Basel 問題の収束に関する一考察

大島利雄

Toshio Oshima

城西大学 理学部

Faculty of Science, Josai University

0. はじめに

2020 年 2 月 29 日に城西大で開催予定であった第 2 回数学教育セミナー「TEX による教材作成」は，新型コロナウイルス感染症対応を考慮し，中止となった．発表予定であった [2] に，高校での教材として級数 $A_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}$ の $m \to \infty$ での収束の様子を `Geogebra` を使って視覚的に見せるものがあった．すなわち，開き角 $\frac{A_m}{\pi}$ の扇形を xy 平面の第一象限に，中心を原点，一辺を x 軸上に固定して，$m = 1, 2, 3, \ldots$ と表示していくものであった．

今回の 2020 年 11 月末の集会で，同様のものを `KeTCindyJS` を使って実装し，Web 上から見られるように公開するという高遠節夫氏の発表があった．私は，以下の B_m を用いた上からの評価も合わせて見られるようにすると分かりやすいのでないか，と提言し，実際それを取り入れたものが集会期間中に Web 上で公開された．このノートは，その際の考察をまとめたものである．

1. 上からの評価

上に述べたことは以下のことである．すなわち

$$\begin{aligned} A_m := \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} < S_N &:= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \\ &\leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m+\frac{1}{2}} - \frac{1}{N+\frac{1}{2}} \\ &< B_m := \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m+\frac{1}{2}} \qquad (1 \leq m < N) \end{aligned}$$

としておいて A_m と B_m に対応するもの（それを π で割ったもの）を $m = 1, 2, \ldots$ について図示するとよいのではないか（後者は赤で示すとかする．$\{A_m\}$ は単調増加, $\{B_m\}$ は単調減少で，収束の様子が分かる），という提言を行った．

$m = 1$ とすると $1 < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3} = 1.66\cdots$，$m = 2$ とすると $\frac{5}{4} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < \frac{33}{20} = 1.65$, $B_3 = \frac{415}{252} = 1.6468\cdots$，$B_4 = \frac{79}{48} = 1.6458\cdots$．なお，$\frac{79}{8}$ は既に π^2 のよい近似値で，誤差は 0.055% 以下となる．

ここで

$$A_m < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449340668482\cdots < B_m, \tag{1}$$

$$\frac{1}{m+1} < \frac{\pi^2}{6} - A_m < \frac{1}{m+\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{12(m+1)^3} < B_m - \frac{\pi^2}{6} < \frac{1}{12(m-\frac{1}{2})^3}. \tag{3}$$

最後の不等式は

$$\frac{1}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})} - \frac{1}{n^2} = \frac{\frac{1}{4}}{n^2(n^2-\frac{1}{4})} \begin{cases} < \frac{1}{4(n-\frac{1}{2})^4}, \\ > \frac{1}{4n^4}, \end{cases} \tag{4}$$

$$\int_{m+1}^{\infty} \frac{dt}{4t^4} < B_m - \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \Big(\frac{1}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})} - \frac{1}{n^2} \Big) < \int_m^{\infty} \frac{dt}{4(t-\frac{1}{2})^4}$$

から分かる．

$m = 100$ とすると，$\frac{\pi^2}{6}$ を近似する A_m の誤差は 10^{-2} 程度（実際は，約 0.995×10^{-2}) であるが，B_m では 10^{-7} 以下（実際は，約 0.82×10^{-7}）である

2. 高次の近似

さらに各項の近似誤差 $\frac{\frac{1}{4}}{n^2(n^2-\frac{1}{4})}$ に対して，同様な考察をしてみよう．

$$\frac{1}{(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})} - \frac{1}{n^2(n^2-\frac{1}{4})} = \frac{\frac{9}{4}}{n^2(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})},$$

$$\frac{1}{(n-\frac{3}{2})(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})} - \frac{1}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})} = \frac{3}{(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{12}}{(n-\frac{3}{2})(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})} + \frac{\frac{1}{12}}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})} \\ &\quad + \frac{\frac{9}{16}}{n^2(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})}, \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m+\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{12}}{(m-\frac{1}{2})(m+\frac{1}{2})(m+\frac{3}{2})} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\frac{9}{16}}{n^2(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})} \tag{5}$$

であるから

$$C_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m+\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{12}}{(m^2-\frac{1}{4})(m+\frac{3}{2})} \tag{6}$$

