x^2$ は, $x > 2/3$ で逆関数をもつことを示せ. また, その逆関数 f^{-1} の定義域はどうなるか.

(解答) $f'(x) = x(3x-2)$ より, $x > 2/3$ で $f'(x) > 0$ となる. すなわち単調増加となる. 単調増加関数は (グラフを書いてみれば分かるように) 一対一なので, $y = f(x)$ を $x > 2/3$ の範囲に制限すれば, 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在する. またこの範囲で, $y = f(x)$ は $f(2/3) = -4/27$ より大きいすべての実数を取るので, 逆関数 $f^{-1}(y)$ の定義域は $y > -4/27$.

5. 合成関数の微分の公式から, 逆関数の微分の公式を導いてみよ.

(解答) 関数 f とその逆関数 f^{-1} の間には, $f(f^{-1}(x)) = x$ なる関係が成り立つ. この両辺を x で微分すると, 左辺は合成関数の微分の公式より $f'(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))'$ となり, 右辺は 1 となる. これらが等しいと置くことで, $(f^{-1}(x))' = 1/f'(f^{-1}(x))$ が従う.

6. $y = \arctan x$ の $x = 1$ における接線を求めよ.

(解答) まず, $x = 1$ のとき $\arctan x = \pi/4$ である. さらに $y' = 1/(1+x^2)$ より, $y'(1) = 1/2$ である. よって, $y - \pi/4 = (1/2)(x-1)$ すなわち $y = x/2 + (\pi/4 - 1)$ が接線の方程式.

7. 曲線 $y = \dfrac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$, 直線 $x = \sqrt{2}$ および x-軸で囲まれた領域の面積を求めよ.

(解答) 最初の式で与えられる曲線は原点を通り, $0 < x \leq \sqrt{2}$ で正の値を取る. よって,

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

が求める面積となる. $y = \sqrt{1+x^2}$ と置換すると $x/\sqrt{1+x^2} \cdot dx = dy$ であり, y の積分範囲は $[1, \sqrt{3}]$ となる. よって, $\int_1^{\sqrt{3}} 1/(1+y^2) \cdot dy$ と変形される. これは, $[\arctan y]_0^{\sqrt{3}}$ に等しい. $\arctan\sqrt{3} = \pi/3$ および $\arctan 1 = \pi/4$ なので, 求める面積は $\pi/3 - \pi/4 = \pi/12$.

8. $y = x(\log x)^2$ (ただし $x > 0$) のグラフの変曲点を求めよ.

(解答) $y'' = (2/x)(\log x + 1)$ となるので, $y'' = 0$ より $\log x = -1$, すなわち $x = 1/e$ が得られる. $x < 1/e$ で $y'' < 0$ であり, $x > 1/e$ で $y'' > 0$ となって y'' の符号が変わるので, $x = 1/e$ は変曲点である. そのときの y の値はやはり $1/e$ となるので, $(x, y) = (1/e, 1/e)$ が求める変曲点.

9. $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 2}$ が $x = -1$ で極小値 1, および $x = 2$ で極大値 $5/2$ を取るとする. 係数 a, b, c を決定せよ.

(解答) $f'(x) = (-bx^2 + (4a - 2c)x + 2b)/(x^2+2)^2$ となる. $x = -1, 2$ において $f'(x) = 0$ となるのであるから, 分子は $-b(x+1)(x-2)$ に等しくなければならない. 1 次の係数の比較で $4a - 2c = b$ となる. また, $f(-1) = 1$ および $f(2) = 5/2$ より, $a - b + c = 3$ および $4a + 2b + c = 15$ が得られる. これら 3 本の式を連立させて a, b, c を求めると $a = b = 2$, $c = 3$ となる.

10. $z = \log(x^2 + y^2)$ の $(x, y) = (1, 1)$ における接平面を求めよ.

(解答) $\partial z/\partial x = 2x/(x^2+y^2)$ および $\partial z/\partial y = 2y/(x^2+y^2)$ より, $(x, y) = (1, 1)$ においてはこれらの偏微係数はいずれも 1 となる. またこの点で $z = \log 2$ となるので, 求める接平面の方程式は $z - \log 2 = (x-1) + (y-1)$, すなわち $x + y - z = 2 - \log 2$ である.

