KZ 型超幾何系の変換と解析

Transformation and Analysis of Hypergeometric Systems of KZ type

大島利雄
Toshio Oshima
城西大学 理学部
Faculty of Science, Josai University

Abstract

The middle convolution introduced by Katz is extended to an operation on a regular holonomic system by Haraoka. Using this operation on a KZ type equation together with other related transformations, we can analyze the equation, in particular, its residue matrices and the irreducibility of its solution space. We examine examples of hypergeometric functions with two variables realized by solutions of these KZ type equations, which include Appell's hypergeometric functions.

1　はじめに

$(x_0,\dots,x_n)$ 変数の未知関数を成分とするサイズ N の縦ベクトル $u(x)$ に対する

$$d\,u = \Bigl(\sum_{0\le i\le n} A_{i,j}\,d\log(x_i-x_j)\Bigr)u \tag{1}$$

という方程式を KZ（Knizhnik–Zamolodchikov [9]）型方程式（以下，単に **KZ 方程式**）という．$A_{i,j}$ は複素数成分の N 次の正方行列で，N を方程式の階数という．これは

$$\frac{\partial\,u}{\partial\,x_i} = \sum_{\nu\in\{0,\dots,n\}\setminus\{i\}} \frac{A_{i,\nu}}{x_i-x_\nu}u \qquad (i=0,\dots,n)$$

という連立方程式と同値であるが，積分可能条件から

$$[A_{i,j},A_{k,\ell}] = [A_{i,j},A_{i,k}+A_{j,k}] = 0 \tag{2}$$

を得る（異なる添え字は異なる数字を表すとする）．

互いに異なる添え字 i, j と $i_1,\dots,i_m$ に対して

$$A_{i,i}:=0,\quad A_{i,j}=A_{j,i},\quad A_{i,n+1}:=-\sum_{\nu=1}^{n}A_{i,\nu},\quad A_{i_1,\dots,i_m}:=\sum_{1\le p<q\le m}A_{i_p,i_q} \tag{3}$$

とおくと（$x_{n+1}=\infty$ に対応する），I, $J\subset\{0,\dots,n+1\}$ と $L\subset\{0,\dots,n\}$ に対して

$$[A_I,A_J]=0 \qquad \text{if}\ \ I\cap J=\emptyset\ \ \text{or}\ \ I\subset J\ \ \text{or}\ \ J\subset I, \tag{4}$$

$$A_{0,\dots,n} = A_L - A_{\{0,\dots,n+1\}\setminus L} \tag{5}$$

が成り立ち，$A_{0,\ldots,n}$ は全ての $A_{i,j}$ と可換なので，方程式の既約性を仮定すると

$$A_{0,\ldots,n} = \kappa I_N \tag{6}$$

となる複素数 κ があるとしてよい（以下これを仮定する）.

ここで $x_1, \ldots, x_n$ を固定して $x = x_0$ を変数とみなすと

$$\mathcal{N} : \frac{du}{dx} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{A_{0,\nu}}{x - x_\nu} u \tag{7}$$

という **Schlesinger 型**の常微分方程式が得られる．このような Fuchs 型常微分方程式に関しては，Katz の導入した **middle convolution** mc_μ がきっかけとなって飛躍的に解析が進み，多くのことが解明された（[8], [11], [4]）．なお，mc_μ は “x 変数についての $-\mu$ 階の微分” と見なされるものであり，関数 $u(x)$ に対して Riemann-Liouville 積分を行うことに対応する．Schlesinger 型の方程式に対する middle convolution は Dettweiler-Reiter [2] によって留数行列の組 $\{A_{0,1}, \ldots, A_{0,n+1}\}$ の変換に翻訳されたが，これはさらに原岡 [3] によって KZ 方程式を含む多変数の場合に拡張された.

Schlesinger 型の常微分方程式に対し，各留数行列 $A_{0,\nu}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ の共役類を与えると，方程式が一意的に決まってしまう場合，すなわち $(A_{0,1}, \ldots, A_{0,n+1})$ の同時共役類が決まったしまう場合を**リジッド**という．$A_{0,\nu}$ が対角化可能なとき，その固有値の重複度は N の分割

$$N = m_{\nu,1} + \cdots + m_{\nu,r_\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, n+1) \tag{8}$$

の組（それを**スペクトル型**という）を与えるが,

$$\mathrm{idx}\,\mathcal{N} := 2N^2 - \sum_{\nu=1}^{n+1} \Bigl(N^2 - \sum_{\nu=1}^{r_j} m_{j,\nu}^2 \Bigr) \tag{9}$$

を**リジッド指数**という．$\mathcal{N}$ が既約ならば $\mathrm{idx}\,\mathcal{N} \leq 2$ であり，$2 - \mathrm{idx}\,\mathcal{N}$ は方程式の特異点での局所的性質（$A_{0,\nu}$ の各共役類達）から決まらないモジュライ空間の次元となる．すなわち $\mathrm{idx}\,\mathcal{N} = 2$ が方程式がリジッドとなるための必要十分条件となる（cf. [8]）.

リジッドな常微分方程式 (7) は，middle convolution とゲージ変換（特に addition という）$u \mapsto (x - x_\nu)^{\lambda_\nu} u$ の繰り返しによって階数 1 の自明な方程式 $\frac{du}{dx} = 0$ に変換される．また，これらの変換は可逆なので，リジッドな常微分方程式 (7) は自明な方程式から middle convolution と addition で構成できることになる．一般の場合は $\mathrm{idx}\,\mathcal{N}$ がこれらの変換における不変量となるが，スペクトル型の空間は $\mathrm{idx}\,\mathcal{N}$ 毎に有限軌道に別れる（cf. [12, 11]）．その変換は，Crawley-Boevy [1] が quiver の表現と関連して導入した無限次元の星形 Kac-Moody ルート系の Weyl 群による作用と見なすことが出来て，Riemann 球面上の Fuchs 型方程式の全体の空間への作用が明らかになった.

リジッドな方程式 (7) は自明な方程式から middle convolution と addition で構成できるので，原岡 [3] の変換に拡張すれば，リジッドな方程式 (7) から KZ 方程式 (1) が得られることになる．この拡張は（$(y_2, \ldots, y_n)$ の関数倍を除いて）一意，よって逆に KZ 方程式 (1) から得られた常微分方程式 (7) が既約リジッドならば，それはこのようにして構成されるものであることも分かる.

KZ 方程式全体の空間には，x_0 変数に注目した middle convolution の他に，対称性に起因する変数 x_i の置換が作用している．Fuchs 型常微分方程式の大域解析には，局所的性質がどのように変換

されるかを知ることがキーであった．KZ 方程式についてのこのような解析は，これからの課題である．この方向で，まず [14] が得られたが，全貌を明らかにするには至っていない．常微分方程式に限ってもリジットという枠の中では閉じない広い変換が得られることでも興味深い（cf. § 5.11）．

2　方程式の変換と多変数超幾何関数

KZ 方程式 (1) は留数行列 $A_{i,j}$ で定まるが，$u \mapsto (x_1 - x_2)^{-\kappa} u$ という変換により，$A_{0,\dots,n} = 0$ が満たされるとしてよい．このとき $A_{0,n+1} + \cdots + A_{n,n+1} = 0$ となるので，留数行列 $\{A_{i,j}\}$ の $n+1$ 個の添え字を任意に入れ替えたものも KZ 方程式となる．すなわち $(n+2)$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{n+2}$ が KZ 方程式の空間に作用している．

KZ 方程式は，Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 内の $n+2$ 個の点 $\{x_0, \dots, x_{n+2}\}$ の配置空間上の方程式とみなせて，一次分数変換が作用している．一次分数変換によって 3 点は $0, 1, \infty$ に移して考えることが出来るので，KZ 方程式の解は実質的に残りの $n-1$ 変数の関数（**超幾何関数**）と考えられる．たとえば Gauss の超幾何関数 $F_2(\alpha, \beta, \gamma; x)$ は

$$u(t_0, t_1, t_x) = F\big(\alpha, \beta, \gamma; \tfrac{t_x - t_0}{t_1 - t_0}\big) = F\big(\alpha, \beta, \gamma; \tfrac{(t_1 - t_\infty)(t_x - t_0)}{(t_x - t_\infty)(t_1 - t_0)}\big)$$

とおくと 3 変数 t_0, t_1, t_x の KZ 方程式を満たすことが分かる（$n = 2$ に対応する．なお，∞ も動かせば t_0, t_1, t_∞, t_x の 4 変数となる）．

$n = 2$ の場合は，常微分方程式に帰着され，$\kappa = 0$ とした KZ 方程式において $A_{0,1} + A_{0,2} + A_{1,2} = 0$ となるので，$A_{1,2} = A_{0,3}$ が成立し，実際には $\mathfrak{S}_3$ の作用とみなせる（添え字 $\{1, 2, 3\}$ の置換）．

KZ 方程式 (1) が真に多変数の超幾何微分方程式と見なせるのは $n \geq 3$ のときであり，簡単のため，このノートでは主に $n = 3$ の場合，すなわち 2 変数の超幾何関数の場合を主に扱う．この場合は，たとえば $x_0 = x$, $x_1 = 0$, $x_2 = y$, $x_4 = \infty$ とおいて KZ 方程式 (1) の解 $u(x, 0, y, 1)$ を超幾何関数と考える．Appell の超幾何関数は，この最も簡単な例となっていることが分かる（cf. §5）．

$u \mapsto (x_i - x_j)^\lambda u$ という変換は，$A_{i,j}$, $A_{i,n+1}$, $A_{j,n+1}$ の 3 つをそれぞれ $A_{i,j} + \lambda$，$A_{i,n+1} - \lambda$，$A_{j,n+1} - \lambda$ と変換することに対応する（**addition**）．

x_0 変数に対する middle convolution $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}$ は以下のように定義される．簡単のため，$n = 3$ の場合を述べよう（一般の場合でも同様）．元の方程式が Schlesinger 型方程式として既約ならば（すなわち $A_{0,\nu}$ が非自明共通不変部分空間を持たないとき）$\mathrm{mc}_{x_0,0}$ は恒等写像と定義される．まず，$\mu \neq 0$ のときは，**convolution** が

$$\tilde{A}_{0,1} = \begin{pmatrix} A_{0,1} + \mu & A_{0,2} & A_{0,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_{0,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_{0,1} & A_{0,2} + \mu & A_{0,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{0,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{0,1} & A_{0,2} & A_{0,3} + \mu \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_{1,2} = \begin{pmatrix} A_{0,2} + A_{0,2} & -A_{0,2} & 0 \\ -A_{0,1} & A_{0,1} + A_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & A_{1,2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{2,3} = \begin{pmatrix} A_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & A_{0,3} + A_{2,3} & -A_{0,3} \\ 0 & -A_{0,2} & A_{0,2} + A_{2,3} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{1,3} = \begin{pmatrix} A_{0,3} + A_{1,3} & 0 & -A_{0,3} \\ 0 & A_{1,3} & 0 \\ -A_{0,1} & & A_{0,1} + A_{1,3} \end{pmatrix}$$

によって定まる階数 $3N$ の（一般には可約な）KZ 方程式として定義される．このとき

$$\mathcal{K} := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} v+v_1 \\ v+v_2 \\ v+v_3 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{C}^{3N} \;\middle|\; v \in \ker(A_{0,1}+A_{0,2}+A_{0,3}+\mu),\ v_j \in \ker A_{0,\nu} \right\} \tag{10}$$

が $\tilde{A}_{i,j}$ の共通の不変部分空間となるので，$\mathbb{C}^{3N}/\mathcal{K}$ 上に $\tilde{A}_{i,j}$ が誘導する線型変換を適当な基底で表現した表現行列を $\bar{A}_{i,j}$ とおき，得られる KZ 方程式を middle convolution $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}$ による変換と定義する．方程式の階数は N から $3N - \dim \mathcal{K}$ に変わる．また $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}$ の逆変換は $\mathrm{mc}_{x_0,-\mu}$ となる．

この変換によって方程式の階数をできるだけ下げるには，addition によって各 $\ker A_{0,\nu}$ の次元が最大になるようにあらかじめ変換し，また μ を調整して $\ker(A_{0,1}+A_{0,2}+A_{0,3}+\mu)$ の次元が最大になるように取ればよい．簡単のため $A_{i,j}$ が対角化可能として，$A_{0,\nu}$ の固有値の重複度が (8) のようになっているとしよう．このとき Schlesinger 型方程式 (7) のスペクトル型を

$$\mathbf{m} := m_{n+1,1}\cdots m_{n+1,r_{n+1}}, m_{1,1}\cdots m_{1,r_1}, \cdots, m_{n,1}\cdots m_{n,r_n}$$

で定義する．各特異点での重複度は

$$m_{j,\nu} \geq m_{j,\nu+1} \quad (\forall \nu,\ j)$$

と大きい順に並んでいるとしてよい．このとき

$$d(\mathbf{m}) = m_{1,1} + \cdots + m_{n+1,1} - (n-1)N \tag{11}$$

とおくと，上の middle convolution による reduction は，各 $m_{j,1}$ が $m_{j,1} - d(\mathbf{m})$ に変わることが分かる．よって階数は N から $N - d(\mathbf{m})$ に変わる．

