

Fuchs 型方程式の接続問題

Connection problem on Fuchsian differential equations

大島利雄

TOSHIO OSHIMA

城西大学 理学部

FACULTY OF SCIENCE, JOSAI UNIVERSITY

Abstract

We explain the connection problem on Fuchsian ordinary differential equations and give a key idea to obtain the connection formula in the rigid case, which was studied in [7]. Some extended results at present and related topics are also given.

1 一般階微分と超幾何関数

λ を正則パラメータとする超関数 x_+^λ は $\operatorname{Re} \lambda > 0$ のとき $x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ という連続関数

となり, λ が負の整数のときに 1 位の極を持つ. $\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ は $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ について正則となり, 特に λ が負の整数 $-k$ のときは $\delta^{(k-1)}(x)$ となる. n 階の導関数は

$$\frac{d^n}{dx^n} x_+^\lambda = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)x_+^{\lambda-n} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)} x_+^{\lambda-n}$$

となる.

$x \geq 0$ に台を持つ超関数 $u(x)$ と $\frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}$ との合成積を $I_\mu u$ とおく. $u(x)$ が連続関数で $\operatorname{Re} \mu > 0$ のときは

$$I_\mu u(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x u(t)(x-t)^{\mu-1} dt \quad (x \geq 0)$$

となる. μ が負の整数のとき $I_\mu u$ は u の $-\mu$ 階微分であり

$$I_\mu x_+^\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} x_+^{\lambda+\mu} \quad (1.1)$$

が成立する. 実際 $\operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Re} \mu > 0, x \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} I_\mu u(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x t^\lambda (x-t)^\mu \frac{dt}{t} = \frac{x^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 s^\lambda (1-s)^\mu \frac{ds}{s} \quad (t = xs) \\ &= \frac{x^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\mu)} B(\lambda+1, \mu) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} x_+^{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

を得るので、これをパラメータについて解析接続すれば (1.1) が分かる。

$I_\mu u(x)$ は $u(x)$ の一般 $(-\mu)$ 階微分と考えられ、 $I_\mu \circ I_{\mu'} = I_{\mu+\mu'}$ が成り立つ。べき函数の積 $x_+^\lambda(1-x)_+^{\lambda'}$ の“一般階微分”を考えよう。 $(1-x)^{\lambda'}$ を原点で Taylor 展開して (1.1) を使うと

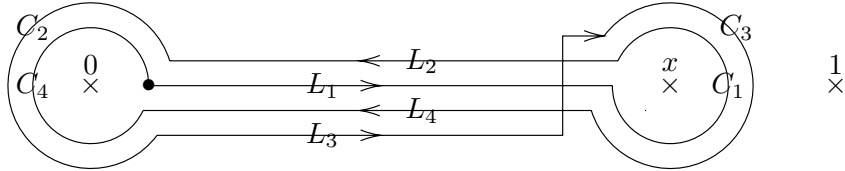
$$\begin{aligned} I_\mu(x_+^\lambda(1-x)_+^{\lambda'}) &= I_\mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda')(\lambda'-1)\cdots(\lambda'-k+1)(-1)^k}{k!} x_+^{k+\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda')_k}{k!} \frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{\Gamma(\lambda+k+\mu+1)} x_+^{\lambda+k+\mu} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(\lambda+1)_k (-\lambda')_k}{(\lambda+\mu+1)_k k!} x^k \right) x_+^{\lambda+\mu} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} x_+^{\lambda+\mu} F(\lambda+1, -\lambda', \lambda+\mu+1; x) \end{aligned}$$

となるので、**Gauss の超幾何函数** $F(\alpha, \beta, \gamma; x)^{*1}$ の積分表示が得られる。

同様な考察を複素領域で考えてみよう。 $[0, 1]$ の複素近傍 U に対し $U' = U \setminus \{0, 1\}$ の普遍被覆を \tilde{U}' とする。 \tilde{U}' 上の正則関数 $u(x)$ に対して、以下の複素積分を $\tilde{I}_\mu u(x)$ を考える。

$$\tilde{I}_\mu u(x) = \int^{(+x, +0, -x, -0)} u(z)(x-z)^{\mu-1} dz \quad (1.2)$$

ここで積分路 $(+x, +0, -x, -0)$ は $\bullet \rightarrow L_1 \rightarrow C_1 \rightarrow L_2 \rightarrow C_2 \rightarrow L_3 \rightarrow C_3 \rightarrow L_4 \rightarrow C_4 \rightarrow \bullet$ と以下の図で辿る **Pochhammer の路**であり、 $\tilde{I}_\mu u(x)$ は \tilde{U}' 上の正則関数となる^{*2}。



L_1, \dots, L_4 を $(0, x)$ に重ねると、そこで被積分関数の値は

$$\begin{aligned} L_1 : u(t)(x-t)^{\mu-1} & & L_2 : e^{2\pi i \mu} u(t)(x-t)^{\mu-1} \\ L_3 : e^{2\pi i \mu} u(e^{2\pi i} t)(x-t)^{\mu-1} & & L_4 : u(e^{2\pi i} t)(x-t)^{\mu-1} \end{aligned}$$

となるので、 $\operatorname{Re} \mu > 0$ で $u(e^{i\theta} t)$ が $(t, \theta) \in [0, 1) \times [0, 2\pi]$ 上の連続関数になるときは

$$\tilde{I}_\mu u(x) = \int_0^x (1 - e^{2\pi i \mu})(u(t) - u(e^{2\pi i} t))(x-t)^{\mu-1} dt \quad (1.3)$$

となる。特に $u(x) = x^\lambda(1-x)^{\lambda'}$ とおくと $u(e^{2\pi i} t) = e^{2\pi i \lambda} u(t)$ であるから

$$\tilde{I}_\mu(x^\lambda(1-x)^{\lambda'}) = (1 - e^{2\pi i \lambda})(1 - e^{2\pi i \mu}) \int_0^x t^\lambda(1-t)^{\lambda'}(x-t)^{\mu-1} dt$$

^{*1} $F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k (1)_k} x^k$ および、 $(\lambda)_k = (\lambda)(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)$ である。

^{*2} μ が正整数の時は、 $(x-t)^{\mu-1}$ を $(x-t)^{\mu-1} \log(x-t)$ で置き換えた積分が well-defined となる。

$$= -\frac{4\pi e^{\pi i(\lambda+\mu)} \sin \pi \lambda}{\Gamma(1-\mu)} I_\mu(x_+^\lambda (1-x)^{\lambda'})$$

となる.

$\operatorname{Re} C > 0, \operatorname{Re} \mu > 0, m > 0, \lambda \in \mathbb{C}, x \geq 0$ とすると

$$\begin{aligned} I_\mu(x_+^\lambda e^{-\frac{C}{x^m}}) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x t^{\lambda+1} e^{-\frac{C}{t^m}} (x-t)^{\mu-1} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{x^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 s_1^{\lambda+1} e^{-\frac{C}{x^m s_1^m}} (1-s_1)^{\mu-1} \frac{ds_1}{s_1} \quad (t = x s_1) \\ &= \frac{x^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\mu)} \int_1^\infty s_2^{-\lambda-\mu} e^{-\frac{C s_2^m}{x^m}} (s_2-1)^{\mu-1} \frac{ds_2}{s_2} \quad (s_1 = \frac{1}{s_2}) \\ (s = s_2^m - 1) &= \frac{x^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\mu)} e^{-\frac{C}{x^m}} \int_0^\infty e^{-\frac{C s}{x^m}} (s+1)^{-\frac{\lambda+\mu}{m}-1} \left((s+1)^{\frac{1}{m}} - 1 \right)^{\mu-1} \frac{ds}{m} \end{aligned}$$

となる. $\alpha, A \in \mathbb{C}$ に対し, $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} A > 0$ ならば

$$\int_0^\infty e^{-As} s^\alpha \frac{ds}{s} = A^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-As} (As)^\alpha \frac{d(As)}{As} = \Gamma(\alpha) A^{-\alpha}$$

である. よって, $m = 1$ のときは $A = \frac{C}{x}, \alpha = \mu + k$ とおいて

$$\begin{aligned} I_\mu(x_+^\lambda e^{-\frac{C}{x}}) &= \frac{x^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\mu)} e^{-\frac{C}{x}} \int_0^\infty e^{-\frac{Cs}{x}} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (\lambda + \mu + 1)_k}{k!} s^{\mu+k} \frac{ds}{s} \\ &\sim \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\lambda + \mu + k + 1) \Gamma(\mu + k) (-1)^k}{\Gamma(\lambda + \mu + 1) \Gamma(\mu) C^{\mu+k} k!} x^{\lambda+2\mu+k} \right) e^{-\frac{C}{x}} \quad (x \rightarrow +0) \end{aligned}$$

という漸近展開が成り立つことが分かる. 一般には

$$\begin{aligned} I_\mu(x_+^\lambda e^{-\frac{C}{x^m}}) &= \frac{x^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\mu)} e^{-\frac{C}{x^m}} \int_0^\infty e^{-\frac{Cs}{x^m}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\frac{\lambda+\mu}{m} + k + 1)}{\Gamma(\frac{\lambda+\mu}{m} + 1)} (-s)^k \left(\sum_{j=1}^\infty \frac{\Gamma(-\frac{1}{m} - j)}{\Gamma(-\frac{1}{m})} (-s)^j \right)^{\mu-1} \frac{ds}{m} \\ &\sim \frac{x^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\mu)} e^{-\frac{C}{x^m}} \int_0^\infty e^{-\frac{Cs}{x^m}} s^\mu \frac{ds}{m^\mu s} = (mC)^{-\mu} x^{\lambda+(m+1)\mu} e^{-\frac{C}{x^m}} \quad (x \rightarrow +0) \end{aligned}$$

という漸近挙動が得られる.

$x = 1$ でも特異点を持っている函数を考えよう.

$$\frac{d^n}{dx^n} (1-x)_+^\lambda = (-\lambda)(-\lambda+1)\cdots(-\lambda+n-1)(1-x)_+^\lambda = \frac{\Gamma(-\lambda+n)}{\Gamma(-\lambda)} (1-x)_+^{\lambda-n}$$

となるが, “ $(-\mu)$ 階微分” を考えると, I_μ は超局所作用素であって, 上を拡張した

$$I_\mu(Y(x)(1-x)_+^\lambda) \equiv \frac{\Gamma(-\lambda-\mu)}{\Gamma(-\lambda)} (1-x)_+^{\lambda+\mu} \pmod{\mathcal{O}_1} \quad (1.4)$$

が成り立つ*3. ここで, $Y(x)$ は Heaviside 函数, \mathcal{O}_c は点 $c \in \mathbb{C}$ の近傍での正則関数の空間とする.

