

2006 年度 夏学期 数学講究 XB レポート問題

Church numeral とは, λ 計算を用いた自然数の表現で,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda z \lambda y. z \\ 1 &= \lambda z \lambda y. y z \\ 2 &= \lambda z \lambda y. y (y z) \\ 3 &= \lambda z \lambda y. y (y (y z)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

で定義される. 最大公約数を計算するプログラムを, 次のように λ 項として定義する.

$$\begin{aligned} \text{gcd}(x, y) &= (\pi'((\text{succ } x) \text{ c } s)) x y \\ \text{c} &= \langle 0, \lambda x \lambda y. y \rangle \\ s &= \lambda z. \langle \text{succ}(\pi z), \lambda y. \text{if } (y < \pi z) \text{ then } (\pi' z) y \text{ else } r(\pi z)(\pi' z) \rangle \\ r &= \lambda x \lambda z. \text{if } (x = 0) \text{ then } (\lambda y. y) \text{ else } (\lambda y. z(y \% x) x) \end{aligned}$$

仮定として,

$$\begin{aligned} \text{succ } m &= m + 1 \\ \pi \langle x, y \rangle &= x \\ \pi' \langle x, y \rangle &= y \\ y \% x &= y \text{ を } x \text{ で割った余り} \end{aligned}$$

が成り立っていて, また if-then-else や, 等号判定 $x = 0$, 不等号判定 $x < y$ などが, 普通のとおりに定義されているとする. このとき, Church numeral m, n に対し,

$$\text{gcd}(m, n)$$

が, m と n の最大公約数の Church numeral に, 正しく β -簡約されることを示せ, あるいは, 具体的な m, n に対して実験してみよ.