$\mathbf{m}$ がリジッドな方程式のスペクトル型を与えるための必要十分条件は，この変換のあと各特異点で重複度を大きい順に並べ替える変換とを合わせた変換を考え，それを反復することにより階数が 1 まで単調に減少することであることが言える（途中で負の重複度が現れたなら，既約に実現が不可能なスペクトル型であり，減らないことがあれば，それは実現可能だがリジッドとはならない）．

たとえば Gauss の超幾何のスペクトル型は $11, 11, 11$ で，Appell の F_4 にあたる超幾何のスペクトル型は $22, 22, 31, 22$ となるが，それらのスペクトル型のリダクションは（[16] や [17] で計算可能）

$$\begin{aligned}
&\underline{1}1, \underline{1}1, \underline{1}1 \overset{-1}{\Rightarrow} 01, 01, 01 \longrightarrow 10, 10, 10 \\
&\underline{2}2, \underline{2}2, \underline{3}1, \underline{2}2 \overset{-1}{\Rightarrow} 12, 12, 21, 12 \longrightarrow \underline{2}1, \underline{2}1, \underline{2}1, \underline{2}1 \overset{-2}{\Rightarrow} 01, 01, 01, 01 \longrightarrow 10, 10, 10, 10
\end{aligned} \tag{12}$$

となってリジッドなスペクトル型であることが分かる（$\Rightarrow$ の上の数字は $-d(\mathbf{m})$）．

留数行列 $A_{0,\nu}$ の重複度 $m_{j,\nu}$ に対応する固有値を $\lambda_{j,\nu}$ とするとき，方程式 (7) の**一般化 Riemann scheme** を

$$\left\{ \begin{matrix} x_{n+1} & x_1 & \cdots & x_n \\ [\lambda_{n+1,1}]_{m_{n+1,1}} & [\lambda_{1,1}]_{m_{1,1}} & \cdots & [\lambda_{n,1}]_{m_{n,1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\lambda_{n+1,r_{n+1}}]_{m_{n+1,r_{n+1}}} & [\lambda_1, r_1]_{m_{1,r_1}} & \cdots & [\lambda_{n,r_n}]_{m_{n,r_n}} \end{matrix} \right\} \tag{13}$$

によって定義する（$[\lambda]_1$ は単に λ と略記してもよい）．middle convolution による $A_{i,j}$ の固有値とスペクトル型の変換については §4 で述べる．

$n=3$ のときに 2 変数 (x,y) の超幾何関数とみたときの x_j の添え字の置換から誘導される (x,y) の座標変換を列記する（$x_0=x$, $x_1=0$, $x_2=y$, $x_3=1$）.

$\mathfrak{S}_5$ に同型な 120 個の座標変換

$$(1-y,1-x),\ (1-y,\tfrac{1-y}{1-x}),\ (1-y,\tfrac{x-y}{x}),\ (1-y,\tfrac{(1-y)x}{x-y}),$$
$$(y,x),\ (y,\tfrac{y}{x}),\ (y,\tfrac{y-x}{1-x}),\ (y,\tfrac{(1-x)y}{y-x}),$$
$$(1-x,1-y),\ (1-x,\tfrac{-x+y}{y}),\ (1-x,\tfrac{1-x}{1-y}),\ (1-x,\tfrac{(1-x)y}{y-x}),$$
$$(x,y),\ (x,\tfrac{x-y}{1-y}),\ (x,\tfrac{x}{y}),\ (x,\tfrac{(1-y)x}{x-y}),$$
$$(\tfrac{1}{1-y},\tfrac{1}{1-x}),\ (\tfrac{1}{1-y},\tfrac{x-y}{(1-y)x}),\ (\tfrac{1}{1-y},\tfrac{x}{x-y}),\ (\tfrac{1}{1-y},\tfrac{1-x}{1-y}),$$
$$(\tfrac{1}{1-x},\tfrac{1}{1-y}),\ (\tfrac{1}{1-x},\tfrac{y}{y-x}),\ (\tfrac{1}{1-x},\tfrac{1-y}{1-x}),\ (\tfrac{1}{1-x},\tfrac{y-x}{(1-x)y}),$$
$$(\tfrac{1}{y},\tfrac{1}{x}),\ (\tfrac{1}{y},\tfrac{x}{y}),\ (\tfrac{1}{y},\tfrac{x-1}{x-y}),\ (\tfrac{1}{y},\tfrac{y-x}{(1-x)y}),$$
$$(\tfrac{1}{x},\tfrac{1}{y}),\ (\tfrac{1}{x},\tfrac{1-y}{x-y}),\ (\tfrac{1}{x},\tfrac{y}{x}),\ (\tfrac{1}{x},\tfrac{x-y}{(1-y)x}),$$
$$(\tfrac{y}{y-x},\tfrac{1}{1-x}),\ (\tfrac{y}{y-x},\tfrac{1-y}{x-y}),\ (\tfrac{y}{y-x},\tfrac{y}{y-1}),\ (\tfrac{y}{y-x},\tfrac{(1-x)y}{y-x}),$$
$$(\tfrac{1-y}{x-y},\tfrac{1}{x}),\ (\tfrac{1-y}{x-y},\tfrac{y}{y-x}),\ (\tfrac{1-y}{x-y},\tfrac{y-1}{y}),\ (\tfrac{1-y}{x-y},\tfrac{(1-y)x}{x-y}),$$
$$(\tfrac{y}{y-1},\tfrac{y}{y-x}),\ (\tfrac{y}{y-1},\tfrac{x-y}{1-y}),\ (\tfrac{y}{y-1},\tfrac{x}{x-1}),\ (\tfrac{y}{y-1},\tfrac{(1-x)y}{(1-y)x}),$$
$$(\tfrac{y}{x},y),\ (\tfrac{y}{x},\tfrac{1}{x}),\ (\tfrac{y}{x},\tfrac{1-y}{1-x}),\ (\tfrac{y}{x},\tfrac{(1-x)y}{(1-y)x}),$$
$$(\tfrac{y-1}{y},\tfrac{1-y}{x-y}),\ (\tfrac{y-1}{y},\tfrac{-x+y}{y}),\ (\tfrac{y-1}{y},\tfrac{x-1}{x}),\ (\tfrac{y-1}{y},\tfrac{(1-y)x}{(1-x)y}),$$
$$(\tfrac{1-y}{1-x},1-y),\ (\tfrac{1-y}{1-x},\tfrac{1}{1-x}),\ (\tfrac{1-y}{1-x},\tfrac{y}{x}),\ (\tfrac{1-y}{1-x},\tfrac{(1-y)x}{(1-x)y}),$$
$$(\tfrac{-x+y}{y},1-x),\ (\tfrac{-x+y}{y},\tfrac{y-1}{y}),\ (\tfrac{-x+y}{y},\tfrac{x-y}{1-y}),\ (\tfrac{-x+y}{y},\tfrac{y-x}{(1-x)y}),$$
$$(\tfrac{x-y}{1-y},x),\ (\tfrac{x-y}{1-y},\tfrac{y}{y-1}),\ (\tfrac{x-y}{1-y},\tfrac{-x+y}{y}),\ (\tfrac{x-y}{1-y},\tfrac{x-y}{(1-y)x}),$$
$$(\tfrac{x-y}{(1-y)x},\tfrac{1}{1-y}),\ (\tfrac{x-y}{(1-y)x},\tfrac{1}{x}),\ (\tfrac{x-y}{(1-y)x},\tfrac{x-y}{1-y}),\ (\tfrac{x-y}{(1-y)x},\tfrac{x-y}{x}),$$
$$(\tfrac{x}{y},x),\ (\tfrac{x}{y},\tfrac{1}{y}),\ (\tfrac{x}{y},\tfrac{1-x}{1-y}),\ (\tfrac{x}{y},\tfrac{(1-y)x}{(1-x)y}),$$
$$(\tfrac{x}{x-1},\tfrac{y}{y-1}),\ (\tfrac{x}{x-1},\tfrac{x}{x-y}),\ (\tfrac{x}{x-1},\tfrac{y-x}{1-x}),\ (\tfrac{x}{x-1},\tfrac{(1-y)x}{(1-x)y}),$$
$$(\tfrac{x}{x-y},\tfrac{1}{1-y}),\ (\tfrac{x}{x-y},\tfrac{x}{x-1}),\ (\tfrac{x}{x-y},\tfrac{x-1}{x-y}),\ (\tfrac{x}{x-y},\tfrac{(1-y)x}{x-y}),$$
$$(\tfrac{1-x}{1-y},1-x),\ (\tfrac{1-x}{1-y},\tfrac{1}{1-y}),\ (\tfrac{1-x}{1-y},\tfrac{x}{y}),\ (\tfrac{1-x}{1-y},\tfrac{(1-x)y}{(1-y)x}),$$
$$(\tfrac{x-1}{x},\tfrac{y-1}{y}),\ (\tfrac{x-1}{x},\tfrac{x-1}{x-y}),\ (\tfrac{x-1}{x},\tfrac{x-y}{x}),\ (\tfrac{x-1}{x},\tfrac{(1-x)y}{(1-y)x}),$$
$$(\tfrac{x-1}{x-y},\tfrac{1}{y}),\ (\tfrac{x-1}{x-y},\tfrac{x}{x-y}),\ (\tfrac{x-1}{x-y},\tfrac{x-1}{x}),\ (\tfrac{x-1}{x-y},\tfrac{(1-x)y}{y-x}),$$
$$(\tfrac{x-y}{x},1-y),\ (\tfrac{x-y}{x},\tfrac{x-y}{(1-y)x}),\ (\tfrac{x-y}{x},\tfrac{x-1}{x}),\ (\tfrac{x-y}{x},\tfrac{y-x}{1-x}),$$
$$(\tfrac{y-x}{1-x},y),\ (\tfrac{y-x}{1-x},\tfrac{x}{x-1}),\ (\tfrac{y-x}{1-x},\tfrac{x-y}{x}),\ (\tfrac{y-x}{1-x},\tfrac{y-x}{(1-x)y}),$$
$$(\tfrac{y-x}{(1-x)y},\tfrac{1}{1-x}),\ (\tfrac{y-x}{(1-x)y},\tfrac{1}{y}),\ (\tfrac{y-x}{(1-x)y},\tfrac{-x+y}{y}),\ (\tfrac{y-x}{(1-x)y},\tfrac{y-x}{1-x}),$$
$$(\tfrac{(1-y)x}{x-y},1-y),\ (\tfrac{(1-y)x}{x-y},x),\ (\tfrac{(1-y)x}{x-y},\tfrac{1-y}{x-y}),\ (\tfrac{(1-y)x}{x-y},\tfrac{x}{x-y}),$$
$$(\tfrac{(1-x)y}{y-x},y),\ (\tfrac{(1-x)y}{y-x},1-x),\ (\tfrac{(1-x)y}{y-x},\tfrac{y}{y-x}),\ (\tfrac{(1-x)y}{y-x},\tfrac{x-1}{x-y}),$$
$$(\tfrac{(1-x)y}{(1-y)x},\tfrac{y}{y-1}),\ (\tfrac{(1-x)y}{(1-y)x},\tfrac{y}{x}),\ (\tfrac{(1-x)y}{(1-y)x},\tfrac{1-x}{1-y}),\ (\tfrac{(1-x)y}{(1-y)x},\tfrac{x-1}{x}),$$
$$(\tfrac{(1-y)x}{(1-x)y},\tfrac{y-1}{y}),\ (\tfrac{(1-y)x}{(1-x)y},\tfrac{1-y}{1-x}),\ (\tfrac{(1-y)x}{(1-x)y},\tfrac{x}{y}),\ (\tfrac{(1-y)x}{(1-x)y},\tfrac{x}{x-1})$$

3 Irreducibility of Equations

リジッドな Schlesinger 型方程式 (7) が常微分方程式として**既約**（解空間のモノドロミー群が既約といっても同じ）となるための必要十分条件を得る具体的なアルゴリズムを与えよう．実際には，Kac-Moody ルート系の言葉で述べられる（cf. [11, 14]）．

それは，方程式のスペクトル型 $\mathbf{m}$ のリダクションから以下のように得られる．リダクションは middle convolution による変換のステップと重複度を大きい順に並べ替える隣接互換のステップとからなるが，各ステップに対し一つの条件が対応する．各ステップでのスペクトル型の差から出発して，そこから逆に $\mathbf{m}$ までたどって得られるスペクトル型 $\widetilde{\mathbf{m}_i} = k_\nu \mathbf{m}_i$ の $\mathbf{m}_i$ を集めた集合 $\Sigma(\mathbf{m})$ を考える．ただし $\widetilde{\mathbf{m}_i}$ は最大公約数で括って $k_i\mathbf{m}_i$ と表す．なお

$$k_i = 2NN_i - \sum_j \bigl(NN_i - \sum_\nu \mathbf{m}_{j,\nu} \cdot (\mathbf{m}_i)_{j,\nu}\bigr) \tag{14}$$

