# 2006 年度 応用数学 XE レポート課題

単純型つきラムダ計算に, 直積型を加えたシステムの強正規化性を証明したい. 型の定義は $\sigma \;::=\; \alpha \mid \sigma \Rightarrow \sigma \mid \sigma \times \sigma \times \cdots \times \sigma$ で拡張し, 項の定義は $M \;::=\; x \mid \lambda x^{\sigma}.M \mid MM \mid (M, M, \ldots, M) \mid M \cdot i$ で拡張する. 新たに付け加える型判定の推論規則は,

$$\frac{\Gamma \;\triangleright\; M_1 : \sigma_1 \quad \Gamma \;\triangleright\; M_2 : \sigma_2 \quad \cdots \quad \Gamma \;\triangleright\; M_n : \sigma_n}{\Gamma \;\triangleright\; (M_1, M_2 \ldots, M_n) : \sigma_1 \times \sigma_2 \times \cdots \times \sigma_n}$$

$$\frac{\Gamma \;\triangleright\; M : \sigma_1 \times \sigma_2 \times \cdots \times \sigma_n}{\Gamma \;\triangleright\; M \cdot i \;: \sigma_i}$$

簡約としては, 通常の $\beta$-簡約に加えて,

$$(M_1, M_2, \ldots, M_n) \cdot i \quad \leadsto \quad M_i$$

を考えるとする.

証明は, reducibility の手法を用いることにする. 新たに付け加える定義として, $M \in \mathit{RED}_{\sigma_1 \times \sigma_2 \times \cdots \times \sigma_n}$ が成り立つのは, $M \cdot i \in \mathit{RED}_{\sigma_i}$ がすべての $i$ に対して成り立つときと定義する. また, neutral な項の定義を拡張して, $x$, $MN$ の形の項に加えて, $M \cdot i$ の形の項も neutral とする.

(i) 必要な補題を適宜拡張した上で, 次を示せ: $M_i \in \mathit{RED}_{\sigma_i}$ がすべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して成り立つならば, $(M_1, M_2, \ldots, M_n) \in \mathit{RED}_{\sigma_1 \times \sigma_2 \times \cdots \times \sigma_n}$ が成り立つ.

(ii) すべての項 $M$ は強正規化性を満たすことを示せ.

参考文献: J.-Y. Girard, *Proofs and Types*, (Cambridge University Press, 1989).