三角関数の恒等式

大島利雄（東京大学大学院数理科学研究科）

2008 年 1 月 13 日

以下の三角関数の恒等式について，自然な／面白い証明は？

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{\nu\in\{1,\dots,n\}} \sin(x_k - y_\nu)}{\prod_{\nu\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} \sin(x_k - x_\nu)} = \sin\Bigl(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu\Bigr) \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{\nu\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} \frac{\sin(y_j - x_\nu)}{\sin(x_k - x_\nu)} \prod_{\nu\in\{1,\dots,n\}\setminus\{j\}} \frac{\sin(x_k - y_\nu)}{\sin(y_j - y_\nu)} = \delta_{i,j} \quad (1 \le i,\, j \le n) \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(x_k + s)\cdot\sin(x_k + t)\cdot \prod_{\nu\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} \frac{\sin(x_k + x_\nu + 2u)}{\sin(x_k - x_\nu)} \tag{3}$$

$$= \begin{cases} \sin\Bigl(nu + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\Bigr)\cdot \sin\Bigl(s + t + (n-2)u + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\Bigr) & \text{if} \ \ n = 2m \\ \sin\Bigl(s + (n-1)u + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\Bigr)\cdot \sin\Bigl(t + (n-1)u + \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\Bigr) & \text{if} \ \ n = 2m+1 \end{cases}$$

注意. i)　これらの等式は，微分方程式の理論を使って証明できるが，(1) については複素関数論による別の証明が 2 種類得られている．

ii)　等式の面白い解釈があるとうれしい．

iii)　楕円関数への何らかの拡張はあるか？