が成立する（ただし，$N_i = \sum_\nu (\mathbf{m}_i)_{1,\nu}$）．ここで

$$\mathbf{m} = k_i\mathbf{m}_i \oplus \mathbf{m}'_i \tag{15}$$

という分解が重要である．方程式の一般化 Riemann scheme (13) に対し

$$\Bigl\{ \sum_{j,\nu} (\mathbf{m}_i)_{j,\nu} \cdot \lambda_{j,\nu} \Bigm| i = 1, \ldots \Bigr\} \tag{16}$$

のいずれの元も整数とはならないことが**既約性の必要十分条件**となる．

Appell の F_1 に対応するスペクトル型 $21, 21, 21, 21$ の例では

$$\begin{array}{l}
\underline{2}1,\underline{2}1,\underline{2}1,\underline{2}1 \ \overset{-2}{\underset{2}{\rightrightarrows}} \underline{0}1,\underline{0}1,\underline{0}1,\underline{0}1 \underset{1}{\to} \underline{10},01,01,01 \underset{1}{\to} 10,\underline{10},01,01 \underset{1}{\to} 10,10,\underline{10},01 \underset{1}{\searrow} \\
2(10,10,10,10) \overset{\pm 2}{\Leftarrow} \ * \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 10,10,10,10 \\
01,10,10,10 \ \overset{\pm 1}{\Leftarrow} \underline{-1}1,\underline{0}0,\underline{0}0,\underline{0}0 \leftarrow \ * \\
10,01,10,10 \ \overset{\pm 1}{\Leftarrow} \underline{0}0,\underline{-1}1,\underline{0}0,\underline{0}0 \leftarrow \underline{00},-11,00,00 \leftarrow \ * \\
10,10,01,10 \ \overset{\pm 1}{\Leftarrow} \underline{0}0,\underline{0}0,\underline{-1}1,\underline{0}0 \leftarrow \underline{00},00,-11,00 \leftarrow 00,\underline{00},-11,00 \leftarrow \ * \\
10,10,10,01 \ \overset{\pm 1}{\Leftarrow} \underline{0}0,\underline{0}0,\underline{0}0,\underline{-1}1 \leftarrow \underline{00},00,00,-11 \leftarrow 00,\underline{00},00,-11 \leftarrow 00,00,\underline{00},-11 \leftarrow *
\end{array}$$

となるので

$$\Sigma(21,21,21,21) = \{10,10,10,10,\ 01,10,10,10,\ 10,01,10,10,\ 10,10,01,10,\ 10,10,10,10\}$$

と 5 つのスペクトル型からなり，それから既約分解に対応する $\mathbf{m}$ の分解が 5 つ得られる：

$$\begin{aligned}
21,21,21,21 &= 2(10,10,10,10) \oplus (01,01,01,01) \\
21,21,21,21 &= 01,10,10,10 \oplus 20,11,11,11 \\
21,21,21,21 &= 10,01,10,10 \oplus 11,20,11,11 \\
21,21,21,21 &= 10,10,01,10 \oplus 11,11,20,11 \\
21,21,21,21 &= 10,10,10,01 \oplus 11,11,11,20
\end{aligned} \tag{17}$$

スペクトル型 $21, 21, 21, 21$ の方程式の Riemann scheme が

$$\begin{Bmatrix} x=0 & x=1 & x=y & x=\infty \\ [0]_2 & [0]_2 & [0]_2 & [a]_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b \end{Bmatrix}$$

であったとすると, (16) より

$$\{a,\ a+a_1,\ a+a_2,\ a+a_3,\ b\}$$

のいずれも整数でないことが既約性の必要十分条件となる.

なお $\mathbf{m}_i \in \Sigma(\mathbf{m})$ はリジッドなスペクトル型となるが，それは $\mathbf{m}$ の分解 (15) の $\mathbf{m}'_i$ で分類される.

Definition 1. $\Sigma(\mathbf{m})$ に現れる $\mathbf{m}_i$ は以下の 3 つのいずれかのタイプに分かれる.

Type 1 : $\mathbf{m}'_i$ の各成分は非負整数

Type 2 : $\mathbf{m}'_i$ の成分に（ある一つの特異点で）1 と -1 が各一つずつ現れ, 残りの成分は全て 0

Type 3 : $\mathbf{m}'_i$ の各成分に正整数は現れない

Type 1 では $\mathbf{m}'_i$ が，Type 3 では $-\mathbf{m}'_i$ がリジッドなスペクトル型になる.

Theorem 2 ([14, Proposition 2.5])**.** 既約条件を表す (16) の元の中で，Type 3 に対応するものは省いてよい（他の元から来る条件に含まれる）.

リジッドな Schlesinger 型方程式 (7) に対応する KZ 方程式 (1) の既約性については以下が言える.

Theorem 3 ([14, Theorem 3.3])**.** 既約条件を表す (16) の元の中で，Type 1 や Type 2 に対応するものが整数でなければ方程式 (1) は（モノドロミー群が）既約である．また，Type 1 に対応するものが整数であれば可約である．Type 3 に対応するものは省いてよい（他の Type 1 の元から来る条件に含まれる）.

Remark 4. 上の定理で，KZ 方程式の既約性条件に Type 2 に対応するものは不要であろうと予想される．いずれにせよ，Type 2 の条件が成立するときは，モノドロミー群が既約でも，ある種の分解が存在することが分かる．たとえば，$u(x,y) = F(\alpha,\beta,\gamma;x)\cdot F(\alpha,\beta,\gamma;y)$ は階数 4 の方程式を満たし α, β, γ が一般ならそのモノドロミー群は既約である．実際 Appell の F_4 ではこのようなことが起こる．Type 2 の分解が起こるときは, 分解の 1 と -1 の重複度を一つにまとめたスペクトル型が 2 以上のある整数で割り切れるときのみで，そのような分解はあまりない（cf. §5.9).

4 Middle convolution

$A_{0,j}$ のスペクトル型と固有値が $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}$ によってどのように変化するかの記述は ([2] にあるように) 容易であるが，$A_{i,j}$ $(0 < i < j)$ のスペクトル型の変化はより理解が困難であった．その記述が [14] によって得られたので解説する．簡単のため $A_{i,j}$ は対角化可能とする（cf. [11, Theorem 12.10]).

対角化可能行列 A の固有値 λ_ν とその重複度 m_ν の組の集合を

$$[A] = \{[\lambda_1]_{m_1}, [\lambda_2]_{m_2}, \ldots\}$$

のように表す．$A_{0,j} = \{[\lambda_{j,1}]_{m_{j,1}}, [\lambda_{j,2}]_{m_{j,2}}, \ldots\}$ となっていたとする．記述を簡単にするため $m_{j,1} = 0$ となることを許すと

$$\lambda_{1,1} = \cdots = \lambda_{n,1} = 0,\ \lambda_{n+1,1} = \mu$$

と仮定してよい．これらは $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}$ によって

$$\begin{aligned}[A_{0,j}] &\mapsto \{[0]_{m_{j,1}-d(\mathbf{m})},\, [\lambda_{j,2}+\mu]_{m_{j,2}}, \ldots\} \qquad (j = 1, \ldots, n),\\ [A_{0,n+1}] &\mapsto \{[-\mu]_{m_{n+1,1}-d(\mathbf{m})},\, [\lambda_{n+1,2}-\mu]_{m_{n+1,2}}, \ldots\}\end{aligned}$$

と変換される．

KZ 方程式の留数行列に対して $\{[A_{i,j}]\}$ が $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}$ でどのように変換されるかは，$\{[A_{i,j}]\}$ の情報からだけでは分からない．それを知るには可積分条件 (4) がキーとなる．

N 次正方行列 A, B が可換とする．共に対角化可能とすると同時対角化が出来るので，同時（一般）固有空間分解が可能となる．同時固有空間の固有値とその重複度を $[\lambda:\mu]_m$ のように書いて，その全体を $[A:B]$ と表す．たとえば $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$ のときは

$$[A:B] = \bigl\{[0:1]_1, [0:2]_2, [-1:3]_1\bigr\} = \bigl\{[0:1], [0:2]_2, [-1:3]\bigr\}$$

である（添え字の 1 は略してよい）．このような情報を使うことにより，以下の結果が得られる．

Theorem 5 ([14, Theorem 4.1])**.** $\bigl\{[A_{i,j} : A_{0,k}],\, [A_{0,i} : A_{0,i,j}] \mid \{i,j,k\} \subset \{1, \ldots, n+1\}\bigr\}$ が分かっていれば，これらを $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}$ で変換したものがどうなるかが分かる．

具体的には [14] を参照して下さい．

$n = 3$ のときは $A_{0,1,2} = \kappa - A_{3,4}$ などとなることから，より簡単になって $\{[A_I : A_J] \mid \#I = \#J = 2,\ I \cap J = \emptyset\}$ のみで閉じて以下の定理から計算できる．

Theorem 6 ([14, Theorem 7.1])**.** $n = 3$ とする．(10) の $\mathcal{K}$ は．

$$\mathcal{K}_1 = \begin{pmatrix} \ker A_{0,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \ker A_{0,2} \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ker A_{0,3} \end{pmatrix},\ \mathcal{K}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \end{pmatrix} \,\middle|\, v \in \ker(A_{0,4} - \mu) \right\}$$

の 4 つの $\mathbb{C}^{3N}$ の部分空間の直和となるが，任意の添え字の集合 $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ に対し

$$\begin{aligned}
[\tilde{A}_{i,j} : \tilde{A}_{0,k}] &= [A_{i,j} : A_{0,k} + \mu] \cup [A_{i,j} : 0] \cup [A_{0,4} - \kappa : 0],\\
[\tilde{A}_{i,j} : \tilde{A}_{0,k}]|_{\mathcal{K}_\nu} &= \begin{cases} [A_{k,4} + \kappa : 0]|_{\mathrm{Ker}\, A_{0,\nu}} & (\nu = i,\, j),\\ [A_{i,j} : \mu]|_{\mathrm{Ker}\, A_{0,k}} & (\nu = k),\\ [A_{i,j} : 0]|_{\mathrm{Ker}\,(A_{0,4}-\mu)} & (\nu = 4),\end{cases}\\
[\tilde{A}_{i,4} : \tilde{A}_{0,k}] &= [A_{i,4} : A_{0,k} + \mu] \cup [A_{i,4} : 0] \cup [A_{j,k} - \kappa - \mu : 0],\\
[\tilde{A}_{i,4} : \tilde{A}_{0,k}]|_{\mathcal{K}_\nu} &= \begin{cases} [A_{j,k} - \kappa - \mu : 0]_{\mathrm{Ker}\, A_{0,i}} & (\nu = i),\\ [A_{i,4} : 0]|_{\mathrm{Ker}\, A_{0,j}} & (\nu = j),\\ [A_{i,4} : \mu]|_{\mathrm{Ker}\, A_{0,k}} & (\nu = k),\\ [A_{j,k} - \kappa - \mu : 0]|_{\mathrm{Ker}\,(A_{0,4}-\mu)} & (\nu = 4),\end{cases}
\end{aligned}$$

$$[\tilde{A}_{i,j}:\tilde{A}_{0,4}] = [A_{i,j}:A_{0,4}-\mu]\cup[A_{i,j}:-\mu]\cup[A_{k,4}+\kappa:-\mu],$$

$$[\tilde{A}_{i,j}:\tilde{A}_{0,4}]|_{\mathcal{K}_\nu} = \begin{cases}[A_{k,4}+\kappa:-\mu]|_{\mathrm{Ker}\,A_{0,\nu}} & (\nu=i,\,j),\\ [A_{i,j}:-\mu]|_{\mathrm{Ker}\,A_{0,k}} & (\nu=k),\\ [A_{i,j}:0]|_{\mathrm{Ker}\,(A_{0,4}-\mu)} & (\nu=4),\end{cases}$$

$$[\tilde{A}_{i,j}:\tilde{A}_{k,4}] = [A_{i,j}:A_{i,j}-\kappa-\mu]\cup[A_{i,j}:A_{k,4}]\cup[A_{k,4}+\kappa:A_{k,4}],$$

$$[\tilde{A}_{i,j}:\tilde{A}_{k,4}]|_{\mathcal{K}_\nu} = \begin{cases}[A_{k,4}+\kappa:A_{k,4}]|_{\mathrm{Ker}\,A_{0,\nu}} & (\nu=i,\,j),\\ [A_{i,j}:A_{i,j}-\kappa-\mu]|_{\mathrm{Ker}\,A_{0,k}} & (\nu=k),\\ [A_{i,j}:A_{i,j}-\kappa-\mu]|_{\mathrm{Ker}\,(A_{0,4}-\mu)} & (\nu=4).\end{cases}$$

となる．すなわち $I,\,J\subset\{0,1,2,3,4\}$，$\#I=\#J=2$, $I\cap J=\emptyset$ のとき $[A_I:A_J]$ は $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}$ によって

$$[A_I:A_J]\mapsto[\tilde{A}_I:\tilde{A}_J]\setminus\bigcup_{\nu=1}^{4}[\tilde{A}_I:\tilde{A}_J]|_{\mathcal{K}_\nu},\quad \kappa\mapsto\kappa+\mu$$