11. $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ で定まる曲面の $(x, y, z) = (2, 2, 3)$ における接平面を求めよ.

(解答)　x と y を独立変数と見ることにして, $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ の両辺を x で偏微分すると $2z \cdot \partial z/\partial x = 2x$ となる. すなわち $\partial z/\partial x = x/z$ である. 同様に $\partial z/\partial y = y/z$ よって, $(x, y, z) = (2, 2, 3)$ において, これらの偏微係数はいずれも $2/3$ である. よって求める接平面の方程式は, $z - 3 = (2/3)(x - 2) + (2/3)(y - 2)$, すなわち $2x + 2y - 3z + 1 = 0$ である.

12.　$f(x) = \log \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} - \sqrt{1 - x^2}$ を考える. (i) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ. (ii) $y = f(x)$ のグラフを描け.

(解答)　(i) 2 乗根の中身は 0 以上でなければならず, log の中身は正でなければならないので, $0 < x \leq 1$ が定義域となる. (ii) $f'(x) = -\sqrt{1 - x^2}/x$ となって, $0 < x \leq 1$ の範囲で $f'(x) < 0$ なので, $y = f(x)$ のグラフは単調減少である. また, x を右側から 0 に近づけるとき, $f(x) \to +\infty$ である. よって, 左側では y-軸が漸近線となる. また $f(1) = 0$ なので, $(x, y) = (1, 0)$ が右端の点になる. さらに, $f'(1) = 0$ なので, x-軸はこの点において接線となっている. これらを合わせれば, グラフの概形を描くことができよう.

13.　xy-平面において $x = 0, y = 0, x + y = 1$ の 3 直線で囲まれた領域を D とする. D 上での $x^2 + y^2$ の重積分の値を求めよ.

(解答)　D は三角形であって x は 0 から 1 までの値を取り得る. 各 x に対して y の動く範囲は $0 \leq y \leq 1 - x$ である. よって求める重積分は

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 + y^2 \, dy$$

で与えられる. 内側の積分は $[x^2 y + (1/3) \cdot y^3]_{y=0}^{y=1-x}$ を計算して $1/3 - x + 2x^2 - (4/3) \cdot x^3$ となるので, これを 0 から 1 まで x で積分して, $1/6$ が答えとなる.

14.　半径 r の球の体積を求めよ.

(解答)　球の方程式は $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ である. $z \geq 0$ の半球は, $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ で与えられる. xy-平面, すなわち, $z = 0$ においては, $x^2 + y^2 = r^2$ の円となる. よって, この円およびその内部を D として, D 上で $\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ を積分した値が半球の体積である. 求める体積はそれを 2 倍すればよい. 領域 D において x の動く範囲は $-r$ から r までで, その間の各 x に対して, y の動く範囲は $-\sqrt{r^2 - x^2}$ から $\sqrt{r^2 - x^2}$ までである. よって, 半球の体積は

$$\int_{-r}^{r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy$$

で与えられる．内側の積分を求めるために $c = \sqrt{r^2 - x^2}$ と置いてみると, 求める積分は $\int_{-c}^{c} \sqrt{c^2 - y^2}\, dy$ と書くことができる．$y = c \sin\theta$ と置換すると, θ の積分範囲は $[-\pi/2, \pi/2]$ となる．この範囲で $\sqrt{c^2 - y^2} = c\sqrt{1 - \sin^2\theta} = c|\cos\theta| = c\cos\theta$ なので, $dy = c\cos\theta\, d\theta$ とあわせて, $c^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$ となる．実際に計算すると $(\pi/2)c^2$, すなわち $(\pi/2)(r^2 - x^2)$ となるので, これが内側の積分の値である．これを $-r$ から r まで x で積分すると $(2\pi/3)r^3$ が得られる．これが半球の体積なので, 2 倍して球の体積 $(4\pi/3)r^3$ が求まる．