$(0, 1)$ で解析的でない函数においても以下が成り立つ.

*3 $x \in (0, 1) \Rightarrow I_\mu(Y(x)(1-x)_+^\lambda) = \frac{\Gamma(-\lambda-\mu)}{\Gamma(-\lambda)} (1-x)_+^{\lambda+\mu} + \frac{1}{(\lambda+\mu)\Gamma(\mu)} F(-\lambda-\mu, 1-\mu, 1-\lambda-\mu; 1-x).$

定理 1.1. $u(x)$ は $(0, 1)$ における連続関数とし, $\mu \in \mathbb{C}$ は $\operatorname{Re} \mu > 0$ を満たすとする.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\lambda} u(x) = A$, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ となる A , $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在するなら

$$\lim_{(0,1) \ni x \rightarrow 0} x^{-\lambda-\mu} I_{\mu}(u)(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} A.$$

さらに, ある $A', C', \lambda' \in \mathbb{C}$, $m' > 0$ に対し $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{-\lambda'} e^{-\frac{C'}{(1-x)^{m'}}} u(x) = A'$ とすると

$$C' = 0, \operatorname{Re}(\lambda' + \mu) < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{-\lambda'-\mu} I_{\mu}(u)(x) = \frac{\Gamma(-\lambda' - \mu)}{\Gamma(-\lambda')} A',$$

$$\operatorname{Re} C' > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{-\lambda'-(m+1)\mu} e^{-\frac{C'}{(1-x)^{m'}}} I_{\mu}(u)(x) = \frac{A'}{(m' C')^{\mu}}.$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\lambda} e^{\frac{C}{x^m}} u(x) = A$ となる $A, C, \lambda \in \mathbb{C}$, $m > 0$ が存在し, $\operatorname{Re} C > 0$ ならば

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\lambda-(m+1)\mu} e^{\frac{C}{x^m}} I_{\mu}(u)(x) = \frac{A}{(mC)^{\mu}}.$$

証明. (1) の後半の最初は, $v(x) := (1-x)^{-\lambda'} u(x)$ は $[0, 1]$ 上の連続関数に拡張されるので

$$\int_0^x (1-t)^{\lambda'} v(t) (x-t)^{\mu-1} dt = x^{\mu} \int_0^1 (1-x+x s_1)^{\lambda'} s_1^{\mu-1} v(x-x s_1) ds_1 \quad (t = x(1-s_1))$$

$$(s_1 = (1-x)s) \quad = x^{\mu} (1-x)^{\lambda'+\mu} \int_0^{\frac{1}{1-x}} (1+x s)^{\lambda'} s^{\mu-1} v(x-(1-x)s) ds,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{-\lambda'-\mu} I_{\mu}(u)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^{\frac{1}{1-x}} (1+x s)^{\lambda'} s^{\mu-1} v(x-x(1-x)s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} (1+s)^{\lambda'} s^{\mu-1} A' ds = \frac{\Gamma(-\lambda' - \mu)}{\Gamma(-\lambda')} A' \end{aligned}$$

となることから分かる (cf. [7, Lemma 12.2]). 他の主張も同様に示せる. □

さらに, Fuchs 型方程式の接続問題のキーとなる以下の結果も得られる.

定理 1.2 ([7]). 开区間 $(0, 1)$ における実解析関数 $u(x)$ が

$$\begin{aligned} u(x) &= x^{\lambda} \phi_0(x) \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \phi_0 \in \mathcal{O}_0, \phi_0(0) = 1) \\ &= \phi_{1,0}(1-x) + \sum_{\nu=1}^m c_{\nu} (1-x)^{\lambda_{\nu}} \phi_{1,\nu}(1-x) \\ &\quad (\lambda_{\nu} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \phi_{1,\nu} \in \mathcal{O}_0, \phi_{1,1}(0) = \cdots = \phi_{1,m}(0) = 1) \end{aligned}$$

となっているとする. このとき $\mu \in \mathbb{C}$ が $\mu + \lambda_{\nu} \notin \mathbb{Z}$ ($\nu = 1, \dots, m$) を満たすならば

$$\begin{aligned} (I_{\mu} u)(x) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} x^{\lambda+\mu} \tilde{\phi}_0(x) \quad (\tilde{\phi}_0 \in \mathcal{O}_0, \tilde{\phi}_0(0) = 1) \\ &= \tilde{\phi}_{1,0}(1-x) + \sum_{\nu=1}^m c_{\nu} \frac{\Gamma(-\lambda_{\nu} - \mu)}{\Gamma(-\lambda_{\nu})} (1-x)^{\lambda_{\nu}+\mu} \tilde{\phi}_{1,\nu}(1-x) \\ &\quad (\tilde{\phi}_{1,\nu} \in \mathcal{O}_0, \tilde{\phi}_{1,1}(0) = \cdots = \tilde{\phi}_{1,m}(0) = 1), \\ \phi_0(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^k \quad \Rightarrow \quad \tilde{\phi}_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+k+1)} x^k. \end{aligned}$$

2 Middle convolution

簡単のため

$$\partial = \frac{d}{dx}, \quad \vartheta = x \frac{d}{dx}$$

とおく. 多項式係数の線型常微分作用素の環を $W[x, \partial]$ とする. ある $P \in W[x, \partial]$ によって定まる微分方程式 $Pu = 0$ の解 $u(x)$ に対して, その一般階微分 $I_\mu u(x)$ または $\tilde{I}_\mu u(x)$ の満たす微分方程式を求めよう. 原点は $u(x)$ の特異点であるとする.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t)(x-t)_+^{\mu-1}) &= u'(t)(x-t)_+^{\mu-1} - \partial(u(t)(x-t)_+^{\mu-1}) \\ &\Rightarrow I_\mu(\partial u) = \partial I_\mu(u), \\ \frac{d}{dt}(u(t)(x-t)_+^\mu) &= u'(t)(x-t)_+^\mu - \partial(u(t)(x-t)_+^\mu) \\ &= xu'(t)(x-t)_+^{\mu-1} - tu'(t)(x-t)_+^{\mu-1} - \mu u(t)(x-t)_+^{\mu-1} \\ &\Rightarrow (\vartheta - \mu)I_\mu(u) = I_\mu(\vartheta u) \end{aligned}$$

に注意しよう.

$$P = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^n C_{ij} x^i \partial^j \in W[x, \partial] \text{ に対して } Pu(x) = 0 \text{ であつたとする}^*4.$$

$$\partial^i x^i = (\vartheta + 1)(\vartheta + 2) \cdots (\vartheta + i) = (\vartheta + 1)_i, \quad \partial^N x^i = \partial^{N-i}(\vartheta + 1)_i, \quad \vartheta \partial = \partial(\vartheta - 1)$$

であるから

$$\tilde{P}_\mu := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^n C_{ij} \partial^{N-i} (\vartheta + 1 - \mu)_i \partial^j = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^n C_{ij} \partial^{N-i+j} (\vartheta + 1 - \mu - j)_i$$

とおくと, $\tilde{P}_\mu I_\mu(u) = I_\mu(\partial^N Pu) = 0$ が分かる. そこで

$$\text{mc}_\mu(P) := \partial^{-L} \tilde{P}_\mu \in W[x, \partial]$$

と定義し (この定義は [7, (1.36)] による), $\text{mc}_\mu(P)$ を P の **middle convolution** と呼ぶ^{*5}. ただし L は $\tilde{P}_\mu \in \partial^L W[x, \partial]$ を満たす最大の整数とする.

$u(x)$ は $x^\lambda \varphi(x)$ あるいは $x^\lambda e^{\frac{C}{x^m}} \varphi(x)$ などの形をしているとしてよい. ここで $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $C \neq 0$ かつ $m > 0$ とし, $\varphi(x)$ はべき級数とする ($\varphi(x)$ の収束半径が 0 のときは, $x \rightarrow +0$ のときの $u(x)$ の漸近展開とする). $v(x) = \text{mc}_\mu(P)u(x)$ も同様な形をしているが, $\partial^L v(x) = 0$ となることから, $v = 0$ を得る. よって以下が分かる.

$$\begin{aligned} Pu(x) = 0 &\Rightarrow \text{mc}_\mu(P)I_\mu(u(x)) = 0, \\ \text{mc}_\mu : \partial &\mapsto \partial, \quad \vartheta \mapsto \vartheta - \mu, \\ \text{mc}_\mu \circ \text{mc}_{\mu'} &= \text{mc}_{\mu+\mu'}, \quad \text{mc}_{-\mu} \circ \text{mc}_\mu = \text{id}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

^{*4} $P \notin \partial W[x, \partial]$ で, P の係数の多項式は 1 次以上の共通因子を持たないとする.

^{*5} Shlesinger 型の Fuchs 型システムの時に [5] が最初に定義した (cf. §6.4, [2, 4]).