と変換される．

Remark 7. i) 上の定理を利用して，例えば $[A_{1,2}:A_{0,3}]$ が $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}$ でどのように変わるかを知るためには，$[A_{1,2}:A_{0,3}]$, $[A_{3,4}:A_{0,1}]$, $[A_{3,4}:A_{0,2}]$, $[A_{1,2}:A_{0,4}]$ のデータが必要である．

ii) $n=3$ のとき，上の定理の $[A_I:A_J]$ は 15 組ある．

iii) $I,\,J\subset\{0,1,2,3,4\}$, $\#I=\#J=2$ とする．$I\cap J=\emptyset$ のときは，$[A_I:A_J]$ から $[A_I]$ や $[A_I+A_J]$ が分かる．一方 $\#(I\cap J)=1$ のときは，$A_{0,1}+A_{0,2}=A_{0,1,2}-A_{1,2}=\kappa-(A_{3,4}+A_{1,2})$ などから分かる．なお，κ は $\mathrm{trace}A_{i,j}$ が $[A_{i,j}]$ から分かるので $\{[A_{i,j}]\}$ から分かる．

5 Rigid spectral types

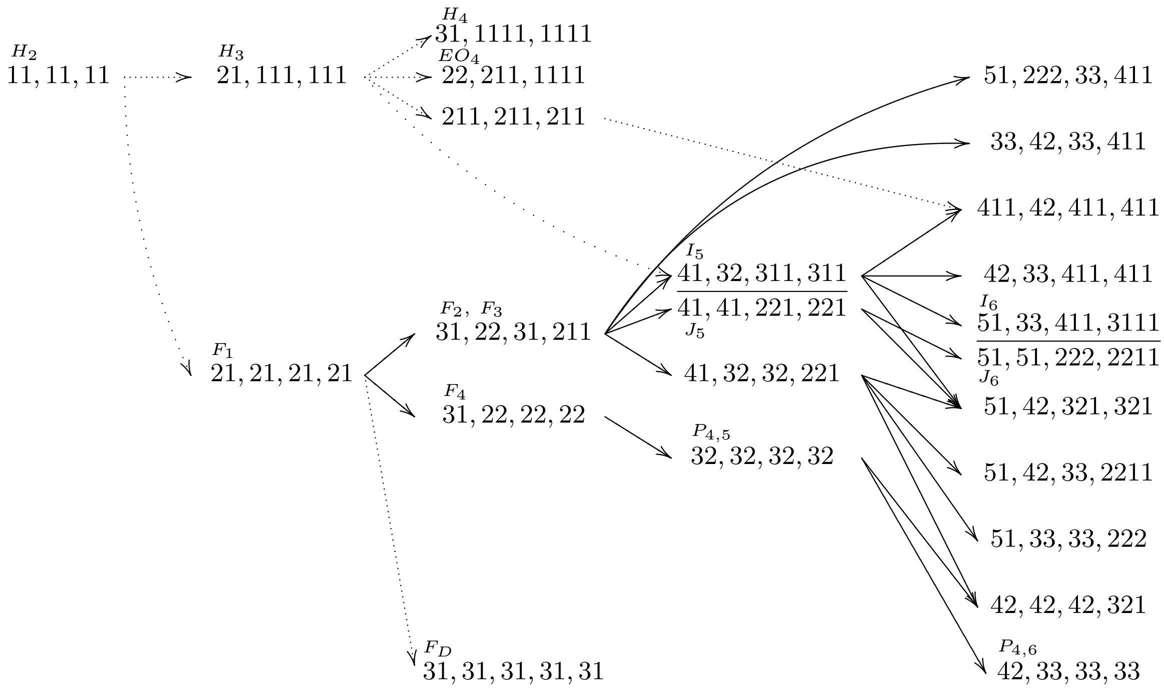
リジッドなスペクトル型は KZ 方程式に対応するが，$n-1$ が解の超幾何関数の実質的な変数の数になるので，$n\geq 3$ のときが多変数の KZ 型超幾何関数に対応する．方程式の階数が低い方から，何種類のリジッドなスペクトル型が存在するかの表を 表 1 に載せた（cf. Remark 14）．

表 1　Hypergeometric equations with less than 7 variables

Order →	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1 variable	1	1	3	5	13	20	45	74	142	212	421	588	1004	1481	2388
2 variables	0	1	2	4	11	16	35	58	109	156	299	402	685	924	1517
3 variables	0	0	1	1	3	5	12	17	43	52	104	135	263	327	560
4 variables	0	0	0	1	0	1	3	5	8	14	24	39	60	79	137
5 variables	0	0	0	0	1	0	0	2	3	4	6	6	14	20	30
6 variables	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	2	4	3	5	6

スペクトル型が $21,21,21,21$ となる常微分方程式は Jordan-Pochhammer の微分方程式となるが，その解の積分表示から，それは Appell の F_1 になることが知られていた．より一般に ∞ も含

表 2　Hierarchy of rigid quartets (cf. [11])



めて $p+2$ 個の確定特異点を持ってスペクトル型が $p1, p1, \ldots, p1$ となるものはリジッドであって Lauricella の F_D に対応している．2 変数で 4 階に対応するスペクトル型は 2 個あって，Appell の F_2, F_3, F_4 に対応している．具体的には $31, 31, 22, 211$ が F_2，F_3 に，$31, 22, 22, 22$ が F_4 に対応している．階数が大きくなるに従って，2 変数の多くの超幾何が得られるが，それらは今まで知られていなかったものであろう．

階数の小さなものにつき，1 回の middle convolution によってどのようにスペクトル型が変化するかを矢印で示して表にしたのが表 2 である（全ての矢印を描いている訳ではない）．

Remark 8. i)　リジッドなスペクトル型に対応する超幾何関数のパラメータの数は

$$\text{パラメータの数} = \sum\bigl(\#\ \text{各特異点での異なるブロックの個数} - 1\bigr) = \sum_{j=1}^{n+1}(r_j - 1) \qquad (18)$$

で与えられる．実際，有限の各特異点では異なる固有値はブロックの個数あるが，適当な addition で一つは特定の値（通常は 0）にできる．一方，$\sum_{j=1}^{n+1} \mathrm{trace} A_{0,j} = 0$ に起因する**フックスの関係式**

$$\sum_{j,\nu} m_{j,\nu}\lambda_{j,\nu} = 0 \qquad (19)$$

があるので，実質的なパラメータの数は (18) のようになる．リジッドな方程式は，一般化 Riemann scheme から一意に定まることに注意．

ii)　表 2 において矢印は二つのスペクトル型が addition と一つの middle convolution で変換されることを意味している．また，Appell の F_2 と F_3 は同一の KZ 方程式の異なる点での局所座標による解のべき級数表示に対応し，I_5 と J_5 は同一の KZ 方程式の異なる変数に対応する Schlesinger 方程式となっている．

iii) リジッドな方程式やそれに対応する KZ 方程式の解は積分表示を持つ．一般化 Riemann scheme における特性指数 $\lambda_{j,\nu}$ を整数ずらしたものに対応する解には微分作用素で与えられる**隣接関係式**が存在する（cf. [11, Theorem 11.2]）．このことから方程式の既約条件（モノドロミー群が既約となる条件）は，特性指数を整数ずらしても変わらないことが言える（cf. [13, Lemma 2.1]).

iv) リジッドなスペクトル型に対し，特性指数および変数の多項式を係数とする単独高階常微分方程式が一意に存在することが言える (cf. [11, Theorem 6.14])．しかしながら Schlesinger 型の方程式の場合は，可約となる特性指数への拡張が一意とは限らないため，一意性が崩れる．たとえば Gauss の超幾何に対応する Schlesinger 型の方程式の Riemann scheme $\begin{Bmatrix}\lambda_{0,1} & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1}\\ \lambda_{0,2} & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2}\end{Bmatrix}$ において Fuchs 条件 $\sum_{j,\nu}\lambda_{j,\nu}=0$ が成り立っているが，この方程式は $\lambda_{0,j}+\lambda_{1,j}+\lambda_{2,j}=0$ $(j=1,\,2)$ のとき可約になる．このとき，(一般には完全可約でない）既約商の Riemann scheme が $\{\lambda_{0,1}\ \lambda_{1,1}\ \lambda_{2,1}\}$ になるか $\{\lambda_{0,2}\ \lambda_{1,2}\ \lambda_{2,2}\}$ になるかは既約な方程式からの拡張（一意でない）に依存する．addition と middle convolution を使った構成の仕方によると言ってもよい．

5.1 Examples

middle convolution mc_μ や分解を与える $\Sigma(\mathbf{m})$ の計算 (接続公式もこれを用いて表せる (cf. [11])) や Theorem 6 を利用した計算を実現するため，数式処理 `Risa/Asir` のライブラリ [17] を作成しており，この節の例の多くの結果はそれを用いて計算することができる．

解の積分表示やべき級数による表示は [11] の結果が適応できるので，ここでは方程式の具体型やモノドロミー群の既約性などについて扱う．

5.2 Appell's F_1

$du=0$ に対応する trivial な方程式の addition $1\mapsto\left(\prod_{\nu=1}^{3}(x_0-x_\nu)^{\lambda_\nu}\right)\cdot 1$ によって階数 1 の KZ type equation (1) が得られて，それは

$$A_{0,i}=\lambda_i,\quad A_{0,4}=-\lambda_{123},\quad A_{i,j}=0,\quad A_{i,4}=-\lambda_i,\quad \kappa=\lambda_{123}\qquad(\{i,j,k\}=\{1,2,3\})$$

となる（$\lambda_{ij}=\lambda_i+\lambda_j$，$\lambda_{123}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$）．次に $\mu\in\mathbb{C}$ に対して $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}$ を施すと Appell の超幾何級数 F_1 の満たす方程式に対応する KZ 方程式が得られる．それは

$$a_0=-\mu,\ a_j=\lambda_j+\mu,\ a_{123}=a_1+a_2+a_3\ \text{ and }\ a_{ij}=a_i+a_j\quad(0\le i<j\le 3),$$

とおくと

$$A_{0,1}=\begin{pmatrix}a_1&a_{02}&a_{03}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad A_{0,2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\a_{01}&a_2&a_3\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad A_{0,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\a_{01}&a_{02}&a_3\end{pmatrix},$$

$$A_{1,2}=\begin{pmatrix}a_{02}&-a_{02}&0\\-a_{01}&a_{01}&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&a_{03}&-a_{03}\\0&-a_{02}&a_{02}\end{pmatrix},\quad A_{1,3}=\begin{pmatrix}a_{03}&0&-a_{03}\\0&0&0\\-a_{01}&0&a_{01}\end{pmatrix}.$$

となり（cf. §1），その一般化 Riemann scheme（各 $A_{i,j}$ の固有値とその重複度の表）は

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} & A_{23} \\ x=0 & x=y & x=1 & x=\infty & y=0 & y=1 & t_0=t_1 \\ [0]_2 & [0]_2 & [0]_2 & [a_0]_2 & [0]_2 & [0]_2 & [0]_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -2a_0-a_{123} & 2a_0+a_{12} & 2a_0+a_{13} & 2a_0+a_{23} \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{ccc} A_{14} & A_{24} & A_{34} \\ t_0=\infty & y=\infty & t_1=\infty \\ [-a_{01}]_2 & [-a_{02}]_2 & [-a_{03}]_2 \\ -2a_0-a_{123} & -2a_0-a_{123} & -2a_0-a_{123} \end{array}\right\}$$

となる．また定理 6 を適用すると以下が得られる．

$$\begin{aligned} [A_{i,j}:A_{0,k}] &= \bigl\{[0:a_k],\, [0:0],\, [-\lambda_{ij}:0]\bigr\}, \\ [A_{i,4}:A_{0,k}] &= \bigl\{[-\lambda_i:\lambda_k+\mu],\, [-\lambda_i:0],\, [-\lambda_{123}-\mu:0]\bigr\}, \\ [A_{i,j}:A_{0,4}] &= \bigl\{[0:-\lambda_{123}-\mu],\, [0:-\mu],\, [-\lambda_{ij}:-\mu]\bigr\}, \\ [A_{i,j}:A_{k,4}] &= \bigl\{[0:-\lambda_{123}-\mu],\, [0:-\lambda_k],\, [-\lambda_{ij}:-\lambda_k]\bigr\}. \end{aligned}$$

$\mathbf{m} = \mathbf{21},\mathbf{21},\mathbf{21},\mathbf{21}$: rank$=3$ with 4 parameters and $[\Sigma(\mathbf{m})] = 1^4\cdot 2^1$