とおくと，誤差は $\frac{9}{16} \times \frac{1}{5} \times m^{-5} \doteqdot 0.11 \times m^{-5}$ 程度と考えられる．実際 $0 < \frac{\pi^2}{6} - C_{100} = 1.09\cdots \times 10^{-11}$ となる．このような考察は，さらに続けていって近似の精度を上げていくことができる．すなわち

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(n^2-\frac{1^2}{4})(n^2-\frac{3^2}{4})\cdots(n^2-\frac{(2k+1)^2}{4})} - \frac{1}{n^2(n^2-\frac{1^2}{4})\cdots(n^2-\frac{(2k-1)^2}{4})} \\ &= \frac{\frac{(2k+1)^2}{4}}{n^2(n^2-\frac{1^2}{4})\cdots(n^2-\frac{(2k+1)^2}{4})}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(n-\frac{2k+1}{2})(n-\frac{2k-1}{2})\cdots(n+\frac{2k-1}{2})}-\frac{1}{(n-\frac{2k-1}{2})\cdots(n+\frac{2k-1}{2})(n+\frac{2k+1}{2})}\\
&\quad=\frac{2k+1}{(n^2-\frac{1^2}{4})(n^2-\frac{3^2}{4})\cdots(n^2-\frac{(2k+1)^2}{4})}
\end{aligned}
$$

より, $(2k+1)!!=1\cdot3\cdots(2k-1)\cdot(2k+1)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n^2}&=\frac{1}{(n^2-\frac{1^2}{4})}-\frac{\frac{1^2}{4}}{(n^2-\frac{1^2}{4})(n^2-\frac{3^2}{4})}+\cdots+\frac{(-1)^k\cdot\frac{1^2}{4}\frac{3^2}{4}\cdots\frac{(2k-1)^2}{4}}{(n^2-\frac{1^2}{4})(n^2-\frac{3^2}{4})\cdots(n^2-\frac{(2k+1)^2}{4})}\\
&\quad-(-1)^k\frac{\frac{1^2}{4}\frac{3^2}{4}\cdots\frac{(2k+1)^2}{4}}{n^2(n^2-\frac{1^2}{4})\cdots(n^2-\frac{(2k+1)^2}{4})}\\
&=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{\frac{((2j-1)!!)^2}{4^j}}{(n^2-\frac{1^2}{4})\cdots(n^2-\frac{(2j+1)^2}{4})}-(-1)^k\frac{\frac{((2k+1)!!)^2}{4^{k+1}}}{n^2(n^2-\frac{1^2}{4})\cdots(n^2-\frac{(2k+1)^2}{4})},\\
\sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{n^2}&=\sum_{n=m+1}^{N}\Bigg(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{((2j-1)!!)^2}{4^j(2j+1)}\Big(\frac{1}{(n-\frac{2j+1}{2})(n-\frac{2j-1}{2})\cdots(n+\frac{2j-1}{2})}\\
&\quad-\frac{1}{(n-\frac{2j-1}{2})\cdots(n+\frac{2j-1}{2})(n+\frac{2j+1}{2})}\Big)-(-1)^k\frac{\frac{((2k+1)!!)^2}{4^{k+1}}}{n^2(n^2-\frac{1^2}{4})\cdots(n^2-\frac{(2k+1)^2}{4})}\Bigg)\\
&=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{((2j-1)!!)^2}{4^j(2j+1)}\Big(\frac{1}{(m-\frac{2j-1}{2})\cdots(m+\frac{2j-1}{2})(m+\frac{2j+1}{2})}\\
&\quad-\frac{1}{(N-\frac{2j-1}{2})\cdots(N+\frac{2j-1}{2})(N+\frac{2j+1}{2})}\Big) \qquad (7)\\
&\quad-(-1)^k\sum_{n=m+1}^{N}\frac{\frac{((2k+1)!!)^2}{4^{k+1}}}{n^2(n^2-\frac{1^2}{4})\cdots(n^2-\frac{(2k+1)^2}{4})},\\
A_m^{(k)}&:=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}+\sum_{j=0}^{k}\frac{((2j-1)!!)^2}{4^j(2j+1)(m^2-\frac{1^2}{4})(m^2-\frac{3^2}{4})\cdots(m^2-\frac{(2j-1)^2}{4})(m+\frac{2j+1}{2})} \qquad (8)\\
&=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m+\frac{1}{2}}-\frac{1}{12(m^2-\frac{1}{4})(m+\frac{3}{2})}+\frac{9}{80(m^2-\frac{1}{4})(m^2-\frac{9}{4})(m+\frac{5}{2})}\\
&\quad+\cdots+(-1)^k\frac{((2k-1)!!)^2}{4^k(2k+1)(m^2-\frac{1^2}{4})\cdots(m^2-\frac{(2k-1)^2}{4})(m+\frac{2k+1}{2})},\\
0&<(-1)^{k+1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-A_m^{(k)}\Big)<\frac{((2k+1)!!)^2}{4^{k+1}(2k+3)(m-k-\frac{1}{2})^{2k+3}}\quad(-1\le k<m). \qquad (9)
\end{aligned}
$$

