

11月25日 数学II問題

11.1 問題

\mathbb{R}^3 の部分空間として, $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のそれぞれで張られる 3 個の 1 次元空間を W, W', W'' とする. 和空間 $W + W' + W''$ が直和 $W \oplus W' \oplus W''$ であるかどうか判定せよ.

11.2 問題

次の行列を A とするとき, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような P が存在するならば, そのような正則行列 P , および得られる対角行列を求めよ.

(i) $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -21 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} -8 & -6 & -18 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} -6 & 6 & 5 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

11.3 問題

A を n 次正方行列とする. 固有多項式 $\det(\lambda E - A)$ の λ^{n-1} 次の係数は $-\operatorname{tr} A$ であり, 定数項は $(-1)^n \det A$ となることを示せ.

11.4 問題

すべての成分が 1 であるような n 次正方行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と

固有空間を求めよ.

11.5 問題

(i) 正方行列 A が正則でないことと, A が 0 を固有値に持つことは同値となることを示せ.

(ii) ある自然数 m があって, $A^m = O$ となる正方行列 A を冪零行列という. A が冪零行列であることと, A の固有値が 0 のみであることは同値となることを示せ.

11.6 問題

n 次以下の \mathbb{R} 係数の多項式で作る線形空間を V とする.

- (i) 多項式 $f(x)$ を x 軸方向に -1 だけ平行移動する操作は, V 上の線形変換を定める. この線形変換の固有値と固有空間を決定せよ.
- (ii) 多項式 $f(x)$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したとき, 元のグラフと同一になるのはどういふ場合か.

11.7 問題

$A = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}$ とする. $AB = sBA$ を満たす 2×2 行列 $B \neq O$ が存在するためのスカラー s の条件を求め, そのときの B の形を決定せよ.