なお，$[\Sigma(\mathbf{m})]$ は $\Sigma(\mathbf{m})$ の型（cf. [11, Remark 7.11 ii)] の $[\Delta(\mathbf{m})]$ と同じ）．
$21,21,21,21 \ \rightarrow\ 01,01,01,01 \quad H_2 : 11,11,11,20$ (middle convolution での変換)
$= 10,10,10,01 \oplus 11,11,11,20$ (可約性: 対称性から 4 cases, cf. §3 (17))
$= 2(10,10,10,10) \oplus 01,01,01,01$ (1 case)
$10,10,10,01 : 2a_0 + a_{123} \notin \mathbb{Z}$（既約条件）
$10,10,01,10 : a_{03} \notin \mathbb{Z}$
$10,01,10,10 : a_{02} \notin \mathbb{Z}$
$01,10,10,10 : a_{01} \notin \mathbb{Z}$
$10,10,10,10 : a_0 \notin \mathbb{Z}$
これらの分解は全て Type 1（$\Rightarrow$ 5 条件）

	t_∞	t_0	t_y	t_1	t_x	idx
t_∞		21	21	21	21	2
t_0	21		21	21	21	2
t_y	21	21		21	21	2
t_1	21	21	21		21	2
t_x	21	21	21	21		2

KZ 方程式の解において $x_0 = x$, $x_1 = 0$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, $x_4 = \infty$ とおいて 2 変数 (x, y) の超幾何関数と考える．分かりやすくするため，上では $x_0 = x$, $x_1 = t_0$, $x_2 = t_y$, $x_3 = t_1$, $x_4 = t_\infty$ とおいている．上の表の最下行は，$x = t_x$ 変数の Schlesinger 型常微分方程式とみたときのスペクトル型が $21,21,21,21$ であること（順に ∞, 0, y, 1 での固有値の重複度データ）を示し，idx はそのリジッド指数が 2 となることを示している（5 つの変数 $x_0,\ldots,x_4$ は $\mathfrak{S}_5$ の作用で置換される）．

Appell の超幾何級数

$$F_1(\alpha;\beta,\beta';\gamma;x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}\,(\beta)_m\,(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}\,m!\,n!}\,x^m y^n$$

は

$$a_0 = \beta, \quad a_1 = \beta' - \gamma + 1, \quad a_2 = -\beta - \beta', \quad a_3 = \gamma - \alpha - \beta - 1$$

によって KZ 方程式の解と対応し，そのことから既約性の必要十分条件は

$$\{\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \alpha-\gamma,\ \beta+\beta'-\gamma\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset.$$

であることが分かる.

$v_0=F_1(\alpha;\beta,\beta';\gamma;x,y)$, $v_1=x\frac{\partial u_0}{\partial x}$, $v_2=y\frac{\partial u_0}{\partial y}$, $v={}^t(v_0,v_1,v_2)$ とおくと v は

$$dv=\left(B_{0,1}\frac{dx}{x}+B_{0,2}\frac{d(x-y)}{x-y}+B_{0,3}\frac{d(x-1)}{x-1}+B_{1,2}\frac{dy}{y}+B_{2,3}\frac{d(y-1)}{y-1}\right)v, \tag{20}$$

$$B_{0,1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&\beta'-\gamma+1&0\\0&\beta'&0\end{pmatrix},\qquad B_{0,2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-\alpha\beta&-\alpha-\beta+\gamma-1&\beta\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$B_{0,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\beta'&\beta\\0&-\beta'&-\beta\end{pmatrix},\qquad B_{1,2}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-\beta\\0&0&\beta-\gamma+1\end{pmatrix},$$

$$B_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-\alpha\beta'&-\beta'&-\alpha-\beta'+\gamma-1\end{pmatrix}$$

という Pfaff 方程式を満たすが，対応は

$$A_{i,j}=R^{-1}B_{i,j}R\qquad\bigl((i,j)\in\{(0,1),\,(0,2),\,(0,3),\,(1,2),\,(2,3)\}\bigr),$$

$$R:=\begin{pmatrix}1&0&0\\\beta\beta'-\gamma+1&-\beta'&-\alpha+\gamma-1\\\beta'&\beta'&0\end{pmatrix}$$

で与えられる（なお，$A_{1,3}=\kappa I_3-A_{1,2}-A_{2,3}-\sum_{\nu=1}^{3}A_{0,\nu}$ に注意）.

5.3 Appell's F_2, F_3

$\mathbf{211,22,31,31}$: rank$=4$, 5 parameters, $(1^6\cdot 2^2)$

$\to\ F_1: 201,21,21,21\quad H_2: 011,02,11,11$

$=010,01,10,10\oplus 201,21,21,21\quad(4)$

$=101,11,11,20\oplus 110,11,20,11\quad(2)$

$=2(100,01,10,10)\oplus 011,20,11,11\quad(2)$

これらは全て Type 1.

	t_∞	t_0	t_y	t_1	t_x	idx
t_∞		211	211	211	211	-8
t_0	211		31	31	22	2
t_y	211	31		22	31	2
t_1	211	31	22		31	2
t_x	211	22	31	31		2

上の分解は，以下のようにして得られる.

$\underline{2}11,\underline{2}2,\underline{3}1,\underline{3}1\ \overset{-2}{\underset{2}{\Rightarrow}}\ \underline{01}1,02,11,11\ \to\ 1\underline{01},02,11,11\ \to\ 110,\underline{02},11,11\ \to\ \underline{1}10,\underline{2}0,\underline{1}1,\underline{1}1\overset{-1}{\Rightarrow}\ \cdots$

$2(100,10,10,10)\overset{\pm2}{\Leftarrow}\ *$

$010,10,10,10\ \overset{\pm1}{\Leftarrow}\ \underline{-1}10,\underline{0}0,\underline{0}0,\underline{0}0\ \leftarrow\ *$

$001,10,10,10\ \overset{\pm1}{\Leftarrow}\ \underline{-1}01,\underline{0}0,\underline{0}0,\underline{0}0\ \leftarrow\ \underline{0{-1}}1,\underline{0}0,\underline{0}0,\underline{0}0\ \leftarrow\ *$

$2(100,01,10,10)\overset{\pm1}{\Leftarrow}2(\underline{0}00,\underline{-1}1,\underline{0}0,\underline{0}0)\leftarrow 2(\underline{00}0,-11,00,00)\leftarrow 2(0\underline{00},-11,00,00)\leftarrow\ *$

$010,01,10,10\ \overset{\pm0}{\Leftarrow}\ \underline{0}10,\underline{0}1,\underline{1}0,\underline{1}0\ \leftarrow\ \underline{10}0,01,10,10\ \leftarrow\ 1\underline{00},01,10,10\ \leftarrow\ 100,\underline{10},10,10\ \overset{\pm1}{\Leftarrow}\ *$

$001,01,10,10\ \overset{\pm0}{\Leftarrow}\ \underline{0}01,\underline{0}1,\underline{1}0,\underline{1}0\ \leftarrow\ \underline{00}1,01,10,10\ \leftarrow\ 1\underline{10},01,10,10\ \leftarrow\ 010,\underline{10},10,10\ \overset{\pm1}{\Leftarrow}\ \cdots$

$110,11,11,20\ \overset{\pm1}{\Leftarrow}\ \underline{0}10,\underline{0}1,\underline{0}1,\underline{1}0\ \leftarrow\ \underline{10}0,01,01,10\ \leftarrow\ 1\underline{00},01,01,10\ \leftarrow\ 100,\underline{10},01,10\ \overset{\pm1}{\Leftarrow}\ \cdots$

$110,11,20,11\ \overset{\pm1}{\Leftarrow}\ \underline{0}10,\underline{0}1,\underline{1}0,\underline{0}1\ \leftarrow\ \underline{10}0,01,10,01\ \leftarrow\ 1\underline{00},01,10,01\ \leftarrow\ 100,\underline{10},10,01\ \overset{\pm1}{\Leftarrow}\ \cdots$

一般化 Riemann scheme は

$$\left\{\begin{matrix} A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} \\ x=0 & x=y & x=1 & x=\infty & y=0 & t_0=t_1 \\ [0]_2 & [0]_3 & [0]_3 & [d]_2 & [0]_3 & [0]_3 \\ [a]_2 & b & c & e & a+b+2d & a+c+2d \\ & & & f & & \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34} \\ y=1 & t_0=\infty & y=\infty & t_1=\infty \\ [e]_2 & [-a-d]_2 & [a+c+d]_2 & [a+b+d]_2 \\ [f]_2 & e & a & a \\ & f & 0 & 0 \end{matrix}\right\}$$

となる，ただし

$$2a+b+c+2d+e+f=0$$

である．よって既約条件は

$$\{d,\,e,\,a+d,\,a+e,\,a+b+d+e,\,a+c+d+e,\,f,\,a+f\}\cap\mathbb{Z}=\emptyset. \tag{21}$$

となる．また同時固有値分解は

$$\begin{aligned}
&[A_{01}:A_{23}]=\{[a:e],\,[a:f],\,[0:e],\,[0:f]\}\,,\\
&[A_{01}:A_{24}]=\{[a:a+c+d],\,[a:a],\,[0:a+c+d],\,[0:0]\}\,,\\
&[A_{01}:A_{34}]=\{[a:a+b+d],\,[a:a],\,[0:a+b+d],\,[0:0]\}\,,\\
&[A_{02}:A_{13}]=\{[b:0],\,[0:0]_2,\,[0:a+c+2d]\}\,,\\
&[A_{02}:A_{14}]=\{[b:-a-d],\,[0:-a-d],\,[0:e],\,[0:f]\}\,,\\
&[A_{02}:A_{34}]=\{[b:a+b+d],\,[0:a+b+d],\,[0:a],\,[0:0]\}\,,\\
&[A_{03}:A_{12}]=\{[c:0],\,[0:0]_2,\,[0:a+b+2d]\}\,,\\
&[A_{03}:A_{14}]=\{[c:-a-d],\,[0:-a-d],\,[0:e],\,[0:f]\}\,,\\
&[A_{03}:A_{24}]=\{[c:a+c+d],\,[0:a+c+d],\,[0:a],\,[0:0]\}\,,\\
&[A_{04}:A_{12}]=\{[e:0],\,[f:0],\,[d:0],\,[d:a+b+2d]\}\,,\\
&[A_{04}:A_{13}]=\{[e:0],\,[f:0],\,[d:0],\,[d:a+c+2d]\}\,,\\
&[A_{04}:A_{23}]=\{[e:e],\,[f:f],\,[d:e],\,[d:f]\}\,,\\
&[A_{12}:A_{34}]=\{[0:a+b+d],\,[0:a],\,[0:0],\,[a+b+2d:a+b+d]\}\,,\\
&[A_{13}:A_{24}]=\{[0:a+c+d],\,[0:a],\,[0:0],\,[a+c+2d:a+c+d]\}\,,\\
&[A_{14}:A_{23}]=\{[-a-d:e],\,[-a-d:f],\,[e:e],\,[f:f]\}
\end{aligned}$$

となる．

この KZ 方程式は Appell の超幾何 $F_2(\alpha;\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,1-y)$ の満たす方程式となる：

$$F_2(\alpha;\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}\,(\beta)_m\,(\beta')_n}{(\gamma)_m\,(\gamma')_n\,m!\,n!}\,x^m y^n,$$

$$\begin{aligned}
&a=1-\gamma, && b=\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'-2, && c=\gamma-\alpha-\beta+\beta'-1,\\
&d=\beta, && e=\alpha-\gamma'+1, && f=\alpha
\end{aligned}$$

対応となり，既約条件 (21) は

$$\{\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \alpha-\gamma,\ \alpha-\gamma',\ \beta-\gamma,\ \beta'-\gamma',\ \alpha-\gamma-\gamma'\}\cap\mathbb{Z}=\emptyset. \tag{22}$$

具体的に書くと，満たす方程式 (20) が以下で与えられる．

$$v_0:=F_2(\alpha;\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,1-y),\quad v:={}^t\Big(v_0,\ \frac{x}{\beta}\frac{\partial\,v_0}{\partial\,x},\ \frac{y}{\beta'}\frac{\partial\,v_0}{\partial\,y},\ \frac{xy}{\beta\beta'}\frac{\partial^2\,v_0}{\partial\,x\,\partial\,y}\Big),$$

$$B_{0,1}=\begin{pmatrix}0&\beta&0&0\\0&1-\gamma&0&0\\0&0&0&\beta\\0&0&0&1-\gamma\end{pmatrix},\quad B_{0,2}=\begin{pmatrix}0&0&\beta'&0\\0&0&0&\beta'\\0&0&1-\gamma'&0\\0&0&0&1-\gamma'\end{pmatrix},$$

$$B_{0,3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-\alpha&-\alpha-\beta+\gamma-1&-\beta'&-\beta'\\0&0&0&0\\\alpha&\beta&\beta'&\beta'\end{pmatrix},$$

$$B_{1,2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-\alpha&-\beta&0&\beta\\\alpha&\beta&\alpha+\beta'-\gamma'+1&\beta\end{pmatrix},$$

$$B_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-\alpha&-\alpha-\beta+\gamma-1&-\alpha-\beta'-\gamma'&-\alpha-\beta-\beta'+\gamma+\gamma'-2\end{pmatrix}.$$

