自然数の負の奇数ベキの無限和の収束とその誤差

城西大学 数理・データサイエンスセンター　大島利雄

1　はじめに

高校数学の教材で [1] に，級数 $A_N = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{N^2}$ の $N \to \infty$ での収束の様子を Geogebra を使って視覚的に見せるというものがあった．それに関連して [2] では，$B_N = A_N + \frac{1}{N + \frac{1}{2}}$ を考えると，単調減少して同じ収束値に近づくので挟み撃ちで収束の様子が分かりやすいのではないか，というコメントとともに，より高次の近似式を与えた．さらにより一般の $A_{k,N} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{N^k}$ に対しても同様の考察が可能なことを述べ，$A_{3,N}$ について高次の近似式を具体的に与えた．

このノートでは $A_{2m+1,N} \quad (m = 1, 2, \ldots)$ に対して高次の近似式を具体的に与える．$A_{2m,N}$ の $N \to \infty$ での収束値 $\zeta(2m)$ は具体的に分かっていること，また，$A_{2m,N}$ の方が高次近似式がより複雑になることから，$A_{2m+1,N}$ のみを考察した．

2　$\zeta(3)$ の場合

最初に $\zeta(3) = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$ の収束とその誤差を調べた [2] を復習する．まず

$$\frac{(k-1)!^2}{n^3(n^2-1)\cdots(n^2-(k-1)^2)} = \frac{(k-1)!^2}{n(n^2-1)\cdots(n^2-k^2)} - \frac{k!^2}{n^3(n^2-1)\cdots(n^2-k^2)} \tag{1}$$

に注意しよう．$k = 1,\, 2$ より

$$\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n(n^2-1)} - \frac{1^2}{n^3(n^2-1)} = \frac{1}{n(n^2-1)} - \frac{1^2}{n(n^2-1)(n^2-2^2)} + \frac{(2!)^2}{n^3(n^2-1)(n^2-2^2)}$$

が得られる．より一般に (1) を帰納的に適用すれば次式が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^3} &= \frac{1}{n(n^2-1)} - \frac{1}{n(n^2-1)(n^2-4)} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!^2}{n(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)} \\ &\quad + (-1)^k \frac{k!^2}{n^3(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)}.\end{aligned} \tag{2}$$

一方，正整数 $k,\, n$ に対して

$$(n)_k := n(n+1)\cdots(n+k-1) \tag{3}$$

とおくと

$$\frac{1}{(n)_k} - \frac{1}{(n+1)_k} = \frac{k}{(n)_{k+1}}$$

であるから, $N \le M$ を満たす自然数 $M,\, N$ に対し

$$\sum_{n=N}^{M} \frac{k}{(n)_{k+1}} = \frac{1}{(N)_k} - \frac{1}{(M+1)_k}, \quad \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(n)_{k+1}} = \frac{1}{k(N)_k}$$

となるので

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-1)\cdots(n^2-k^2)}=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(n-k)_{2k+1}}&=\frac{1}{2k(N-k+1)_{2k}}\\&=\frac{1}{2kN(N+k)(N^2-1^2)\cdots\big(N^2-(k-1)^2\big)}\\&<\frac{1}{2k(N-k+1)^{2k}}\qquad(N\geq k)\end{aligned}\tag{4}$$

が分かる．これを (2) に適用すると，$m\geq k$ ならば

$$(-1)^k\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^3}-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j j!^2}{2(j+1)N(N+j+1)(N^2-1^2)\cdots\big(N^2-j^2\big)}\Big)>0.\tag{5}$$

そこで

$$B_N^{(k)}:=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3}+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j j!^2}{2(j+1)N(N+j+1)(N^2-1^2)\cdots(N^2-j^2)}\tag{6}$$

とおくと, (5) および (5) と (4) の k を $k+1$ に置き換えた式より

$$0<(-1)^k\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}-B_N^{(k)}\Big)<\frac{k!^2}{2(k+1)(N-k)^{2k+2}}\qquad(0\leq k<N)\tag{7}$$

が得られる．

特に $k=2$ とすると

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}-\Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3}+\frac{1}{2N(N+1)}-\frac{1}{4N(N+2)(N^2-1)}\Big)<\frac{2}{3(N-2)^6}\qquad(N>2).$$

たとえば，$\zeta(3)$ と $A_{100}:=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{100^3}$ との差は 5×10^{-5} 程度であるが，4 次までの近似 $A_{100}+\frac{1}{2\times100\times101}-\frac{1}{4\times100\times102\times(10000-1)}$ では，差は 6.5×10^{-13} 程度に小さくなる．

3　$\zeta(2m+1)$ の場合

x が 3 以上の一般の奇数の場合の $\zeta(x)$ について，前節の $\zeta(3)$ と同様な考察をしよう．そのために (2) を一般化した以下の命題を示す．