この変換と共にゲージ変換 $u(x) \mapsto v(x) = \phi(x)u(x)$ を考えることが重要である。このゲージ変換により方程式 $Pu = 0$ は $(\text{Ad}(\phi)P)v = 0$ に変換される。すなわち

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j=0}^n a_j(x) \partial^j \Rightarrow \text{Ad}(\phi)P = \sum_{j=0}^n a_j(x) \left(\partial - \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\right)^j, \\ Pu = 0 &\Rightarrow (\text{Ad}(\phi)P)(\phi u) = 0, \\ \text{Ad}(\phi)x &= x, \quad \text{Ad}((x-c)^\lambda) \partial = \partial - \frac{\lambda}{x-c}, \quad \text{Ad}(e^{\frac{C}{(x-c)^m}}) \partial = \partial + \frac{Cm}{(x-c)^{m+1}}, \\ \text{Ad}(\phi) \circ \text{Ad}(\tilde{\phi}) &= \text{Ad}(\phi \cdot \tilde{\phi}), \quad \text{Ad}(\phi^{-1}) \circ \text{Ad}(\phi) = \text{id}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

この変換を **addition** と呼ぶ。

$v_1(x) = x_+^\lambda(1-x)^{\lambda'}$ のとき $I_\mu(v_1)$ の満たす方程式を求めよう。

$$\begin{aligned} P_1 &:= \text{Ad}(x_+^\lambda(1-x)^{\lambda'}) \partial = \partial - \frac{\lambda}{x} - \frac{\lambda'}{x-1}, \\ P'_1 &:= x(1-x)P = x(1-x) \partial - \lambda(1-x) + \lambda'x = \underbrace{(\vartheta - \lambda)}_{0 \text{ 次}} - \underbrace{x(\vartheta - \lambda - \lambda')}_{1 \text{ 次}} \in W[x, \partial] \end{aligned}$$

とおくと $P'_1 v(x) = 0$ となり (x を 1 次, ∂ を -1 次と数えた), さらに

$$\begin{aligned} \partial P'_1 &= (\vartheta + 1 - \lambda) \partial - (\vartheta + 1)(\vartheta - \lambda - \lambda'), \\ P &:= \text{mc}_\mu(P'_1) = (\vartheta - \mu + 1 - \lambda) \partial - (\vartheta - \mu + 1)(\vartheta - \mu - \lambda - \lambda'), \\ \alpha &= -\lambda - \lambda' - \mu, \quad \beta = 1 - \mu, \quad \gamma = 1 - \lambda - \mu \text{ とおくと} \\ P_{\alpha, \beta, \gamma} &:= P = (\vartheta + \gamma) \partial - (\vartheta + \beta)(\vartheta + \alpha) = x(1-x) \partial^2 - (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x) \partial - \alpha\beta \end{aligned}$$

より $I_\mu(x_+^\lambda(1-x)^{\lambda'})$ は Gauss の超幾何微分方程式 $P_{\alpha, \beta, \gamma} u = 0$ の解となる*6。各変換に応じて (複素平面に解析接続したものの) Riemann scheme (確定特異点での特性指数の表) を書くと

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 \end{array} ; x \right\} &\xrightarrow{\text{Ad}(x^\lambda)\text{Ad}((1-x)^{\lambda'})} \left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ \lambda & \lambda' & -\lambda - \lambda' \end{array} ; x \right\} \\ \xrightarrow{\text{mc}_\mu} \left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{array} ; x \right\} &= \left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 1-\gamma & \gamma - \alpha - \beta & \alpha \end{array} ; x \right\}. \end{aligned}$$

3 Fuchs 型常微分方程式とスペクトル型

多項式係数の線型常微分作用素

$$P = \sum_{j=0}^n a_j(x) \partial^j = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^n C_{ij} x^i \partial^j \in W[x, \partial] \tag{3.1}$$

によって定まる n 階の常微分方程式 $Pu = 0$, すなわち

$$a_n(x) \frac{d^n u}{dx^n} + \cdots + a_1(x) \frac{du}{dx} + a_0(x) u = 0 \tag{3.2}$$

*6 P に 2 つの同次成分しかないことは, 綺麗に表せるべき級数の解があることを意味する。

を Riemann 球面上で考察しよう ($C_{ij} \in \mathbb{C}$). N は係数の多項式 $a_j(x)$ の最大次数とすればよい. P の係数が有理函数の場合は, 多項式を左から掛けて多項式係数に直して考えることにする.

$x = c$ が方程式 $Pu = 0$ の特異点でないとは, $a_0(x), \dots, a_n(x)$ に共通因子が無いように P を選んだとき, $a_n(c) \neq 0$ となることであり, このときは $x = c$ の近傍での解は正則で, $u^{(\nu)}(c)$ ($\nu = 0, \dots, n-1$) を任意に与えることにより一意に定まる. $c = \infty$ に対しては, $x \mapsto \frac{1}{x}$ と変数変換して考えればよい.

$x = 0$ が $Pu = 0$ の**確定特異点**であるとは, 以下の同値な条件が成り立つことである.

1. 原点のまわりでの $Pu = 0$ の任意の解 $u(x)$ に対し,

$$|u(re^{i\theta})| \leq Cr^{-K} \quad (0 < r < \epsilon, |\theta| < 2\pi)$$

を満たす $\epsilon > 0, C > 0, K > 0$ が存在する.

2. P を (3.1) のように表し, $\min.\deg P = \min\{i - j \mid C_{ij} \neq 0\}$ とおくと, 以下が成立する.

$$\min.\deg P = \min.\deg a_n(x) \partial^n.$$

$x = 0$ が $Pu = 0$ の確定特異点となるとき, P の ∂^n の係数を x^n と正規化すれば, $\min.\deg P = 0$ だから

$$P = \vartheta^n + c_{n-1}(x)\vartheta^{n-1} + \dots + c_1(x)\vartheta + c_0(x)$$

と表せる. このとき $c_j(x)$ は $x = 0$ で正則な有理函数となるが, 方程式

$$s^n + c_{n-1}(0)s^{n-1} + \dots + c_1(0)s + c_0(0) = 0$$

を $x = 0$ における $Pu = 0$ の**特性方程式**, その根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を**特性指数**という. λ が特性指数でその重複度が m のとき

$$u(x) \sim x^\lambda \log^k x \quad (x \rightarrow 0)$$

を満たす解 $u(x)$ が $k = 0, \dots, m-1$ に対して存在する. このようにして $Pu = 0$ の n 次元の独立解が確定特異点 $x = 0$ のまわりで得られる.

原点以外の特異点に対しても, 一次分数変換で特異点を原点に移せば, 同様な概念が定義できる.

$Pu = 0$ が **Fuchs 型**とは, 全ての特異点が確定特異点となることを言う. 以下 Fuchs 型であると仮定し, その特異点を $\{c_1, \dots, c_p, c_{p+1} = \infty\}$ とする. $x = c_j$ における特性指数を $\{\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,n}\}$

とするとき, 特性指数の表 $\left\{ \begin{array}{cccc} c_1 & \dots & c_p & c_{p+1} \\ \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{p,1} & \lambda_{p+1,1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{1,n} & \dots & \lambda_{p,n} & \lambda_{p+1,n} \end{array} \right\}$ を **Riemann scheme** という. このとき

Fuchs の関係式が成り立つ*7:

$$\sum_{j=1}^{p+1} \sum_{\nu=1}^n \lambda_{j,\nu} = \frac{1}{2}(p-1)n(n-1).$$

*7 $P = \partial^n - \sum_{j=1}^p \frac{A_j}{x-c_j} \partial^{n-1} + a_{n-1}(x) \partial^{n-1} + \dots + a_0(x)$ の形にすると, $\sum_{\nu=1}^n \lambda_{j,\nu} = A_j + \frac{1}{2}n(n-1)$ ($j = 1, \dots, p$), および $-\sum_{\nu=1}^n \lambda_{p+1,\nu} = \sum_{j=1}^p A_j + \frac{1}{2}n(n-1)$ となることから分かる.

以下, (3.1) の P は $a_n(x) = \prod_{j=1}^p (x - c_j)^n$ と正規化して考える. すると $P \in W[x, \partial]$ となり

$$a_\nu(x) = \tilde{a}_\nu(x) \prod_{j=1}^p (x - c_j)^\nu \quad (\nu = 0, \dots, n-1, \tilde{a}_n(x) = 1, \tilde{a}_\nu(x) \in \mathbb{C}[x]) \quad (3.3)$$

と表せることが分かる. 一方, $x = \infty$ が確定特異点となるための必要十分条件は $\deg a_\nu(x) \leq \deg a_n(x) - (n - \nu) = (p-1)n + \nu$ ($\nu = 0, \dots, n$), すなわち

$$\deg \tilde{a}_\nu(x) \leq (p-1)n + \nu - p\nu = (p-1)(n - \nu)$$

である. $\tilde{a}_\nu(x)$ は $((p-1)(n - \nu) + 1)$ 個の複素パラメータで表せるので, P は

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} ((p-1)(n - \nu) + 1) = \frac{n(np + p - n + 1)}{2} \quad (3.4)$$

個のパラメータを持つ.

一方, Riemann scheme は $(p+1)n - 1$ 個の複素パラメータをもつので (“-1”は Fuchs の関係式に対応), Riemann scheme を指定した P は

$$\frac{1}{2}n(np + p - n + 1) - ((p+1)n - 1) = \frac{1}{2}(n-1)((p-1)n - 2) \quad (3.5)$$

個のパラメータをもつ. このパラメータは Riemann scheme からは定まらないので**アクセサリー・パラメータ**と呼ばれる. なお, Gauss の超幾何微分方程式は $p = n = 2$ であるからアクセサリー・パラメータを持たない.

一般超幾何函数

$${}_nF_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_n)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_{n-1})_k (1)_k} x^k$$

は Riemann scheme $\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ 1-\beta_1 & 0 & \alpha_1 \\ 1-\beta_2 & 1 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-\beta_{n-1} & n-2 & \alpha_{n-1} \\ 0 & -\beta_n & \alpha_n \end{array} \right\}$ ($\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \cdots + \beta_n$) をもつ n 階の

Fuchs 型方程式を満たす. この Riemann scheme をもつ Fuchs 型方程式は, (3.5) において $p = 2$ より $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 個のアクセサリー・パラメータを持つ. 一方, ${}_nF_{n-1}(x)$ が満たす Fuchs 型の方程式は, (β_n が整数でないとき) $x = 1$ の近傍で $(n-1)$ 次元の正則解をもつ, という性質がある.

特異点 $x = c_j$ の近傍で $u(x) \sim (x - c_j)^\nu$ ($x \rightarrow c_j, \nu = 0, \dots, m-1$) という正則解を持つ*⁸, という条件は, $x = c_j$ で特性指数 $0, \dots, m-1$ を持つことを意味するが, この点での他の特性指数が整数でないとすると

$$P \in (x - c_j)^m W[x, \partial] \quad \text{すなわち} \quad \tilde{a}_\nu(x) \in (x - c_j)^{m-\nu} \mathbb{C}[x] \quad (\nu = 0, \dots, m-1)$$

*⁸ このことを, 一般化特性指数 $[0]_{(m)}$ を持つという.