これらは数式処理 `Risa/Asir` のライブラリ [14] を用いて以下のようにして得られる．

```
[0] S="211,22,31,31"$
[1] os_md.mc2grs(S,"All")$
[2] F2=os_md.mc2grs("S",0)$
[3] F2=subst(F2,d1,d,d2,e)$
[4] F2S=os_md.simplify(F2,[2*a+b+c+2*d+e+f],4)$
[5] F2T=os_md.mc2grs(F2S,[[[2,3],f]])$
[6] S1=os_md.mc2grs(F2T,"get"|dviout=1)$
[7] S1=os_md.divmattex(S1,[6]);
[8] S2=os_md.mc2grs(F2T,"show");
[9] S3=os_md.mc2grs(F2T,"spct"|dviout=1);
```

`[1]` ではスペクトル型 $211,22,31,31$ に対応した (x,y) 変数の Pfaff 系微分方程式に対し，一般化 Riemann scheme, スペクトル型の分解，既約条件，Pfaff 系方程式が TEX のソースで得られる．

`[2]` では同時スペクトル分解のデータを得るが，`[3]` でパラメータ d_1,d_2 を d,e に置き換え，`[4]` で $2a+b+c+2d+e+f=0$ の条件のもとで表示が簡単になるように書き直し（`[2]` において `os_md.mc2grs("S",3)$` とすると `[3]`, `[4]` を含めて自動的に行う），`[5]` で $u\mapsto(x_2-x_3)^fu$ と addition を施したものに変更する．それに対して `[6]` で一般化 Riemann scheme を得て，その TEX のソースを 6 項目で改行したもの `S1` に `[7]` で変換し，同時固有空間分解の TEX のソース `S2` と idx のテーブルの TEX のソース `S3` をそれぞれ `[8]`, `[9]` で得ている．

5.4 Appell's F_4

	t_∞	t_0	t_y	t_1	t_x	idx
t_∞		211	22	211	22	-4
t_0	211		22	211	22	-4
t_y	22	22		22	31	2
t_1	211	211	22		22	-4
t_x	22	22	31	22		2

$\mathbf{31,22,22,22}$: rank$=4$, 4 parameters,

$(1^8\cdot 2^1)\quad\to\quad F_1 : 12,12,21,12$

$= 10,01,01,01 \oplus 21,21,21,21 \quad (8)$

$= 2(20,11,11,11) \oplus (-1)1,00,00,00 \quad (1)$

上の最後の分解は Type 2 となる.

この分解は以下から分かる.

$$
\begin{array}{lcl}
\underline{3}1,\underline{2}2,\underline{2}2,\underline{2}2 & \underset{1}{\overset{-1}{\Rightarrow}} & 21,\underline{12},12,12 \;\to\; 21,21,\underline{12},12 \;\to\; 21,21,21,\underline{12} \to 21,21,21,21 \;\Rightarrow \\
10,10,10,10 & \overset{+1}{\Leftarrow} & * \\
10,01,10,10 & \overset{+1}{\Leftarrow} & \underline{0}0,\underline{-1}1,\underline{0}0,\underline{0}0 \leftarrow * \\
10,10,01,10 & \overset{+1}{\Leftarrow} & \underline{00},00,-11,00 \leftarrow 00,\underline{00},-11,00 \leftarrow * \\
10,10,10,01 & \overset{+1}{\Leftarrow} & \underline{0}0,\underline{0}0,\underline{0}0,\underline{-1}1 \leftarrow 00,\underline{00},00,-11 \leftarrow 00,00,\underline{00},-11 \leftarrow * \\
2(20,11,11,11) & \overset{+1}{\Leftarrow} & 2(\underline{1}0,\underline{0}1,\underline{0}1,\underline{0}1) \leftarrow 2(10,\underline{10},01,01) \leftarrow 2(10,10,\underline{10},01) \leftarrow 2(10,10,10,\underline{10}) \Leftarrow \\
21,21,21,21 & \overset{+2}{\Leftarrow} & \underline{0}1,\underline{0}1,\underline{0}1,\underline{0}1 \;\leftarrow\; 01,\underline{01},01,01 \;\leftarrow\; 01,01,\underline{10},01 \;\leftarrow\; 01,10,10,\underline{10} \;\Leftarrow \\
10,10,01,01 & \overset{+0}{\Leftarrow} & \underline{1}0,\underline{1}0,\underline{0}1,\underline{0}1 \;\leftarrow\; 10,\underline{01},01,01 \;\leftarrow\; 10,01,\underline{10},01 \;\leftarrow\; 10,01,10,\underline{10} \;\Leftarrow \\
10,01,10,01 & \overset{+0}{\Leftarrow} & \underline{1}0,\underline{0}1,\underline{1}0,\underline{0}1 \;\leftarrow\; 10,\underline{10},10,01 \;\leftarrow\; 10,10,\underline{01},01 \;\leftarrow\; 10,10,01,\underline{10} \;\Leftarrow \\
10,01,01,10 & \overset{+0}{\Leftarrow} & \underline{1}0,\underline{0}1,\underline{0}1,\underline{1}0 \;\leftarrow\; 10,\underline{10},01,10 \;\leftarrow\; 10,01,\underline{10},10 \;\leftarrow\; 10,10,10,\underline{01} \;\Leftarrow
\end{array}
$$

対応する一般化 Riemann scheme は

$$a+b+c+d+e=0$$

という条件のもとで

$$
\begin{Bmatrix}
A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} & A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34} \\
x=0 & x=y & x=1 & x=\infty & y=0 & t_0=t_1 & y=1 & t_0=\infty & y=\infty & t_1=\infty \\
[0]_2 & [0]_3 & [0]_2 & [d]_2 & [0]_2 & [-b-c]_2 & [0]_2 & [a+c]_2 & [d]_2 & [a+b]_2 \\
[b]_2 & 2a & [c]_2 & [e]_2 & [b]_2 & 2d & [c]_2 & 2c & [e]_2 & 2b \\
 & & & & & 2e & & 0 & & 0
\end{Bmatrix}
$$

となる．ただし，$x=x_0$ 変数における addition と middle convolution の他，$u\mapsto(x_1-x_2)^a(x_2-x_3)^c(x_1-x_3)^{-a-c}u$ に対応する addition（前者の変換と可換）を行った.

Remark 9. x 変数での Schlesinger 型常微分方程式 (7) がリジッドで, その一般化 Riemann scheme が等しい 2 つの KZ 方程式は, 適当な a, b, $c\in\mathbb{C}$ によって $u\mapsto(x_1-x_2)^a(x_2-x_3)^c(x_1-x_3)^{-a-c}u$ で定まる addition で移りあう（cf. [13, Theorem 3.2]）.

同時固有空間分解は

$$
\begin{aligned}
[A_{01}:A_{23}] &= \{[b:0],\ [b:c],\ [0:0],\ [0:c]\}\,,\\
[A_{01}:A_{24}] &= \{[b:d],\ [b:e],\ [0:d],\ [0:e]\}\,,\\
[A_{01}:A_{34}] &= \{[b:b+a],\ [b:2b],\ [0:b+a],\ [0:0]\}\,,\\
[A_{02}:A_{13}] &= \{[2a:-b-c],\ [0:-b-c],\ [0:2d],\ [0:2e]\}\,,\\
[A_{02}:A_{14}] &= \{[2a:a],\ [0:a],\ [0:c],\ [0:-c]\}\,,\\
[A_{02}:A_{34}] &= \{[2a:a],\ [0:a],\ [0:b],\ [0:-b]\}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[A_{03}:A_{12}] &= \{[c:b],\,[c:0],\,[0:b],\,[0:0]\}\,,\\
[A_{03}:A_{14}] &= \{[c:a],\,[c:c],\,[0:a],\,[0:-c]\}\,,\\
[A_{03}:A_{24}] &= \{[c:d],\,[c:e],\,[0:d],\,[0:e]\}\,,\\
[A_{04}:A_{12}] &= \{[d:0],\,[d:c],\,[e:0],\,[e:c]\}\,,\\
[A_{04}:A_{13}] &= \{[d:-b-c],\,[d:2d],\,[e:-b-c],\,[e:2e]\}\,,\\
[A_{04}:A_{23}] &= \{[d:0],\,[d:-c],\,[e:0],\,[e:-c]\}\,,\\
[A_{12}:A_{34}] &= \{[0:a],\,[0:b],\,[c:a],\,[c:-b]\}\,,\\
[A_{13}:A_{24}] &= \{[-b-c:e],\,[-b-c:d],\,[2d:e],\,[2e:d]\}\,,\\
[A_{14}:A_{23}] &= \{[a:0],\,[c:0],\,[a:-c],\,[-c:-c]\}
\end{aligned}
$$

となる.

Appell の超幾何関数

$$
F_4(\alpha,\beta;\gamma,\gamma';x,y)=\sum_{m=n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}\,(\beta)_{m+n}}{(\gamma)_m\,(\gamma')_n\,m!\,n!}\,x^m y^n
$$

に対して，加藤 [6, 7] は $u(x,y)=F_4\big(\alpha,\beta;\gamma,\gamma';xy,(1-x)(1-y)\big)$,

$$
v={}^t\!\left(v,\ \frac{x}{\alpha}\frac{\partial\,v}{\partial\,x},\ \frac{y}{\alpha}\frac{\partial\,v}{\partial\,y},\ \frac{xy}{\alpha(\alpha+\epsilon)}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\,y}\partial\,y+\frac{\epsilon}{x-y}\Big(\frac{\partial\,v}{\partial\,x}-\frac{\partial\,v}{\partial\,y}\Big)\right)\right)
$$

とおいたものが方程式

$$
\begin{cases}
x(1-x)\dfrac{\partial^2 v}{\partial\,x^2}+\big(\gamma-(\alpha+\beta+1)x\big)\dfrac{\partial\,v}{\partial\,x}-\alpha\beta v+\epsilon\dfrac{y-1}{x-y}\Big(x\dfrac{\partial\,v}{\partial\,x}-y\dfrac{\partial\,v}{\partial\,y}\Big)=0,\\
y(1-y)\dfrac{\partial^2 v}{\partial\,y^2}+\big(\gamma-(\alpha+\beta+1)y\big)\dfrac{\partial\,v}{\partial\,y}-\alpha\beta v+\epsilon\dfrac{x-1}{y-x}\Big(y\dfrac{\partial\,v}{\partial\,y}-x\dfrac{\partial\,v}{\partial\,x}\Big)=0,
\end{cases}
\tag{23}
$$

$$
\epsilon:=\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-1 \tag{24}
$$

および以下で定まる KZ 方程式 (20)

$$
B_{0,1}=\begin{pmatrix}0&\alpha&0&0\\0&1-\gamma&0&0\\0&\epsilon&0&\alpha+\epsilon\\0&0&0&1-\gamma\end{pmatrix},\ B_{0,2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\epsilon&-\epsilon&0\\0&-\epsilon&\epsilon&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ B_{0,3}=\begin{pmatrix}0&0&\alpha&0\\0&0&\epsilon&\alpha+\epsilon\\0&0&1-\gamma&0\\0&0&0&1-\gamma\end{pmatrix},
$$

$$
B_{1,2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-\beta&-\gamma'&\epsilon&0\\0&0&0&0\\0&0&-\beta-\epsilon&-\gamma'\end{pmatrix},\ B_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-\beta&\epsilon&-\gamma'&0\\0&-\beta-\epsilon&0&-\gamma'\end{pmatrix}
$$

を満たすことを示した.