3. 一般の整数べきの場合

一般の整数べきでは, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}}$ $(k=1,2,\ldots)$ のときは, $(n+\frac{j}{2})(n-\frac{j}{2})\le n^2$ より

$$
\frac{k}{n^{k+1}}\le\frac{k}{(n+\frac{k}{2})(n+\frac{k}{2}-1)\cdots(n-\frac{k}{2})}=\frac{1}{(n+\frac{k}{2}-1)\cdots(n-\frac{k}{2})}-\frac{1}{(n+\frac{k}{2})\cdots(n-\frac{k}{2}+1)}
$$

$(n > \frac{k}{2})$ を使うとよい．これにより

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} < \frac{1}{k(m+\frac{k}{2})(m+\frac{k}{2}-1)\cdots(m-\frac{k}{2}+1)} \qquad (m \geq \tfrac{k}{2})$$

という評価が得られる．

さらに，$k=2$ のときと同様に，より高速に収束する近似式を求めることができる．

たとえば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ では

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n^2-1)} - \frac{1}{n^3} &= \frac{1}{n^3(n^2-1)}, \\
\frac{1}{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)} - \frac{1}{n^3(n^2-1^2)} &= \frac{2^2}{n^3(n^2-1)(n^2-2^2)}, \\
\frac{(k-1)!^2}{n(n^2-1)\cdots(n^2-k^2)} - \frac{(k-1)!^2}{n^3(n^2-1)\cdots(n^2-(k-1)^2)} &= \frac{k!^2}{n^3(n^2-1)\cdots(n^2-k^2)}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^3} &= \frac{1}{n(n^2-1)} - \frac{1}{n(n^2-1)(n^2-4)} + \cdots \\
&\quad + (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!^2}{n(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)} + (-1)^k \frac{k!^2}{n^3(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)}, \\
\sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{n^3} &= \sum_{n=m+1}^{N}\Bigg(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\Big(\frac{(j-1)!^2}{2j(n-j)(n-j+1)\cdots(n+j-1)} \\
&\quad - \frac{(j-1)!^2}{2j(n-j)(n-j+1)\cdots(n+j)}\Big) + (-1)^k\frac{k!^2}{n^3(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)}\Bigg) \\
&= \sum_{j=1}^{k}\Big(\frac{(-1)^{j-1}(j-1)!^2}{2j(m^2-1^2)\cdots(m^2-(j-1)^2)m(m+j)} \\
&\quad - \frac{(-1)^{j-1}(j-1)!^2}{2j(N^2-1^2)\cdots(N^2-(j-1)^2)N(N+j)}\Big) + \sum_{n=m+1}^{N}\frac{(-1)^k k!^2}{n^3(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)}, \\
B_m^{(k)} &:= \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^3} + \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}(j-1)!^2}{2j(m^2-1^2)\cdots(m^2-(j-1)^2)m(m+j)} \\
&= \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{2m(m+1)} - \frac{1}{4(m^2-1)m(m+2)} + \frac{2}{3(m^2-1)(m^2-2^2)m(m+3)} \\
&\quad + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{2k(m^2-1^2)\cdots(m^2-(k-1)^2)m(m+k)}, \\
0 <& (-1)^k\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} - B_m^{(k)}\Big) < \frac{k!^2}{2(k+1)(m-k)^{2k+2}} \qquad (0 \leq k < m).
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\frac{k!^2}{2(k+1)(m-k)^{2k+2}} \sim \frac{2\pi k(\frac{k}{e})^{2k}}{2(k+1)(m-k)^{2k+2}} = \frac{\pi k}{(k+1)(m-k)^2}\left(\frac{k}{e(m-k)}\right)^{2k}$$
$$= \frac{\pi}{k(k+1)}\frac{1}{e^{2k}k^{2k}} \quad (\Leftarrow m = k^2+k) \ \sim 4.3\times 10^{-491} \quad (\Leftarrow k=100).$$