という条件と同値である．この条件を課すと $\tilde{a}_\nu(x)$ のパラメータは $(m - \nu)$ 個減る ($0 \leq \nu \leq m - 1$)．一方, Riemann scheme のパラメータは m 個減るから, アクセサリー・パラメータの数は差し引き

$$\left(\sum_{\nu=0}^{m-1} (m - \nu) \right) - m = \frac{m(m-1)}{2} \quad (3.6)$$

個減る． ${}_nF_{n-1}(x)$ が満たす Fuchs 型方程式は, $x = 1$ で $m = (n - 1)$ 次元の上記のような正則解を持つという条件を満たすので, その方程式はアクセサリー・パラメータを持たないことが分かる．

この状況を一般化しよう．特異点 $x = c_j$ での一般化特性指数が $\{[\lambda_{j,1}]_{(m_{j,1})}, \dots, [\lambda_{j,n_j}]_{(m_{j,n_j})}\}$ である, とは特性指数が $\{\lambda_{j,\nu} + i \mid i = 0, \dots, m_{j,\nu} - 1, \nu = 1, \dots, n_j\}$ であつて, さらに

$$\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'} \notin \mathbb{Z} \quad (1 \leq \nu < \nu' \leq n_j) \quad (3.7)$$

とすると

$$\text{Ad}((x - c_j)^{-\lambda_{j,\nu}})P \in (x - c_j)^{m_{j,\nu}}W[x, \partial] \quad (3.8)$$

という条件となる^{*9}．一般化特性指数を用いた一般化 Riemann scheme (GRS と略記) は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = c_1 & \cdots & c_{p+1} = \infty \\ [\lambda_{1,1}]_{(m_{1,1})} & \cdots & [\lambda_{p+1,1}]_{(m_{p+1,1})} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{p+1,n_{p+1}}]_{(m_{p+1,n_{p+1}})} \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

と表し ($[\lambda]_{(1)}$ は単に λ と書いてもよいことにする), n の分割の $(p + 1)$ 個の組

$$n = m_{j,1} + \cdots + m_{j,n_j} \quad (j = 1, \dots, p + 1) \quad (3.10)$$

を方程式 $Pu = 0$ のスペクトル型と言って, $\mathbf{m} = m_{1,1} \cdots m_{1,n_1}, \dots, m_{p+1,1} \cdots m_{p+1,n_{p+1}}$ と略記し^{*10}, n を \mathbf{m} の階数と言って $\text{ord } \mathbf{m}$ と書く．この GRS をもつ方程式のアクセサリー・パラメータの個数は

$$\begin{aligned} \text{Pidx } \mathbf{m} &:= \frac{(n-1)((p-1)n-2)}{2} - \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{m_{j,\nu}(m_{j,\nu}-1)}{2} \\ &= \frac{(p-1)n^2 + 2 - \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}^2}{2} \end{aligned}$$

となる (と考えられる)^{*11}．Katz [5] の定義した $\text{idx } \mathbf{m}$ (index of rigidity)^{*12}を用いると

$$\text{Pidx } \mathbf{m} = 1 - \frac{1}{2} \text{idx } \mathbf{m}, \quad \text{idx } \mathbf{m} := \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}^2 - (p-1)(\text{ord } \mathbf{m})^2 \quad (3.11)$$

^{*9} このとき $Pu = 0$ の解が $(x - c_j)^{\lambda_{j,\nu}} \mathcal{O}_{c_j}$ の中に $m_{j,\nu}$ 次元ある．(3.7) が成り立たない場合についての定義については, [7] を参照．なお, (3.7) の条件下で P の係数は (Gauss の超幾何微分方程式のように) $\lambda_{j,\nu}$ と x の多項式となり, (3.7) が成り立たない場合も方程式が定まる (cf. 定理 4.3)．

^{*10} Gauss の超幾何微分方程式のスペクトル型は, 11, 11, 11 で $1^2, 1^2, 1^2$ と記してもよい． ${}_nF_{n-1}(x)$ の満たす方程式のスペクトル型は, $1^n, (n-1)1, 1^n$ となる．

^{*11} 方程式 $Pu = 0$ が既約 (すなわち P が一階以上の有理関数係数の微分作用素の積に分解できない) なら, (Fuchs 型では解空間のモノドロミーが既約という条件と同値), $\text{Pidx } \mathbf{m}$ は実際にアクセサリー・パラメータの個数になる．

^{*12} index of rigidity の値は常に偶数．

となる。また Fuchs の関係式は以下のようになる。

$$|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| := \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} + \frac{1}{2} \text{idx } \mathbf{m} - \text{ord } \mathbf{m} = 0. \quad (3.12)$$

4 一般化 Riemann scheme と middle convolution

一般化 Riemann scheme (3.9) において

$$\lambda_{j,1} = 0 \quad (j = 1, \dots, p) \quad (4.1)$$

$$\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,1} \notin \mathbb{Z} \quad (j = 1, \dots, p+1, \nu = 2, \dots, n_j) \quad (4.2)$$

$$\text{ある 2 つ以上の } j \text{ に対して } m_{j,2} > 0 \quad (4.3)$$

とする ((4.2) は以下の記述を簡単にするために仮定)。ここでは、 $m_{j,1}$ は 0 も許すものとする。

定理 4.1 ([6, 7]). 上の仮定の下で $P' = \text{mc}_{\lambda_{p+1,1}-1}(P)$ とすると $P'u = 0$ の GRS は

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x = c_1 & \cdots & c_p & c_{p+1} = \infty \\ [0]_{(m_{1,1}-d(\mathbf{m}))} & \cdots & [0]_{(m_{p,1}-d(\mathbf{m}))} & [1-\mu]_{(m_{p+1,1}-d(\mathbf{m}))} \\ [\lambda_{1,2} + \mu]_{(m_{1,2})} & \cdots & [\lambda_{p,2} + \mu]_{(m_{p,2})} & [\lambda_{p+1,2} - \mu]_{(m_{p+1,2})} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ [\lambda_{1,n_1} + \mu]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{p,n_2} + \mu]_{(m_{p,n_2})} & [\lambda_{p+1,n_{p+1}} - \mu]_{(m_{p+1,n_{p+1}})} \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

$$d(\mathbf{m}) := \sum_{j=1}^{p+1} m_{j,1} - (p-1) \text{ord } \mathbf{m}, \quad \mu = \lambda_{p+1,1} - 1, \quad (4.5)$$

$$\text{idx } \mathbf{m}' = \text{idx } \mathbf{m}, \quad m'_{j,\nu} = m_{j,\nu} - \delta_{j,1} d(\mathbf{m}) \quad (j = 1, \dots, p+1, \nu = 1, \dots, p+1) \quad (4.6)$$

となり (mc_μ は、 $-\mu$ 階微分と見なせることに注意)、 $Pu = 0$ が既約なら $P'u = 0$ も同様^{*13}。

上の定理で $d(\mathbf{m}) > 0$ であれば P' の階数は P の階数より下がる。これを **Katz reduction** と呼ぼう。そこで $\{m_{j,1}, \dots, m_{j,n_j}\}$ の中から最大の m_{j,k_j} を選び、 P を $\text{Ad}(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^{-\lambda_{j,k_j}})P$ に変換して $m_{j,\nu}$ を並べ直す。この結果、 P の GRS (3.9) が **monotone** すなわち

$$m_{j,1} \geq m_{j,2} \geq \cdots \geq m_{j,n_j} \quad (j = 1, \dots, p+1) \quad (4.7)$$

であって、さらに (4.1) を満たすとしてよい。このとき、 $\text{idx } \mathbf{m}$ の定義から直ちに得られる恒等式

$$\left(\sum_{j=1}^{p+1} m_{j,1} - (p-1)n \right) n = \text{idx } \mathbf{m} + \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{\nu=1}^{n_j} (m_{j,1} - m_{j,\nu}) m_{j,\nu} \quad (4.8)$$

より、 $\text{idx } \mathbf{m} > 0$ ならば $d(\mathbf{m}) > 0$ が分かり、 $\text{mc}_{\lambda_{p+1,1}-1}P$ の階数は P より下がる。

(4.7) を満たす \mathbf{m} に対して、 $m_{j,1}$ を $m_{j,1} - d(\mathbf{m})$ に置き換えて整数 $n - d(\mathbf{m})$ の分割の組を作り、再び (4.7) を満たすように並び替える操作を \rightarrow で表す (\rightarrow の上の数は $d(\mathbf{m})$ の値) :

^{*13} パラメータが generic のとき。

$$\begin{aligned}
& \underline{411}, \underline{411}, \underline{42}, \underline{33} \xrightarrow{15-2\cdot 6=3} \underline{111}, \underline{111}, \underline{21} \xrightarrow{4-3=1} \underline{11}, \underline{11}, \underline{11} \xrightarrow{3-2} 1, 1, 1 \quad (\text{実現可能, rigid}) \\
& \underline{211}, \underline{211}, \underline{111} \xrightarrow{9-8=1} \underline{111}, \underline{111}, \underline{111} \xrightarrow{3-3=0} 111, 111, 111 \quad (\text{実現可能}) \\
& \underline{211}, \underline{211}, \underline{211}, \underline{31} \xrightarrow{9-8=1} \underline{111}, \underline{111}, \underline{111}, \underline{21} \xrightarrow{5-6=-1} \underline{211}, \underline{211}, \underline{211}, \underline{31} \quad (\text{実現可能}) \\
& \underline{431}, \underline{3311}, \underline{41111} \xrightarrow{11-8=3} \underline{311}, \underline{311}, \underline{11111} \xrightarrow{7-5=2} \times \quad (\text{実現不可能})
\end{aligned}$$

適当な $\lambda_{j,\nu}$ に対して, GRS (3.9) をもつ既約な Fuchs 型方程式 $Pu = 0$ が存在するとき, n の分割の $(p+1)$ 個の組 \mathbf{m} を**実現可能**という. GRS (3.9) を持つ $Pu = 0$ に既約なものがあり, アクセサリー・パラメータを持たないとすると $\text{Pidx } \mathbf{m} = 0$ なので $\text{idx } \mathbf{m} = 2$ となる. このとき $Pu = 0$ は **rigid** であると言い, そのような \mathbf{m} を rigid なスペクトル型という.

定理 4.2 ([1, 5, 7]^{*14}). n の分割の $(p+1)$ 個の組 \mathbf{m} に対して, 上の操作を続けていくことにより \mathbf{m} の実現可能性が以下のように判定できる.