命題. 正整数 k, m, n に対し

$$F_m(n,k):=\frac{1}{n^{2m+1}(n^2-1^2)(n^2-3^2)\cdots(n^2-k^2)}=\frac{1}{n^{2m}(n-k)_{2k+1}}$$

とおくと，$n>m+k$ のとき

$$\begin{aligned}F_m(n,0)=F_0(n,m)&-K_{m,1}F_0(n,1+m)+K_{m+1,2}F_0(n,2+m)-\cdots\\&+(-1)^kK_{m+k-1,k}F_0(n,k+m)\\&-(-1)^k\Big((1+k)^2K_{k,k}F_m(n,1+k)+\cdots+(m+k)^2K_{k+m-1,k}F_1(n,m+k)\Big),\end{aligned}$$

$$K_{m,k}:=\sum_{\substack{I\subset\{1,2,\dots,m\}\\ \#I=k}}\prod_{i\in I}i^2,\quad K_{m,0}=1\quad(0\leq k\leq m).\tag{8}$$

証明. まず $K_{m,k}$ に対して成り立つ漸化式を示す．すなわち，I の最大元に注目すると

$$\{I \mid I \subset \{1,\dots,m\},\ \#I = k\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{I \cup \{m-i+1\} \mid I \subset \{1,\dots,m-i\},\ \#I = k-1\}$$

が分かるから

$$K_{m,k} = m^2 K_{m-1,k-1} + (m-1)^2 K_{m-2,k-1} + \cdots + (k-1)^2 K_{k-1,k-1}. \tag{9}$$

また

$$F_m(n,k-1) = F_{m-1}(n,k) - k^2 F_m(n,k)$$

より

$$\begin{aligned} F_m(n,0) &= F_0(n,m) - 1^2 F_m(n,1) - 2^2 F_{m-1}(n,2) - \cdots - m^2 F_1(n,m), \\ F_{m-i+1}(n,i+k) &= F_0(n,m+k+1) - (i+k+1)^2 F_{m-i+1}(n,i+k+1) \\ &\quad - (i+k+2)^2 F_{m-i}(n,i+k+2) - \cdots - (m+k+1)^2 F_1(n,m+k+1) \\ &= F_0(n,m+k+1) - \sum_{j=i}^{m} (j+k+1)^2 F_{m-j+1}(n,j+k+1). \end{aligned}$$

ここで (9) に注意すると

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} (i+k)^2 K_{i+k-1,k} F_{m-i+1}(n,i+k) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{m} (i+k)^2 K_{i+k-1,k} \Big(F_0(n,m+k+1) - \sum_{j=i}^{m} (j+k+1)^2 F_{m-j+1}(n,j+k+1) \Big) \\ &\quad = K_{m+k,k+1} F_0(n,m+k+1) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{j} (i+k)^2 K_{i+k-1,k} (j+k+1)^2 F_{m-j+1}(j+k+1) \\ &\quad = K_{m+k,k+1} F_0(n,m+k+1) - \sum_{j=1}^{m} K_{j+k,k+1} (j+k+1)^2 F_{m-j+1}(n,j+k+1). \end{aligned}$$

$K_{i-1,0} = 1$ に注意し, $k = 0,1,2,\dots$ としてこの関係式を順次適用すると

$$\begin{aligned} F_m(n,0) &= F_0(n,m) - \sum_{i=1}^{m} i^2 K_{i-1,0} F_{m-i+1}(n,i) \\ &= F_0(n,m) - K_{m,1} F_0(n,m+1) + \sum_{i=1}^{m} (i+1)^2 K_{i,1} F_{m-i+1}(n,i+1) \\ &= F_0(n,m) - K_{m,1} F_0(n,m+1) + K_{m+1,2} F_0(n,m+2) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{m} (i+1)^2 K_{i+1,2} F_{m-i+1}(n,i+2) = \cdots \\ &= F_0(n,m) - K_{m,1} F_0(n,1+m) + K_{m+1,2} F_0(n,2+m) - \cdots \\ &\quad + (-1)^k K_{m+k-1,k} F_0(n,k+m) \\ &\quad - (-1)^k \Big((1+k)^2 K_{k,k} F_m(n,1+k) + \cdots + (m+k)^2 K_{k+m-1,k} F_1(n,m+k) \Big). \end{aligned}$$

よって命題が示された.