ここで扱った KZ 方程式 (1) との対応は

$$
a=\epsilon,\quad b=1-\gamma,\quad c=-\gamma',\quad d=\alpha,\quad e=\beta
$$

で与えられ、それらの既約条件は

$$
\{d,\,e,\,b+d,\,b+e,\,c+d,\,c+e,\,b+c+d,\,b+c+e\}\cap\mathbb{Z}=\emptyset \tag{25}
$$

すなわち

$$
\{\alpha,\,\beta,\,\alpha-\gamma,\,\beta-\gamma,\,\alpha-\gamma',\,\beta-\gamma',\,\alpha-\gamma-\gamma',\,\beta-\gamma-\gamma'\}\cap\mathbb{Z}=\emptyset \tag{26}
$$

で与えられる．これは最初に与えた $8+1$ 個のスペクトル型の分解のうち Type 2 の分解を除いた 8 個の Type 1 の分解から得られる条件である．

Remark 10. $\epsilon=0$ のとき方程式 (23) は積に分解する解

$$v(\alpha,\beta,\gamma;x,y)=F(\alpha,\beta,\gamma;x)\cdot F(\alpha,\beta,\gamma;y) \tag{27}$$

を持つが，α, β, γ が一般ならば解空間のモノドロミーは既約となる．

Schlesinger 型常微分方程式 (7) が既約になるための必要十分条件は，上の (26) かつ $2\epsilon\notin\mathbb{Z}$ が成り立つことである．

Remark 11. 常微分方程式 $\frac{du}{dx}=\big(\frac{A_{01}}{x}+\frac{A_{12}}{x-y}+\frac{A_{13}}{x-1}\big)u$ はスペクトル型が $22,22,211,211$，リジッド指数が -4 で，解のモノドロミー群は，特異点 y の位置に依らない．一般に，リジッドでないこのような例の組織的研究は興味深い．この方程式を明示的に書くと以下のようになる．

$$\frac{du}{dx}=\begin{pmatrix}0&\alpha&0&0\\0&1-\gamma&0&0\\0&\epsilon&0&\alpha+\epsilon\\0&0&0&1-\gamma\end{pmatrix}\frac{u}{x}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-\beta&-\gamma'&\epsilon&0\\0&0&0&0\\0&0&-(\beta+\epsilon)&-\gamma'\end{pmatrix}\frac{u}{x-y}$$
$$+\begin{pmatrix}0&-\alpha&-\alpha&0\\\beta&\alpha+\beta&-\epsilon&-(\alpha+\epsilon)\\\beta&-\epsilon&\alpha+\beta&-(\alpha+\epsilon)\\0&\beta+\epsilon&\beta+\epsilon&2(\alpha+\beta+\epsilon)\end{pmatrix}\frac{u}{x-1}\qquad(\epsilon=\gamma+\gamma'-\alpha-\beta-1).$$

5.5 Rank 5 with 6 parameters

I_5 $\mathbf{41,32,311,311}$, J_5 $\mathbf{41,41,221,221}$: $(1^6\cdot 2^4)$

$41,41,221,221\ \rightarrow\ F_1: 21,21,021,021$
$41,32,311,311\ \rightarrow\ H_2: 11,02,011,011$
$41,41,221,221$
$=10,10,001,010\oplus 31,31,220,211\quad(4)$
$=20,11,110,110\oplus 21,30,111,111\quad(2)$
$=2(10,10,100,100)\oplus 21,21,021,021\quad(4)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		41	41	221	221	2
x_1	41		32	311	311	2
x_2	41	32		311	311	2
x_3	221	311	311		221	-10
x_4	221	311	311	221		-10

上の 10 個の分解はすべて Type 1

$$a+b+2c+d+2e+2f+g=0$$

という複素パラメータを使うと以下のようになる．

$[A_{01}:A_{23}]=\{[a:0],\,[0:0]_2,\,[0:-a-c-e-g],\,[0:-a-c-f-g]\}$,
$[A_{01}:A_{24}]=\{[a:-b-c-e-f],\,[0:-b-c-e-f]_2,\,[0:c+g],\,[0:g]\}$,
$[A_{01}:A_{34}]=\{[a:-c-d-e-f],\,[0:-c-d-e-f],\,[0:g]_2,\,[0:-d]\}$,
$[A_{02}:A_{13}]=\{[b:0],\,[0:0]_2,\,[0:-b-c-e-g],\,[0:-b-c-f-g]\}$,
$[A_{02}:A_{14}]=\{[b:-a-c-e-f],\,[0:-a-c-e-f]_2,\,[0:c+g],\,[0:g]\}$,
$[A_{02}:A_{34}]=\{[b:-c-d-e-f],\,[0:-c-d-e-f],\,[0:g]_2,\,[0:-d]\}$,

$$[A_{03}:A_{12}] = \{[d:0],\, [c:0],\, [c:-d-g],\, [0:0],\, [0:-d-g]\}\,,$$
$$[A_{03}:A_{14}] = \{[d:-a-c-e-f],\, [c:-a-c-e-f],\, [c:c+g],\, [0:-a-c-e-f],\, [0:g]\}\,,$$
$$[A_{03}:A_{24}] = \{[d:-b-c-e-f],\, [c:-b-c-e-f],\, [c:c+g],\, [0:-b-c-e-f],\, [0:g]\}\,,$$
$$[A_{04}:A_{12}] = \{[g:0],\, [f:0],\, [f:-d-g],\, [e:0],\, [e:-d-g]\}\,,$$
$$[A_{04}:A_{13}] = \{[g:0],\, [f:0],\, [f:-b-c-e-g],\, [e:0],\, [e:-b-c-f-g]\}\,,$$
$$[A_{04}:A_{23}] = \{[g:0],\, [f:0],\, [f:-a-c-e-g],\, [e:0],\, [e:-a-c-f-g]\}\,,$$
$$[A_{12}:A_{34}] = \{[0:-c-d-e-f],\, [-d-g:-c-d-e-f],\, [0:g]_2,\, [-d-g:-d]\}\,,$$
$$[A_{13}:A_{24}] = \{[0:-b-c-e-f],\, [0:c+g],\, [-b-c-e-g:-b-c-e-f],\, [0:g],\\ [-b-c-f-g:-b-c-e-f]\}\,,$$
$$[A_{14}:A_{23}] = \{[-a-c-e-f:0],\, [c+g:0],\, [-a-c-e-f:-a-c-e-g],\, [g:0],\\ [-a-c-e-f:-a-c-f-g]\}\,,$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc}
A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} \\
x=0 & x=y & x=1 & x=\infty & y=0 & t_0=t_1 \\
[0]_4 & [0]_4 & [0]_2 & [e]_2 & [0]_3 & [0]_3 \\
a & b & [c]_2 & [f]_2 & [-d-g]_2 & -b-c-e-g \\
 & & d & g & & -b-c-f-g
\end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{cccc}
A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34} \\
y=1 & t_0=\infty & y=\infty & t_1=\infty \\
[0]_3 & [-a-c-e-f]_3 & [-b-c-e-f]_3 & [-c-d-e-f]_2 \\
-a-c-e-g & c+g & c+g & [g]_2 \\
-a-c-f-g & g & g & -d
\end{array}\right\},$$

既約条件は

$$\{e,\, f,\, g,\, c+e,\, c+f,\, c+g,\, d+e,\, d+f,\, a+c+e+f,\, b+c+e+f\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset.$$

対応する (x,y) 変数の超幾何微分方程式を Pfaff 系の形で表示すると

$h = c+d+e+f$ とおいて

$$du = \left(\begin{pmatrix} a & b+c+e+f & (a+e)h+(f+c)(f+d) & (b+c+e+f)h & (d+e)(d+f) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dx}{x} \right.$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a+c+e+f & b & (a+c+e+f)h & (b+e)h+(c+f)(d+f) & (d+e)(d+f) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d(x-y)}{x-y}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a+c+e+f & b+c+e+f & d \end{pmatrix} \frac{d(x-1)}{x-1}$$
$$+ \begin{pmatrix} b+c+e+f & -(b+c+e+f) & 0 & 0 & 0 \\ -(a+c+e+f) & a+c+e+f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+c+e+f & -(b+c+e+f) & 0 \\ 0 & 0 & -(a+c+e+f) & a+c+e+f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{y}$$

$$+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & h & -(a+c+e+f)h & -(b+e)h-(c+f)(d+f) & -(d+e)(d+f)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & a+c+e+f & b+d+e+f & 0\\ 0 & 0 & 0 & -(b+c+e+f) & b+c+e+f\end{pmatrix}\frac{d(y-1)}{y-1}\Bigg)u.$$

5.6 Rank 5 with 5 parameters

$\mathbf{41,32,32,221}$: $(1^7\cdot 2^3)$
$\to$ 31, 22, 22, 220 $\quad F_2$: 31, 22, 31, 121
$\quad F_1$: 21, 12, 12, 021
$=$ 10, 10, 10, 001 $\oplus$ 31, 22, 22, 220 $\quad$ (1)
$=$ 10, 01, 10, 010 $\oplus$ 31, 31, 22, 211 $\quad$ (4)
$=$ 20, 11, 11, 101 $\oplus$ 21, 21, 21, 120 $\quad$ (2)
$=$ 2(10, 10, 10, 100) $\oplus$ 21, 12, 12, 021 $\quad$ (2)
$=$ 2(20, 11, 11, 110) $\oplus$ 01, 10, 10, 001 $\quad$ (1) $\quad$ これら 10 個の分解はすべて Type 1

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		32	41	32	221	2
x_1	32		32	311	2111	−6
x_2	41	32		32	221	2
x_3	32	311	32		2111	−6
x_4	221	2111	221	2111		−18

$$f=b-2g,\quad g=a+b+c+d+e$$

とおくと Riemann scheme は

$$\begin{Bmatrix} A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} & A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34}\\ [0]_3 & [0]_4 & [0]_3 & [d]_2 & [0]_3 & [0]_3 & [0]_3 & [b-g]_2 & [-d-g]_2 & [b-g]_2\\ [a]_2 & b & [c]_2 & [e]_2 & [c+d+e+g]_2 & a+c+2d & [a+d+e+g]_2 & c+f & [-e-g]_2 & a+f\\ & & & f & & a+c+2e & & f & f & f\\ & & & & & & & -c & & -a \end{Bmatrix}$$

既約条件は

$$\{d,\ e,\ f,\ a+d,\ a+e,\ c+d,\ c+e,\ a+c+d+e,\ a+c+d+f,\ a+c+e+f\}\cap\mathbb{Z}=\emptyset,$$

同時固有空間分解は

$$\begin{aligned}
&[A_{01}:A_{23}]=\{[a:0],\ [a:a+d+e+g],\ [0:0]_2,\ [0:a+d+e+g]\},\\
&[A_{01}:A_{24}]=\{[a:-d-g],\ [a:-e-g],\ [0:-d-g],\ [0:-e-g],\ [0:f]\},\\
&[A_{01}:A_{34}]=\{[a:b-g],\ [a:a+f],\ [0:b-g],\ [0:f],\ [0:-a]\},\\
&[A_{02}:A_{13}]=\{[b:0],\ [0:0]_2,\ [0:a+c+2e],\ [0:a+c+2d]\},\\
&[A_{02}:A_{14}]=\{[b:b-g],\ [0:b-g],\ [0:c+f],\ [0:f],\ [0:-c]\},\\
&[A_{02}:A_{34}]=\{[b:b-g],\ [0:b-g],\ [0:a+f],\ [0:f],\ [0:-a]\},\\
&[A_{03}:A_{12}]=\{[c:0],\ [c:c+d+e+g],\ [0:0]_2,\ [0:c+d+e+g]\},\\
&[A_{03}:A_{14}]=\{[c:b-g],\ [c:c+f],\ [0:b-g],\ [0:f],\ [0:-c]\},\\
&[A_{03}:A_{24}]=\{[c:-d-g],\ [c:-e-g],\ [0:-d-g],\ [0:-e-g],\ [0:f]\},\\
&[A_{04}:A_{12}]=\{[f:0],\ [e:0],\ [e:c+d+e+g],\ [d:0],\ [d:c+d+e+g]\},\\
&[A_{04}:A_{13}]=\{[f:0],\ [e:0],\ [e:a+c+2e],\ [d:0],\ [d:a+c+2d]\},\\
&[A_{04}:A_{23}]=\{[f:0],\ [e:0],\ [e:a+d+e+g],\ [d:0],\ [d:a+d+e+g]\},\\
&[A_{12}:A_{34}]=\{[0:b-g],\ [0:a+f],\ [c+d+e+g:b-g],\ [0:f],\ [c+d+e+g:-a]\},
\end{aligned}$$

$$[A_{13}:A_{24}] = \{[0:-d-g],\, [0:-e-g],\, [a+c+2e:-d-g],\, [0:f],\, [a+c+2d:-e-g]\}\,,$$
$$[A_{14}:A_{23}] = \{[b-g:0],\, [c+f:0],\, [b-g:a+d+e+g],\, [f:0],\, [-c:a+d+e+g]\}\,.$$

Pfaff 系方程式は

$$du = \left(\begin{pmatrix} a & 0 & g-b & 0 & c+d \\ 0 & a & 0 & c+e & d+g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dx}{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d+g & a+e & 0 & c & 0 \\ a+d & 0 & g-b & 0 & c \end{pmatrix} \frac{d(x-1)}{x-1} \right.$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g-a & a+e & b & c+e & g-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d(x-y)}{x-y}$$
$$+ \begin{pmatrix} -(a-g) & a+e & b-g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a-g & -(a+e) & -(b-g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d+g & -(d+g) \\ 0 & 0 & 0 & -(c+e) & c+e \end{pmatrix} \frac{dy}{y}$$
$$\left. + \begin{pmatrix} a+e & -(a+e) & 0 & 0 & 0 \\ -(d+g) & d+g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(b-g) & -(c+e) & c-g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-g & c+e & -(c-g) \end{pmatrix} \frac{d(y-1)}{y-1} \right) u.$$

5.7 Rank 5 with 4 parameters

$P_{4,5}$ $\mathbf{32}, \mathbf{32}, \mathbf{32}, \mathbf{32}$: $(1^8 \cdot 2^2)$

$\to F_4 : 22, 22, 22, 31 \quad F_1 : 12, 12, 12, 12$

$= 10, 10, 10, 01 \oplus 22, 22, 22, 31 \quad (4)$

$= 21, 21, 21, 12 \oplus 11, 11, 11, 20 \quad (4)$

$= 2(\underline{10, 10, 10, 10}) \oplus 12, 12, 12, 12 \quad (1)$

$= 2(21, 21, 21, 21) \oplus -(\underline{10, 10, 10, 10}) \quad (1)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		32	32	32	32	2
x_1	32		221	221	221	-10
x_2	32	221		221	221	-10
x_3	32	221	221		221	-10
x_4	32	221	221	221		-10