- (1) 階数が 1 となるまで単調に減少する \Leftrightarrow 実現可能で rigid.
- (2) (1) ではないが途中で負の数が出て分割の組でなくなる \Rightarrow \mathbf{m} は実現可能でない.
- (3) 階数が下がらないステップが現れる
 $\Rightarrow (\text{idx } \mathbf{m} < 0 \text{ または全ての } m_{j,\nu} \text{ の最大公約数が } 1 \Leftrightarrow \text{実現可能}).$

定理 4.3 ([7, Theorem 6.14]). 実現可能な \mathbf{m} に対し, GRS (3.9) をもつ **universal model** $P_{\mathbf{m}}u = 0$ が存在し, 微分作用素 $P_{\mathbf{m}}$ の係数は特性指数 $\lambda_{j,\nu}$ と x と $\text{Pidx } \mathbf{m}$ 個のアクセサリー・パラメータの多項式となる. また, GRS (3.9) をもつ既約な方程式はこの $P_{\mathbf{m}}$ に含まれる.

定理 4.4 ([7, Proposition 7.13]). $d(\mathbf{m}) < 0$ となる実現可能な \mathbf{m} を **basic** なスペクトル型という ([7] では 1 階の場合も含めて fundamental と呼んだ). basic なスペクトル型で $\text{idx } \mathbf{m}$ が同一のものは, 自明な同型^{*15}を除き有限個しか存在しない^{*16}.

注意 4.5. rigid なスペクトル型を持つ Fuchs 型方程式 $Pu = 0$ は, addition と middle convolution を何度か施して自明な方程式 $\frac{du}{dx} = 0$ に変換されること, また逆に, 自明な方程式からこれらの変換を施して構成できることが分かった.

5 接続公式

GRS (3.9) をもつ rigid な Fuchs 型微分方程式 $Pu = 0$ を考察する.

$c_1 = 0, c_2 = 1, c_{p+1} = \infty, c_j \notin [0, 1] (j = 3, \dots, p)$ および $m_{1,n_1} = m_{2,n_2} = 1$ を仮定する.

^{*14} additive Deligne-Simpson 問題と呼ばれ, 1 階システム (Schlesinger 型) のときは, [5] によって rigid の場合に, [1] によって一般の場合に解かれた. 単独高階方程式の場合は [7] による.

^{*15} $n = n$ という n の自明な分割を無視, $m_{j,\nu}$ の $j \in \{1, \dots, p+1\}$ の $(p+1)$ 個の番号の置換, 各 j 毎に $m_{j,\nu}$ の $\nu \in \{1, \dots, n_j\}$ の n_j 個の番号の置換.

^{*16} $\text{idx } \mathbf{m}$ が $0, -2, -4, -6, \dots$ のときの basic なスペクトル型の個数は $4, 13, 36, 67, \dots$ となる. $\text{idx } \mathbf{m} = 0$ で basic となるものは, $1^3, 1^3, 1^3, 2^2, 1^4, 1^4, 3^2, 2^3, 1^6, 11, 11, 11, 11$ の 4 個 (cf. [7, §13.1]) でアフィンルート系 $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8, \tilde{D}_4$ に対応する. このときは (4.8) より, $m_{j,\nu}$ が ν に依らないことが分かる.

$\lambda_{j,\nu}$ が一般の時は解 $u(x) = x^{\lambda_{1,n_1}} \phi_0(x)$ ($\phi_0(x) \in \mathcal{O}_0$, $\phi_0(0) = 1$) が存在し, $(0, 1)$ 上で

$$u(x) - c(0: \lambda_{1,n_1} \rightsquigarrow 1: \lambda_{2,n_2})(1-x)^{\lambda_{2,n_2}} \phi_1(x) \in \sum_{\nu=1}^{n_2-1} x^{\lambda_{2,\nu}} \mathcal{O}_1 \quad (\phi_1(x) \in \mathcal{O}_1, \phi_1(1) = 1)$$

を満たす $c(0: \lambda_{1,n_1} \rightsquigarrow 1: \lambda_{2,n_2}) \in \mathbb{C}$ が一意的に定まる. これを特性指数 λ_{1,n_1} に対応する $x = 0$ での局所解から特性指数 λ_{2,n_2} に対応する $x = 1$ での局所解への**接続係数**という.

さて,

$$P' = \text{mc}_\mu \circ \text{Ad}(x^{-\lambda_{1,1}} \prod_{j=2}^p (1 - \frac{x}{c_j})^{-\lambda_{j,1}})(P)$$

よって $Pu = 0$ を $P'v = 0$ に変換すると, 特性指数 $\lambda_{1,n_1}, \lambda_{2,n_2}$ は, $\lambda'_{1,n_1} = \lambda_{1,n_1} - \lambda_{1,1} + \mu$, $\lambda'_{2,n_2} = \lambda_{2,n_2} - \lambda_{2,1} + \mu$ に変わり, $P'v = 0$ の対応する接続係数 $c'(0: \lambda'_{1,n_1} \rightsquigarrow 1: \lambda'_{2,n_2})$ との間に

$$\frac{c'(0: \lambda'_{1,n_1} \rightsquigarrow 1: \lambda'_{2,n_2})}{\Gamma(\lambda'_{1,n_1} - \lambda'_{1,1} + 1)\Gamma(\lambda'_{2,1} - \lambda'_{2,n_2})} = \frac{c(0: \lambda_{1,n_1} \rightsquigarrow 1: \lambda_{2,n_2})}{\Gamma(\lambda_{1,n_1} - \lambda_{1,1} + 1)\Gamma(\lambda_{2,1} - \lambda_{2,n_2})} \prod_{j=3}^p \left(1 - \frac{1}{c_j}\right)^{-\lambda_{j,1}}$$

という関係が成り立つことが定理 1.2 から分かる. この変換とスペクトル型 $\{m_{j,\nu}\}$ の番号の適当な並べ替えを続けることにより, 接続係数が 1 となる自明な方程式 $\frac{du}{dx} = 0$ に変換できることが §4 から分かる. このことから, 以下の定理が得られる.

定理 5.1 ([7, Theorem 12.6], [6]). 上および (3.12) の記号の下で, $\gamma_j \in \mathbb{C}$ が存在して

$$c(0: \lambda_{1,n_1} \rightsquigarrow 1: \lambda_{2,n_2}) = \frac{\prod_{\nu=1}^{n_1-1} \Gamma(\lambda_{1,n_1} - \lambda_{1,\nu} + 1) \cdot \prod_{\nu=1}^{n_2-1} \Gamma(\lambda_{2,\nu} - \lambda_{2,n_2})}{\prod_{\substack{\mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}'' = \mathbf{m} \\ m'_{1,n_1} = m''_{2,n_2} = 1}} \Gamma(|\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}|) \cdot \prod_{j=3}^p \left(1 - \frac{1}{c_j}\right)^{-\gamma_j}}. \quad (5.1)$$

ここで $\mathbf{m} = \mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}''$ とは, $\mathbf{m}' = \{m_{j,\nu}\}$, $\mathbf{m}'' = \{m''_{j,\nu}\}$ が rigid なスペクトル型で $m_{j,\nu} = m'_{j,\nu} + m''_{j,\nu}$ ($\forall j, \nu$) となっていることを意味する.

(5.1) の分母のガンマ関数の個数は, 分子と同数の $(n_1 + n_2 - 2)$ 個となり, 以下が成立する.

$$\sum_{\nu=1}^{n_1-1} (\lambda_{1,n_1} - \lambda_{1,\nu} + 1) + \sum_{\nu=1}^{n_2-1} (\lambda_{2,\nu} - \lambda_{2,n_2}) = \sum_{\substack{\mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}'' = \mathbf{m} \\ m'_{1,n_1} = m''_{2,n_2} = 1}} |\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}|. \quad (5.2)$$

例 5.2. 2 階の rigid なスペクトル型は 11, 11, 11 のみで, Gauss の超幾何に対応する. GRS は

$$\begin{Bmatrix} x=0 & 1 & \infty \\ \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} & \lambda_{3,1} \\ \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} & \lambda_{3,2} \end{Bmatrix} \quad (\lambda_{1,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{2,2} + \lambda_{3,1} + \lambda_{3,2} = 1) \quad (5.3)$$

で, Katz reduction は (GRS の 1 行目を省略して表記すると)

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} & \lambda_{3,1} \\ \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} & \lambda_{3,2} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{Ad}(x^{-\lambda_{1,1}}(1-x)^{-\lambda_{2,1}})} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \lambda_{3,1} + \lambda_{1,1} + \lambda_{2,1} \\ \lambda_{1,2} - \lambda_{1,1} & \lambda_{2,2} - \lambda_{2,1} & \lambda_{3,2} + \lambda_{1,1} + \lambda_{2,1} \end{Bmatrix} \\ \xrightarrow{\text{mc}_{\lambda_{3,1} + \lambda_{1,1} + \lambda_{2,1} - 1}} \{\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{3,1} - 1 \quad \lambda_{1,1} + \lambda_{2,2} + \lambda_{3,1} - 1 \quad \lambda_{3,2} - \lambda_{3,1} + 1\}.$$

なお, $x = 0$ での特性指数 $\lambda_{1,1}$ に対応する局所解は以下で与えられる^{*17} :

$$x^{\lambda_{1,1}}(1-x)^{\lambda_{2,1}}F(\lambda_{1,1} + \lambda_{2,1} + \lambda_{3,1}, \lambda_{1,1} + \lambda_{2,1} + \lambda_{3,2}, \lambda_{1,1} - \lambda_{1,2} + 1; x).$$

定理 5.1 から次のような接続係数が得られる.

$$c(0: \lambda_{1,2} \rightsquigarrow 1: \lambda_{2,2}) = \frac{\Gamma(\lambda_{1,2} - \lambda_{1,1} + 1) \cdot \Gamma(\lambda_{2,1} - \lambda_{2,2})}{\Gamma(\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{3,1}) \cdot \Gamma(\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{3,2})}. \quad (5.4)$$

対称性 (と universal model の一意性) から, 上で $\lambda_{1,1}$ と $\lambda_{1,2}$, あるいは $\lambda_{2,1}$ と $\lambda_{2,2}$ の入れ替えをすると他の $x = 0$ から $x = 1$ への接続係数 3 個が得られる. さらに, $\lambda_{j,\nu}$ の $j \in \{1, 2, 3\}$ に対し, $\{1, 2, 3\}$ を置換したものとを合わせると, 24 個全ての接続係数が得られる. すなわち (5.3) のように対称的に表せば, Gauss の超幾何函数の接続係数は, 公式 (5.4) の特殊化から全て得られる.