前節 (4) で示したように

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} F_0(n,m+k) = \frac{1}{2(m+k)N(N+m+k)(N^2-1^2)(N^2-2^2)\cdots(N^2-(m+k-1)^2)}$$

であるから, 前節と同様にして

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+1}} = \frac{1}{2m(N-m+1)_{2m}} - \frac{K_{m,1}}{2(m+1)(N-m)_{2(m+1)}} + \cdots$$
$$+ (-1)^k \frac{K_{m+k-1,k}}{2(m+k)(N-m-k+1)_{2(m+k)}} - (-1)^k \sum_{n=N}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} \frac{(k+j)^2 K_{k+j-1,k}}{(n-k-j+1)_{2(k+j+1)}}$$

を得る．よって

定理. 整数 k, m, N が $1 \le m \le m+k \le N$ を満たすとき，以下が成り立つ（cf. (8)）.

$$0 < (-1)^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+1}} - \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2m+1}} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j K_{m+j-1,j}}{2(m+j)(N-m-j+1)_{2(m+j)}} \right) \right)$$
$$< \frac{K_{m+k-1,k}}{2(m+k)(N-m-k+1)_{2(m+k)}}$$

$m=1$ とすると $K_{m+j-1,j} = j!^2$ であるから，前節の結果 (7) に一致する．
$m=2$ の場合に $k=0$, 1, 2 とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^5} + \frac{1}{4N(N+2)(N^2-1^2)},$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^5} + \frac{1}{4N(N+2)(N^2-1^2)} - \frac{1^2+2^2\,(=5)}{6N(N+3)(N^2-1^2)(N^2-2^2)}$$
$$< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^5} + \frac{1}{4N(N+2)(N^2-1^2)} - \frac{1^2+2^2\,(=5)}{6N(N+3)(N^2-1^2)(N^2-2^2)}$$
$$+ \frac{1^2\cdot 2^2 + 1^2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3^2\,(=49)}{8N(N+4)(N^2-1^2)(N^2-2^2)(N^2-3^3)} \qquad (N>3).$$

4　再び $\zeta(3)$

(2) で，n を $n+\frac{1}{2}$ に置き換えると

$$\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^3} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^j (j-1)!^2}{(n+\frac{1}{2})((n+\frac{1}{2})^2-1)\cdots((n+\frac{1}{2})^2-j^2)}$$
$$+ \frac{(-1)^k k!^2}{(n+\frac{1}{2})^3((n+\frac{1}{2})^2-1)\cdots((n+\frac{1}{2})^2-k^2)},$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^j (j-1)!^2}{(n+\frac{1}{2}-j)_{2j+1}} + \frac{(-1)^k k!^2}{(n+\frac{1}{2})^2 (n+\frac{1}{2}-j)_{2k+1}},$$

$$\frac{1}{(n+\frac{1}{2}-j)_{2j+1}} = \frac{1}{2j}\Big(\frac{1}{(n+\frac{1}{2}-j)_{2j}} - \frac{1}{(n+1+\frac{1}{2}-j)_{2j}}\Big)$$

であるから

$$(-1)^k\Big(\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^3} + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-1)^j(j-1)!^2}{2j(N+\frac{1}{2}-j)_{2j}}\Big) > 0.$$

一方

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^3} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{1}{8}\zeta(3) + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^3},$$

$$\zeta(3) = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^3}.$$

よって

$$(-1)^k\Big(\zeta(3) - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{7(n+\frac{1}{2})^3} + \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j(j-1)!^2}{14j(N+\frac{1}{2}-j)_{2j}}\Big) > 0,$$

$$\frac{(-1)^j(j-1)!^2}{14j(N+\frac{1}{2}-j)_{2j}} = \frac{(-1)^j(j-1)!^2}{14j\big(N^2-(\frac{1}{2})^2\big)\big(N^2-(\frac{3}{2})^2\big)\cdots\big(N^2-(j-\frac{1}{2})^2\big)}.$$

5 近似誤差

最後に，§4 の高次補正を用いたときの，真の値との誤差を調べた表を以下に載せます．

表は，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ という無限和を 1000 項まで計算したとき，$\zeta(3)$ と小数点以下 6 桁程度合うが（誤差が 10^{-6} 未満 10^{-7} 以上），その値に 10 項の高次補正を行うと $\zeta(3)$ とは小数点以下 54 桁程度合う，ということを示す（$\zeta(3)^*$ は前節での近似式を使った場合）．

近似誤差の表

N	$N=10$				$N=100$					$N=1000$					
補正項	0	1	2	5	0	1	2	10	50	0	1	2	10	100	500
$\zeta(3)$	2	4	5	9	4	8	12	32	72	6	12	18	54	292	721
$\zeta(3)^*$	3	5	7	9	5	9	13	33	75	7	13	19	55	293	722
$\zeta(5)$	4	6	7	9	8	12	15	34	75	12	18	23	57	294	721

参考文献

[1] 細谷大輔, 岡田 裕紀, 鈴木 雄大, Basel problem visualized by GeoGebra, 城西大学数学科数学教育紀要 **2**(2020), 1–7.

[2] 大島利雄，Basel 問題の収束に関する一考察，数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究，数理解析研究所講究録 **2178**(2021), 77–82.