4. 整数べきでないとき

整数べきでないときは, $A \geq B > 0$ とすると

$$A - B = \frac{A^N - B^N}{A^{N-1} + A^{N-2}B + \cdots + B^{N-1}} \geq \frac{A^N - B^N}{NA^{N-1}}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt[N]{(n+\frac{k}{2}-1)\cdots(n-\frac{k}{2})}} - \frac{1}{\sqrt[N]{(n+\frac{k}{2})\cdots\cdots(n-\frac{k}{2}+1)}} = \frac{\sqrt[N]{n+\frac{k}{2}} - \sqrt[N]{n-\frac{k}{2}}}{\sqrt[N]{(n+\frac{k}{2})\cdots(n-\frac{k}{2})}} \\
&\geq \frac{k}{N\sqrt[N]{(n+\frac{k}{2})\cdots(n-\frac{k}{2})\cdot(n+\frac{k}{2})^{N-1}}} \\
&\geq \frac{k}{N\left(n+\frac{k(N-1)}{2(N+k)}\right)^{\frac{k}{N}+1}} \quad (\because \text{相加平均} \geq \text{相除平均}) \\
&\geq \frac{k}{N(n+\frac{k}{2})^{\frac{k}{N}+1}} \quad (\text{より簡単}).
\end{aligned}$$

よって（簡単な方を使うと）, N と k を正整数とするとき

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{k}{N}+1}} < \frac{N}{k\sqrt[N]{m(m-1)\cdots(m-k+1)}} \leq \frac{N}{k}(m-k+1)^{-\frac{k}{N}}. \tag{11}$$

最初の（よりよい）評価からは

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{k}{N}+1}} < \frac{N}{k\sqrt[N]{\left(m+\frac{k(k+1)}{2(N+k)}\right)\left(m+\frac{k(k+1)}{2(N+k)}-1\right)\cdots\left(m+\frac{k(k+1)}{2(N+k)}-(k-1)\right)}}. \tag{12}$$

なお，$a > b \geq 0$ のとき，$\frac{1}{n^{a+1}} \leq \frac{1}{n^{b+1}}$ となることを, 残余項の評価に使ってもよい．一方

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+1}} < \int_m^{\infty} \frac{dt}{t^{a+1}} = \frac{1}{am^a}. \tag{13}$$

5. 一般の有理式の場合

一般に，$f(x)$, $g(x)$ は x の多項式で，次数は $g(x)$ の方が $f(x)$ より k だけ大きいとし，$k \geq 2$ とする．自然数 n において $g(n) \neq 0$ であるなら, 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

は収束するが，その無限和の近似を同様に考察することができる．すなわち，まず

$$\frac{g(x)}{f(x)} \sim cx^k(1+a_1x^{-1}+a_2x^{-2}+\cdots) \qquad (x\to\infty)$$

とおく．

$$x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots=\prod_{\nu=0}^{k-1}(x+\tfrac{a_1}{k}-\tfrac{k-1}{2}+\nu)+(b_0x^{k-2}+\cdots)$$

であるから，n が十分大きいときに，$\dfrac{f(n)}{g(n)}$ を $\dfrac{1}{c\prod_{\nu=0}^{k-1}(n+\frac{a_1}{k}-\frac{k-1}{2}+\nu)}$ で置き換えた級数で近似する．近似の各項の誤差は，やはり n の有理式なので，この近似は複数回繰り返して深くしていくことができる．

6. π^2 に収束するある数列

以下は，集会の際に π^2 に収束する数列の例として触れたので，記しておく．すなわち

$$\begin{aligned}&c_0=1,\quad c_k=\frac{c_{k-1}}{3!}-\frac{c_{k-2}}{5!}+\frac{c_{k-3}}{7!}-\cdots-\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}c_0 \quad (k=1,2,\ldots),\\ &\pi^2=\lim_{k\to\infty}\frac{c_{k-1}}{c_k}.\end{aligned} \tag{14}$$

ここで，B_k を Bernoulli 数とすると

$$c_k=\frac{2^{2k}-2}{(2k)!}B_k,\quad \sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{2k}=\frac{z}{\sin z}.$$

(14) は，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k+\frac{2}{z-\pi^2}$ の収束半径が π^2 より真に大きいことから分かる．

なお，(14) は [1] で使われている．

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 JP18K02948 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Oshima, T., On analytic equivalence of glancing hypersurfaces, Sci. Ppaer College Ge. Ed. Univ. Tokyo **28**(1978), 51–57.

[2] 細谷大輔, 岡田 裕紀, 鈴木 雄大, Basel problem visualized by GeoGebra, 城西大学数学科数学教育紀要 **2**(2020), 1–7.