接続係数 (5.4) に現れるガンマ函数は全て意味を持っている. すなわち^{*18}

- $k := -(\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{3,1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ または $k := -(\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{3,2}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
 $\Leftrightarrow x^{\lambda_{1,2}}(1-x)^{\lambda_{2,1}}\phi(x)$ が解となるような k 次の多項式 $\phi(x)$ が存在する^{*19}.
 \Rightarrow モノドロミーが可約.
- $-(\lambda_{1,2} - \lambda_{1,1} + 1) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
 $\Leftrightarrow u(x) \sim x^{\lambda_{1,2}}$ ($x \rightarrow 0$) となる局所解に $\log x$ を含む項が現れる可能性がある.
- $-(\lambda_{2,1} - \lambda_{2,2}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
 $\Leftrightarrow 1$ の近傍での局所解の展開に $(1-x)^{\lambda_{2,2}} \log(1-x)$ という項が現れる可能性がある.

実はこれらと同様のことが定理 5.1 の一般の接続係数においても正しい.

注意 5.3. 複素数 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m$ が

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_m = \beta_1 + \dots + \beta_m$$

を満たすならば

$$\frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(\beta_j)}{\prod_{j=1}^m \Gamma(\alpha_j)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_m)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_m)_k} \quad (5.5)$$

となる. 定理 5.1 の接続係数は, ガンマ函数より若干易しい函数と考えられ, この無限積表示で零点や極は容易に分かる.

なお [8] では, ガンマ函数の導入なしに Gauss の超幾何函数について接続公式やモノドロミーの既約条件などを初等的に与えた.

注意 5.4. (1) 実現可能なスペクトル型は, 星形 Kac-Moody ルート系のルート lattice の元と対応させることにより, ルート系の言葉で説明できる (cf. [1, 7]). 特に rigid なスペクトル型は正の実ルートに, 実現可能なスペクトル型は正ルートに, Katz reduction は Weyl 群の作用に対応する.

^{*17} この局所解は, 対称性から $\lambda_{2,1}$ と $\lambda_{2,2}$ を入れ替えても等しい. このことから, Kummer の関係式 $F(\alpha, \beta, \gamma; x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, 2-\gamma; x)$ が得られる.

^{*18} $\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \dots\}$

^{*19} $\phi(x)$ は Jacobi 多項式.

(2) 定理の分母に現れる $\mathbf{m} = \mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}''$ という分解は, $Pu = 0$ の既約性と深く関係している. この分解や方程式 $Pu = 0$ の既約性の必要十分条件は, Kac-Moody ルート系の言葉, あるいは §4 の Katz reduction から明示公式が得られる (cf. 注意 6.4, [7, 11], [10, §13]).

(3) GRS (3.9) をもつ Fuchs 型微分方程式を考える. スペクトル型が rigid で monotone (4.7) とする. 方程式が既約ならば $x = c_j$ における解空間の局所モノドロミー行列^{*20}を M_j とおくと

$$\text{rank} \prod_{\nu=1}^k (M_j - e^{2\pi i \lambda_{j,\nu}}) = n - m_{j,1} \cdots - m_{j,k} \quad (k = 1, \dots, n_j)$$

となり (cf. [7, **locally non-degenerate**, Remark 10.11 ii]), M_j の Jordan 標準形が定まる. M_j が対角化可能でないときに重要 (局所解において, $\log(x - c_j)$ のべきの項の現れ方が分かる.).

(4) 定理 1.2 と §4 の Katz reduction の議論を合わせると, rigid な Fuchs 型方程式の重複度 1 ($m_{j,\nu} = 1$) の特性指数 $\lambda_{j,\nu}$ に対応する局所解に対して, 接続公式と同様, Euler 型の積分表示, ベキ級数表示などが具体的に得られる (cf. [7]).

(5) 上の (2), (4) と共に, 前項の既約性条件や P の具体的表示や全ての隣接関係式の導出などが, 数式処理のプログラム [12] 上で実現されている.

6 接続問題に関連した話題

6.1 rigid なスペクトル型の例

階数の小さな rigid なスペクトル型は古典的に知られている方程式に対応するものが現れる.

4 階以下の rigid なスペクトル型は :

1 階	1, 1, 1 :	自明な方程式
2 階	11, 11, 11 :	Gauss の超幾何 ${}_2F_1$
3 階	111, 21, 111 :	一般超幾何 ${}_3F_2$ ([7, §13.4])
	21, 21, 21, 21 :	Jordan-Pochhammer ([7, §13.3]). 多変数化すると Appell の F_1
4 階	1111, 31, 1111 :	一般超幾何 ${}_4F_3$ ([7, §13.4])
	211, 22, 1111 :	even family で 4 階のもの ([16], [7, §13.5])
	211, 211, 211 :	特に知られていなかった? ([7, §13.7.5])
	31, 31, 211, 1111 :	多変数化すると Appell の F_2, F_3 ([13, §5.3])
	22, 22, 22, 31 :	多変数化すると Appell の F_4 ([13, §5.4])
	31, 31, 31, 31, 31 :	多変数化すると Lauricella の F_D (4 変数)

5 階, 6 階, 7 階, 8 階, 9 階, 10 階, ..., 20 階, ..., 30 階, ..., 40 階, ... ではそれぞれ 11, 28, 44, 96, 157, 306, ..., 19269, ..., 310804, ..., 2554015, ... 個存在する (cf. [7, §13.2.2]).

^{*20} $c_j \neq \infty$ のときは, 路 $[0, 1] \ni t \mapsto x(t) = c_j + \varepsilon e^{it}$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) での解析接続で引き起こされる解空間の線型変換の行列. $c_j = \infty$ のときは, $x \mapsto \frac{1}{x}$ という変換後に原点で考えればよい (あるいは, $[0, 2\pi] \ni t \mapsto x(t) = \varepsilon^{-1} e^{-it}$ という路に沿った解析接続を考える).

6.2 接続公式の他の求め方 (cf. [7, Remark 12.19])

Gauss の超幾何函数の接続公式は **Gauss の和公式**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} = \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta) \cdot \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma - \beta)} \quad (\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0) \quad (6.1)$$

に帰着される.

ベータ函数の積分表示から

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-xt)^{-\beta} dt \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{k!} (xt)^k \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\gamma)(\beta)_k}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)k!} \int_0^1 t^{\alpha+k-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt \right) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(\gamma)(\beta)_k}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)k!} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\gamma - \alpha)}{\Gamma(\gamma+k)} \right) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} x^k = F(\alpha, \beta, \gamma; x) \end{aligned}$$

という超幾何函数の積分表示が得られる. $x = 1$ を代入すれば

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta) \cdot \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma - \beta)}$$

となって, Gauss の和公式が得られる.

Gauss のオリジナルな証明は, $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ の 3 項間関係式^{*21}から

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma + 1; 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma; 1)} = \frac{(\gamma - \alpha - \beta)\gamma}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

を示し, さらに $\lim_{k \rightarrow \infty} F(\alpha, \beta, \gamma + k; 1) = 1$ となることを使うものであった.

後者の求め方を一般化すると :

- 接続係数のパラメータについての差分漸化式を求める (cf. [7, Example 12.24]), あるいは, 接続係数の零点と極になり得る条件を求める (cf. [7, §12.3]).
- 次に, パラメータをある無限遠方向へ跳ばしたときの解の漸近公式を求める.

この議論に有効な漸近公式として, 以下の結果を示した.

^{*21} $\sum_{k, m, n \in \mathbb{Z}^3} \mathbb{C}F(\alpha + k, \beta + m, \gamma + n; x)$ は有理函数体 $\mathbb{C}(x)$ 上 2 次元のベクトル空間を成すので, そのうちの任意に 3 つを選ぶと, (α, β, γ) を有理パラメータにもつ $\mathbb{C}(x)$ 上の 1 次関係式ができる. 一般の n 階の rigid な Fuchs 型のときは, 同様に $(n+1)$ 項間関係式が得られる ($u^{(\nu)}$ ($0 \leq \nu < n$) が基底に取れる).

定理 6.1 ([7, Theorem 12.10]). $n = n_0 + n_1$ として以下の 1 階の Fuchs 型方程式系を考える*22.

$$\frac{du}{dx} = \frac{A - D(\mathbf{0}, \mathbf{m})}{x}u + \frac{B - D(\mathbf{0}, \mathbf{m})}{1-x}u, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & A_0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

ここで, A, B はブロック行列で, A_0, A_1, B_0, B_1 はそれぞれ $n_0 \times n_1, n_1 \times n_1, n_1 \times n_0, n_1 \times n_1$ の定数行列. また $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{n_1}) \in \mathbb{C}^{n_1}$. $D(\mathbf{0}, \mathbf{m})$ は n 次対角行列で j 番目の成分が $j > n_0$ のとき m_{j-n_0} でそれ以外では 0 となるものとする. このとき, A, B のみから定まる定数 K, C があって, 原点での正則解 $u(x)$ に対し, 次の評価が成り立つ.

$$\max_{1 \leq \nu \leq n} |u_\nu(x) - u_\nu(0)| \leq \frac{C \max_{1 \leq \nu \leq n_1} |u_\nu(0)|}{\min_{1 \leq \nu \leq n_1} \operatorname{Re} m_\nu - K} \quad (\forall x \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}, \min_{1 \leq \nu \leq n_1} \operatorname{Re} m_\nu > K).$$

例 6.2. Gauss の超幾何の場合は, $u_0(x) = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ とおいて $u = \begin{pmatrix} u_0 \\ \frac{1}{\alpha}u_0' \end{pmatrix}$ とすると

$$\frac{du}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 1 - \gamma \end{pmatrix} \frac{u}{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & \alpha + \beta - \gamma + 1 \end{pmatrix} \frac{u}{1-x}$$

となるので, $\lim_{k \rightarrow +\infty} F(\alpha, \beta, \gamma + k; x) = 1 \quad (|x| \leq 1)$ が得られる.

注意 6.3. 定理 5.1 の接続公式を 2008 年に得たときは上の結果を使っていた. そのため特異点を 3 点に限っていた (cf. [9, Theorem 9.2]). 今ではこの方法でも定理 5.1 を示すことができる.

6.3 $m_{1,n_1} > 1$ の場合の局所解

- 部分 Wronskian 間の接続公式に前項の方法が有効 ([7, §12.3, (13.36)]).
- c_2, \dots, c_{p+1} を変数 y_2, \dots, y_{p+1} とみなして KZ 型方程式に拡張し, $[\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})}$ に対する局所解を, $y_{\nu'} \rightarrow y_\nu \quad (2 \leq \nu < \nu' \leq p+1)$ のときの漸近挙動で分離する (cf. [3, 12, 13]).
- 多変数化は, $m_{1,n_1} = 1$ でも $y_j \rightarrow y_2$ の漸近挙動から定理 5.1 の γ_j を直接得る, という応用がある (cf. [7, §14.9 3]).

rigid なスペクトル型 211, 211, 211 の GRS

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ [\lambda_{1,1}]_{(2)} & [\lambda_{2,1}]_{(2)} & [\lambda_{3,1}]_{(2)} \\ \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} & \lambda_{3,2} \\ \lambda_{1,3} & \lambda_{2,3} & \lambda_{3,3} \end{array} \right\} \quad \left(\sum_{j=1}^3 (2\lambda_{j,1} + \lambda_{j,2} + \lambda_{j,3}) = 3 \right) \quad (6.2)$$

に対応する方程式 $Pu = 0$ の解の接続公式を考察しよう. $\operatorname{Ad}(x^{-\lambda_{1,1}}(1-x)^{-\lambda_{2,1}})$ を施して, $\lambda_{1,1} = \lambda_{2,1} = 0$ としてよい. $\lambda_{j,\nu} \quad (j = 1, 2, \nu = 2, 3)$ が一般のときは $x = 0$ と $x = 1$ とにそれぞれ 2 次元の正則解が存在する. そこで $u_{0,1}(x), u_{0,2}(x)$ を $x = 0$ での独立な正則解とすると

$$u_{0,\nu}(x) - u_{1,\nu}(x) \in (1-x)^{\lambda_{2,2}}\mathcal{O}_1 + (1-x)^{\lambda_{2,3}}\mathcal{O}_1 \quad (\nu = 1, 2)$$

*22 行列 A, B が対角化可能で固有値 0 の重複度が共に n_0 のときは, A の固有値 0 の固有ベクトルと B の固有値が 0 以外の固有ベクトルで基底を取って線型変換を行列表示した形になっている.

を満たす $u_{1,\nu}(x) \in \mathcal{O}_1$ が定まる. これらの Wronskian の比

$$c(0: [\lambda_{1,1}]_{(2)} \rightsquigarrow 1: [\lambda_{2,1}]_{(2)}) = \frac{\begin{vmatrix} u_{1,1}(1) & u_{1,2}(1) \\ u'_{1,1}(1) & u'_{1,2}(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_{0,1}(0) & u_{0,2}(0) \\ u'_{0,1}(0) & u'_{0,2}(0) \end{vmatrix}}$$

を $x = 0$ の一般化特性指数 $[\lambda_{1,1}]_{(2)}$ に対応する局所解の空間から $x = 1$ の一般化特性指数 $[\lambda_{2,1}]_{(2)}$ に対応する局所解の空間への一般化接続係数 (cf. [7, Definition 12.17]) と定義する.

この接続公式は §6.2 で述べた方法で求めることができる (cf. [7, §13.7.5]) :

$$c(0: [\lambda_{1,1}]_{(2)} \rightsquigarrow 1: [\lambda_{2,1}]_{(2)}) = \frac{\prod_{\nu=2}^3 (\Gamma(\lambda_{1,1} - \lambda_{1,\nu} + 2) \cdot \Gamma(\lambda_{2,\nu} - \lambda_{2,1} - 1))}{\prod_{\nu=2}^3 (\Gamma(\lambda_{1,1} + \lambda_{2,\nu} + \lambda_{3,1}) \cdot \Gamma(1 - \lambda_{1,\nu} - \lambda_{2,1} - \lambda_{3,1}))}.$$

この分母の極は, 方程式が可約となって ${}_3F_2(x)$ に適当な函数を掛けたものを解にもつ 2 階方程式が, 既約成分または既約成分による商として現れる分解のいくつかに対応している.

rigid なスペクトル型 21, 21, 21, 21 をもつ Jordan-Pochhammer 方程式の GRS は

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x = 0 & y & 1 & \infty \\ [0]_{(2)} & [0]_{(2)} & [0]_{(2)} & [e]_{(2)} \\ a & b & c & d \end{array} \right\} \quad (a + b + c + d + 2e = 2) \quad (6.3)$$

で与えられる. $x = 0$ での局所解 $u(x)$ は 2 次元あるので, $u(0) = 1$ という条件では定まらないが, y も変数と考え, $y \rightarrow -\infty$ のとき $u(x, y) \sim C(-y)^{b+e}$ となるもの, $u(x, y) \sim C(-y)^{-d}$ となるもの ($\exists C \in \mathbb{C}$) とすると (パラメータ generic なら, $u(x, y)$ はパラメータに正則に依存しているとする) それぞれ一意に定まることが言える. これは 2 変数函数 $u(x, y)$ の満たす方程式が Appell の F_1 の満たす方程式になることから分かる.

このような多変数化は rigid な Fuchs 型常微分方程式に対していつでも可能なことが [3] によって示され, 多変数化したものは KZ 型方程式となる (cf. [4, 13]). 特に特異点の数が 4 点以上の Fuchs 型方程式は, 多変数化して KZ 型方程式として扱うのがよい. これについては, 別の機会に譲るが, 多変数化した場合の Riemann scheme の middle convolution での変換を具体的に与える [12] の結果が重要な役割を果たす. rigid でない Dotsenko-Fateev 方程式なども解析できる.

注意 6.4. 方程式が既約となるための必要十分条件も, Katz reduction から以下のように分かる.

Jordan-Pochhammer (6.3) の $\mathbf{m} = 21, 21, 21, 21$ の場合を例にとると, Katz reduction は

$$\begin{array}{l} \underline{21}, \underline{21}, \underline{21}, \underline{21} \xrightarrow[\underline{2}]{-\underline{2}} \underline{01}, \underline{01}, \underline{01}, \underline{01} \xrightarrow[\underline{1}]{-} \underline{10}, \underline{01}, \underline{01}, \underline{01} \xrightarrow[\underline{1}]{-} 10, \underline{10}, \underline{01}, \underline{01} \xrightarrow[\underline{1}]{-} 10, 10, \underline{10}, \underline{01} \searrow \\ 2(10, 10, 10, 10) \stackrel{\pm 2}{*} \hspace{15em} \underline{10}, \underline{10}, \underline{10}, \underline{10} \\ 01, 10, 10, 10 \stackrel{\pm 1}{*} \underline{-11}, \underline{00}, \underline{00}, \underline{00} \leftarrow * \\ 10, 01, 10, 10 \stackrel{\pm 1}{*} \underline{00}, \underline{-11}, \underline{00}, \underline{00} \leftarrow \underline{00}, \underline{-11}, \underline{00}, \underline{00} \leftarrow * \\ 10, 10, 01, 10 \stackrel{\pm 1}{*} \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11}, \underline{00} \leftarrow \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11}, \underline{00} \leftarrow \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11}, \underline{00} \leftarrow * \\ 10, 10, 10, 01 \stackrel{\pm 1}{*} \underline{00}, \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11} \leftarrow \underline{00}, \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11} \leftarrow \underline{00}, \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11} \leftarrow \underline{00}, \underline{00}, \underline{00}, \underline{-11} \leftarrow * \end{array}$$

となる。1行目は、スペクトル型の middle convolution にあたる変換と、その後のスペクトル型の monotone への変換とを施していく Katz reduction を図示したものである。monotone への変換は、各特異点毎に隣り合った重複度を交換する操作 ($m_{j,\nu}$ と $m_{j,\nu+1}$ の入れ換え) を1ステップずつ図示している。この例では合計のステップ数は、5ステップ (この例では middle convolution にあたるものは1回のみで \Rightarrow で図示している)。

各ステップ (矢印) 毎に、あるスペクトル型が対応するので、それを図示したものが2行目以降に書かれている。各ステップで、スペクトル型がどのように減少したかをまず図示し、それから各ステップを逆に辿っていく操作 (対応する重複度の交換と middle convolution にあたる変換) を行って、得られていくスペクトル型を図示する (\Rightarrow , \Leftarrow の上に $-d(\mathbf{m})$ の値を示した)。出発点まで遡って得られる5つのスペクトル型は

$$\Sigma(21, 21, 21, 21) := \{10, 10, 10, 10, 01, 10, 10, 10, 10, 01, 10, 10, 10, 10, 01, 10, 10, 10, 01\}$$

である。途中で“重複度”に負の整数が現れることがあるが、最終的には rigid なスペクトル型が、ステップの個数だけ得られるので、それを $\Sigma(\mathbf{m})$ と書くと、既約となるための必要十分条件は

$$\sum_{j=1}^{p+1} m'_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} \notin \mathbb{Z} \quad (\forall \mathbf{m}' \in \Sigma(\mathbf{m})) \quad (6.4)$$

で与えられる。従って今の例の場合 (拡張した Appell の F_1 でも同じ) は以下のようになる。

$$\{e, a+e, b+e, c+e, d\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset.$$

6.4 Schlesinger 標準形

$u(x) := x^\lambda(1-x)^{\lambda'}$ は

$$u' = \left(\frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda'}{x-1} \right) u \quad (6.5)$$

を満たす。よって

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u \\ x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{x^2}u + \frac{\lambda'}{x(x-1)}u \\ \frac{\lambda}{x(x-1)}u + \frac{\lambda'-1}{(x-1)^2}u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{x} & \frac{\lambda'}{x-1} \\ \frac{\lambda}{x-1} & \frac{\lambda'-1}{x-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \\ u \end{pmatrix}$$

となるが、これを大久保標準形^{*23}に書くと

$$\begin{pmatrix} x & \\ & x-1 \end{pmatrix} \frac{dv}{dx} = \begin{pmatrix} \lambda-1 & \lambda' \\ \lambda & \lambda'-1 \end{pmatrix} v \quad \left(v = \begin{pmatrix} u \\ x \\ u \end{pmatrix} \right)$$

となる。 $I_{\mu+1}$ または $\tilde{I}_{\mu+1}$ を施すと、(2.1) より

$$\begin{pmatrix} x & \\ & x-1 \end{pmatrix} \frac{d\tilde{u}}{dx} = \begin{pmatrix} \lambda+\mu & \lambda' \\ \lambda & \lambda'+\mu \end{pmatrix} \tilde{u} \quad (\tilde{u} = I_{\mu+1}(v))$$

^{*23} n 次正方形行列 A, B によって $(x-A)u' = Bu$ と表される1階システムで、通常 A は対角行列とする。

となる. すなわち

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = \frac{\begin{pmatrix} \lambda + \mu & \lambda' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{x} \tilde{u} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \lambda' + \mu \end{pmatrix}}{x-1} \tilde{u} \quad (6.6)$$

となる.

(6.5)において λ と λ' を n 次正方行列とすれば, (6.5)は $x=0, 1, \infty$ に特異点をもつFuchs型方程式の**Schlesinger 標準形**であり, $\lambda, \lambda', -(\lambda + \lambda')$ は $x=0, 1, \infty$ における方程式の**留数行列**と呼ばれる. それらの(対角化可能として)固有値とその重複度を各特異点で並べて書いたものをSchlesinger標準形のGRSとする^{*24}. (6.6)は, 複素パラメータ μ によるconvolutionと定義され, 各留数行列は \mathbb{C}^{2n} 上の線型変換を与える. 共通の不変部分空間

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \ker \lambda \\ \ker \lambda' \end{pmatrix} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} w \\ w \end{pmatrix} \mid w \in \ker(\lambda + \lambda' + \mu) \right\} \quad (6.7)$$

による商空間 $\mathbb{C}^{2n}/\mathcal{K}$ に各留数行列が誘導する変換を適当な基底で行列表示する. この行列を留数行列とするSchlesinger標準形の方程式を(6.5)の**middle convolution** mc_μ を施した結果と定義する (cf. [2, 4]). Additionは留数行列にスカラー行列を加える操作となる.

λ, λ' が0でないスカラーの場合は \mathcal{K} は0となり, (6.6)はGaussの超幾何微分方程式をSchlesinger標準形におけるadditionとmiddle convolutionによって, 自明な方程式から構成したものとみなせ, そのRiemann schemeは

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & -\mu \\ \lambda + \mu & \lambda' + \mu & -\lambda - \lambda' - \mu \end{array} \right\}$$

となる.

$x=0$ の留数行列の固有値 $\lambda + \mu$ の固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対応する局所解と, $x=1$ の留数行列の固有値 $\lambda' + \mu$ の固有ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対応する局所解とを考えると, 前者から後者への接続係数 C が定義される (パラメータは一般で, $x \in (0, 1)$ とする):

$$\begin{aligned} u_0(x) - x^{\lambda+\mu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\in \mathcal{O}_0^2 + x^{\lambda+\mu+1} \mathcal{O}_0^2, \\ u_0(x) - C(1-x)^{\lambda'+\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\in \mathcal{O}_1^2 + (1-x)^{\lambda'+\mu+1} \mathcal{O}_1^2. \end{aligned}$$

接続係数 $c(0:\lambda + \mu \rightsquigarrow 1:\lambda' + \mu) = C$ を具体的に計算してみよう.

$$\begin{aligned} I_{\mu+1}\left(\frac{u}{x}\right) &= I_{\mu+1}(x^{\lambda-1}(1-x)^{\lambda'}) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda + \mu + 1)} x^{\lambda+\mu} (1 + C_{0,1}x + \cdots) \\ &\equiv \frac{\Gamma(-\lambda' - \mu - 1)}{\Gamma(-\lambda')} (1-x)^{\lambda'+\mu+1} (1 + C_{1,1}(1-x) + \cdots) \pmod{\mathcal{O}_1}, \\ I_{\mu+1}\left(\frac{u}{x-1}\right) &= I_{\mu+1}(x^\lambda(1-x)^{\lambda'-1}) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + \mu + 1)} x^{\lambda+\mu+1} (1 + C'_{0,1}x + \cdots) \\ &\equiv \frac{\Gamma(-\lambda' - \mu)}{\Gamma(-\lambda' + 1)} (1-x)^{\lambda'+\mu} (1 + C'_{1,1}(1-x) + \cdots) \pmod{\mathcal{O}_1} \end{aligned}$$

^{*24} $[\lambda]_m$ で固有値 λ の重複度が m であることを表す. 行列が対角可能でない場合については, [9, §3]を参照. また, Fuchs条件は無限遠点を含めた全ての留数行列の固有値の重複度込みの和が0という条件になる.

より

$$c(0:\lambda + \mu \rightsquigarrow 1:\lambda' + \mu) = \frac{\Gamma(\lambda + \mu + 1) \cdot \Gamma(-\lambda' - \mu)}{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(-\lambda' + 1)}$$

を得る. これに $\text{Ad}(x^{\lambda_{1,1}}(1-x)^{\lambda_{2,1}})$ を施して GRS を対称的な形に直すと

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} & \lambda_{3,1} \\ \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} & \lambda_{3,2} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \lambda_{1,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{2,2} + \lambda_{3,1} + \lambda_{3,2} = 0, \\ \lambda + \mu = \lambda_{1,2} - \lambda_{1,1}, \quad \lambda' + \mu = \lambda_{2,2} - \lambda_{2,1}, \\ \mu = -\lambda_{1,1} - \lambda_{2,1} - \lambda_{3,1}, \end{array} \quad (6.8)$$

$$c(0:\lambda_{1,2} \rightsquigarrow 1:\lambda_{2,2}) = \frac{\Gamma(\lambda_{1,2} - \lambda_{1,1} + 1) \cdot \Gamma(\lambda_{2,1} - \lambda_{2,2})}{\Gamma(\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{3,1}) \cdot \Gamma(\lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{3,2} + 1)}. \quad (6.9)$$

注意 6.5. GRS (6.8) は $\lambda_{3,1}$ と $\lambda_{3,2}$ の入れ換えで不変であるが, 接続係数 (6.9) は不変ではない.

単独方程式の場合と同様, Schlesinger 標準形における Katz reduction の逆をたどれば与えられた rigid な GRS をもつ Schlesinger 標準形の Fuchs 型方程式を構成することができるが (cf. [2]), それは単独方程式の場合と異なり Katz reduction のやり方に依存してしまう*25.

たとえば, GRS (6.8) において, $\lambda_{1,1} = \lambda_{2,1} = 0$ であったとき, Katz reduction を $\text{mc}_{\lambda_{3,1}}$ とするか, $\text{mc}_{\lambda_{3,2}}$ とするかの違いに起因して異なったものが得られる.

求められた Schlesinger 標準形の方程式の留数行列は特性指数に正則に依存していて, 一般のパラメータ値では両者は同型であるが, 同型とはならないパラメータ値が存在してしまう*26. これは Schlesinger 標準形の場合の (通常の意味での) 接続係数が GRS のみからでは定まらないことの原因である. 接続問題を解くことが [7] での主目的にあったので, そこでは Schlesinger 標準形をほとんど用いなかった. 一方, 多変数化の解析では Schlesinger 標準形が便利であろう.

6.5 不確定特異点

定理 1.1 や versal addition (cf. [7, 10]), 合流と unfolding (cf. [10]), 多変数化 (cf. [10, 12, 13]), Fuchs 型方程式の semilocal な考察 (cf. [14]) などが役立つ. これについては別の機会に譲る.

6.6 補足

より広い話題を含めての日本語での解説が [6, 10, 13] にある. [6] では単独高階の Fuchs 型方程式に対して, 一般化 Riemann scheme および Katz reduction の説明とともに Deligne-Simpson 問題と接続問題について証明をつけて解説してある. [10] では不確定特異点, KZ 拡張などを含んだ幅広い解説がなされ, [13] では KZ 拡張を中心に多くの計算例が挙げられている.

*25 ここでは正則パラメータつきで middle convolution を考えている.

*26 方程式が可約となるパラメータ値でのみ起こり得る.

参考文献

- [1] Crawley-Boevey, C., On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspaces and sum zero, *Duke Math. J.* **118** (2003), 339–352.
- [2] Dettweiler, T. and S. Reiter, An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems, *J. Symbolic Comput.* **30** (2000), 761–798.
- [3] Haraoka, Y., Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements, *Adv. Studies in Pure Math.* **62** (2012), 109–136.
- [4] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房, 2015, 363pp.
- [5] Katz, N. M., Rigid Local Systems, *Annals of Mathematics Studies*, vol. 139, Princeton University Press, 1995.
- [6] 大島利雄, 特殊函数と代数的線型常微分方程式, 東京大学数理科学, レクチャーノート **11**, 2011, 111pp (廣惠一希記).
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/publication/documents/spfct3.pdf>
- [7] Oshima, T., Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, *MSJ Memoirs*, vol. 11, Mathematical Society of Japan, 2012, 203pp.
- [8] Oshima, T., An elementary approach to the Gauss hypergeometric function, *Josai Mathematical Monographs* **6** (2013), 3–23.
- [9] Oshima, T., Classification of Fuchsian systems and their connection problem, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B37** (2013), 163–192.
- [10] 大島利雄, Riemann 球面上の複素常微分方程式と多変数超幾何函数, 第 14 回岡シンポジウム講義録, 53–97, 奈良女子大, 2016.
http://www.nara-wu.ac.jp/omi/oka_symposium.html
- [11] Oshima, T., Reducibility of hypergeometric equations, *Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, Trends in Mathematics*, 425–453, Birkhäuser, 2017.
- [12] Oshima, T., Transformations of KZ type equations, *Microlocal Analysis and Singular Perturbation Theory, RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B61** (2017), 141–162.
- [13] 大島利雄, KZ 型超幾何系の変換と解析, 表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題, 数理解析研究所講義録 **2031** (2017), 124–158.
- [14] Oshima, T., Semilocal monodromy of rigid local system, to appear in *Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2018.
- [15] 大島利雄, `os_muldif.rr`, 数式処理 Risa/Asir のライブラリ, 2008–2018.
<ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif/>
- [16] Simpson, C. T., Products of Matrices, *Canadian Math. Soc. Conference Proceedings* **12** (1991), 157–185, AMS, Providence RI.