最後の分解は Type 3 なので，既約条件には不要（その直前の分解に対応する条件に含まれる）.

$$a + b + c + 3d + e = 0$$

のもとで方程式および Riemann scheme は

$$du = \left(\begin{pmatrix} a & a+d & -(a+e) & -(a+d) & a+e \\ 0 & a+d & c+d & 0 & -(c+2d) \\ 0 & a+d & c+d & 0 & -(c+2d) \\ 0 & a+d & c+d & 0 & -(c+2d) \\ 0 & a+d & c+d & 0 & -(c+2d) \end{pmatrix} \frac{dx}{x} \right.$$

$$
+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(c+d) & b & 0 & c+2d & 0 \\ a+2d & 0 & b & -(a+d) & -(b+d) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d(x-y)}{x-y}
$$

$$
+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(c+d) & b+2d & 0 & c & 0 \\ 0 & -(a+d) & -(c+d) & 0 & c \end{pmatrix} \frac{d(x-1)}{x-1}
$$

$$
+\begin{pmatrix} -(a+e) & -(a+d) & a+e & 0 & 0 \\ 2(c+d) & a+d+e & -2(c+d) & 0 & 0 \\ -(a-c+d) & -(a+d) & a-c+d & 0 & 0 \\ c+d & -(a+d) & -(c+d) & -(b+d) & b+d \\ c+d & -(a+d) & -(c+d) & a+d & -(a+d) \end{pmatrix} \frac{dy}{y}
$$

$$
\left. +\begin{pmatrix} a+d+e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(c+d) & c+2d & 0 & -(c+2d) & 0 \\ -(c+d) & -(a+d) & -(b+d) & a+d & b+d \\ -(c+d) & -(b+2d) & 0 & b+2d & 0 \\ -(c+d) & a+d & c+d & -(a+d) & -(c+d) \end{pmatrix} \frac{d(y-1)}{y-1} \right) u
$$

$$
\left\{
\begin{array}{cccccc}
A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} \\
x=0 & x=y & x=1 & x=\infty & y=0 & t_0=t_1 \\
[0]_3 & [0]_3 & [0]_3 & [2d]_3 & [0]_2 & [0]_2 \\
[a]_2 & [b]_2 & [c]_2 & [e]_2 & [c+d+e]_2 & [b+d+e]_2 \\
 & & & & -c+d-e & -b+d-e
\end{array}
\right.
$$

$$
\left.
\begin{array}{cccc}
A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34} \\
y=1 & t_0=t_\infty & y=\infty & t_1=t_\infty \\
[0]_2 & [-d]_2 & [-d]_2 & [-d]_2 \\
[a+d+e]_2 & [-a-d-e]_2 & [-b-d-e]_2 & [-c-d-e]_2 \\
-a+d-e & a+d+e & b+d+e & c+d+e
\end{array}
\right\},
$$

で既約条件は

$$
\{d,\, e,\, a+d,\, b+d,\, c+d,\, d-e,\, a+2d,\, b+2d,\, c+2d\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset,
$$

同時固有空間分解は

$$
\begin{aligned}
[A_{01}:A_{23}] &= \{[a:0],\, [a:a+d+e],\, [0:0],\, [0:a+d+e],\, [0:-a+d-e]\}\,, \\
[A_{01}:A_{24}] &= \{[a:-d],\, [a:-b-d-e],\, [0:-d],\, [0:-b-d-e],\, [0:b+d+e]\}\,, \\
[A_{01}:A_{34}] &= \{[a:-d],\, [a:-c-d-e],\, [0:-d],\, [0:-c-d-e],\, [0:c+d+e]\}\,, \\
[A_{02}:A_{13}] &= \{[b:0],\, [b:b+d+e],\, [0:0],\, [0:b+d+e],\, [0:-b+d-e]\}\,, \\
[A_{02}:A_{14}] &= \{[b:-d],\, [b:-a-d-e],\, [0:-d],\, [0:-a-d-e],\, [0:a+d+e]\}\,, \\
[A_{02}:A_{34}] &= \{[b:-d],\, [b:-c-d-e],\, [0:-d],\, [0:-c-d-e],\, [0:c+d+e]\}\,, \\
[A_{03}:A_{12}] &= \{[c:0],\, [c:c+d+e],\, [0:0],\, [0:c+d+e],\, [0:-c+d-e]\}\,, \\
[A_{03}:A_{14}] &= \{[c:-d],\, [c:-a-d-e],\, [0:-d],\, [0:-a-d-e],\, [0:a+d+e]\}\,, \\
[A_{03}:A_{24}] &= \{[c:-d],\, [c:-b-d-e],\, [0:-d],\, [0:-b-d-e],\, [0:b+d+e]\}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[A_{04}:A_{12}] &= \{[e:0],\,[e:c+d+e],\,[2d:0],\,[2d:c+d+e],\,[2d:-c+d-e]\}\,,\\
[A_{04}:A_{13}] &= \{[e:0],\,[e:b+d+e],\,[2d:0],\,[2d:b+d+e],\,[2d:-b+d-e]\}\,,\\
[A_{04}:A_{23}] &= \{[e:0],\,[e:a+d+e],\,[2d:0],\,[2d:a+d+e],\,[2d:-a+d-e]\}\,,\\
[A_{12}:A_{34}] &= \{[0:-d],\,[0:-c-d-e],\,[c+d+e:-d],\,[c+d+e:c+d+e],\\
&\qquad [-c+d-e:-c-d-e]\}\,,\\
[A_{13}:A_{24}] &= \{[0:-d],\,[0:-b-d-e],\,[b+d+e:-d],\,[b+d+e:b+d+e],\\
&\qquad [-b+d-e:-b-d-e]\}\,,\\
[A_{14}:A_{23}] &= \{[-d:0],\,[-a-d-e:0],\,[-d:a+d+e],\,[a+d+e:a+d+e],\\
&\qquad [-a-d-e:-a+d-e]\}\,.
\end{aligned}
$$

5.8 Rank 6

階数 6 のリジッドな Schlesinger 型常微分方程式に対応する KZ 方程式は以下の 10 種類となる．

$\mathbf{51},\mathbf{51},\mathbf{222},\mathbf{2211}$　6 階 7 パラメータ
$=10,10,001,0001\oplus 41,41,221,2210$　(6)
$=30,21,111,1110\oplus 21,30,111,1101$　(2)
$=2(10,10,001,0100)\oplus 31,31,220,2011$　(6)
$51,33,411,411$ も含まれる（$y=x_2$ 変数）．

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		51	51	222	2211	2
x_1	51		33	411	3111	2
x_2	51	33		411	3111	2
x_3	222	411	411		222	-12
x_4	2211	3111	3111	222		-26

パラメータの間の関係式と一般化 Riemann scheme は

$$
a+b+2c+2d+2e+2f+g+h=0,
$$

$$
\left\{
\begin{matrix}
A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} & A_{23}\\
[0]_5 & [0]_5 & [0]_2 & [e]_2 & [g]_3 & [0]_4 & [0]_4\\
a & b & [c]_2 & [f]_2 & [h]_3 & a+c+d+e+2f & b+c+d+e+2f\\
 & & [d]_2 & g & & a+c+d+2e+f & b+c+d+2e+f\\
 & & & h & & &
\end{matrix}
\right.
$$

$$
\left.
\begin{matrix}
A_{14} & A_{24} & A_{34}\\
[b+c+d+e+f]_3 & [a+c+d+e+f]_3 & [-c-d-e-f]_2\\
c & c & [g]_2\\
d & d & [h]_2\\
0 & 0 &
\end{matrix}
\right\}
$$

となる．このことから前節と同様，対応する KZ 方程式の既約性の必要十分条件が容易に得られる．

これらは数式処理の Risa/Asir で [14] を用いて

```
[0] S="51,51,222,2211"$
[1] os_md.sproot(S,"pairs"|dviout=1)$      /* 全ての分解              */
[2] P=os_md.mc2grs(S,3)$                   /* 同次固有値分解           */
[3] os_md.mc2grs(P[1],"get"|dviout=1)$     /* 一般化 Riemann scheme   */
[4] os_md.mc2grs(P[1],"spct"|dviout=1)$    /* スペクトル型と idx の表  */
```

などとして得られる．実際は

```
Q=os_md.mc2grs(P[1],[[[1,2],h]])
```

すなわち addition $u \mapsto (x_1-x_2)^h u$ に対応する変換を行い，[3]，[4] の P[1] を Q で置き換えて，Riemann scheme がより見やすくなるようにしている．

以下，残りの 9 例についても同様なデータを挙げる．

42, 411, 411, 411　6 階 7 パラメータ

$$\begin{aligned}&= 10,100,100,010 \oplus 32,311,311,401 \quad (6)\\ &= 21,210,210,210 \oplus 21,201,201,201 \quad (4)\\ &= 2(01,100,100,100) \oplus 40,211,211,211 \quad (1)\\ &= 4(10,100,100,100) \oplus 02,011,011,011 \quad (1)\end{aligned}$$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		42	411	411	411	2
x_1	42		411	411	411	2
x_2	411	411		222	222	−12
x_3	411	411	222		222	−12
x_4	411	411	222	222		−12

$$2a+b+c+d+e+4f+g+h=0,$$

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} & A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34}\\ [0]_4 & [0]_4 & [0]_4 & [f]_4 & [0]_4 & [0]_4 & [-a]_2 & [-a-f]_4 & [0]_2 & [0]_2\\ [a]_2 & b & d & g & a+b+2f & a+d+2f & [g]_2 & g & [a+d+f]_2 & [a+b+f]_2\\ & c & e & h & a+c+2f & a+e+2f & [h]_2 & h & [a+e+f]_2 & [a+c+f]_2 \end{array}\right\}$$

51, 42, 321, 321　6 階 6 パラメータ

$$\begin{aligned}&= 10,10,100,001 \oplus 41,32,221,320 \quad (2)\\ &= 10,10,010,010 \oplus 41,32,311,311 \quad (1)\\ &= 10,01,100,100 \oplus 41,41,221,221 \quad (1)\\ &= 20,11,110,101 \oplus 31,31,211,220 \quad (2)\\ &= 30,21,111,111 \oplus 21,21,210,210 \quad (1)\\ &= 2(10,10,010,100) \oplus 31,31,220,211 \quad (2)\\ &= 2(20,11,110,110) \oplus 11,20,101,101 \quad (1)\\ &= 3(10,10,100,100) \oplus 21,12,021,021 \quad (1)\end{aligned}$$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		51	42	321	321	2
x_1	51		42	321	321	2
x_2	42	42		3111	3111	−8
x_3	321	321	3111		2211	−22
x_4	321	321	3111	2211		−22

$$a+2b+2c+d+3e+2f+g=0,$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13}\\ [0]_5 & [0]_4 & [0]_3 & [e]_3 & [0]_4 & [0]_3\\ a & [b]_2 & [c]_2 & [f]_2 & [-b-d-e-g]_2 & [-c-g]_2\\ & & d & g & & -b-c-f-g\\ & & & & & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cccc} A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34}\\ [0]_3 & [b+c+d+e+f+g]_3 & [-b-c-e-f]_3 & [a+b+c+e+f+g]_2\\ b+c+d+e+2f & [b+c+e+g]_2 & c+g & [g]_2\\ b+c+d+2e+f & g & g & b+g\\ b+c+2e & & -c & -b-d-e \end{array}\right\}$$

51, 42, 33, 2211　6 階 6 パラメータ

$$\begin{aligned}&= 10,10,10,0010 \oplus 41,32,23,2201 \quad (4)\\ &= 20,11,11,1010 \oplus 31,31,22,1201 \quad (4)\\ &= 2(10,10,10,1000) \oplus 31,22,13,0211 \quad (4)\\ &= 2(10,11,11,1100) \oplus 11,20,11,0011 \quad (1)\end{aligned}$$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		51	42	33	2211	2
x_1	51		42	33	2211	2
x_2	42	42		411	21111	−6
x_3	33	33	411		2211	−8
x_4	2211	2211	21111	2211		−34

$$a+2b+3c+2d+2e+f+g=0,$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13}\\ {[0]_5} & [0]_4 & [c]_3 & [e]_2 & [0]_4 & [0]_3 \\ a & [b]_2 & [0]_3 & [d]_2 & [-b-c-f-g]_2 & [f-g]_3 \\ & & & g & & \\ & & & f & & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cccc} A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34}\\ {[0]_4} & [b+c+d+g]_2 & [-b-c-d-e]_2 & [a+b+c+d+e+g]_2\\ b+c+2e & [b+c+e+g]_2 & c+g & [g]_2 \\ b+c+2d & c+g & c+f & b+g\\ & g & g & -b-c-f\\ & & f & \end{array}\right\}$$

51, 411, 33, 222　6 階 6 パラメータ

$= 20, 101, 11, 011 \oplus 31, 310, 22, 211 \quad (6)$

$= 2(10, 100, 10, 100) \oplus 31, 211, 13, 022 \quad (6)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		51	411	33	222	2
x_1	51		222	33	411	2
x_2	411	222		3111	21111	-22
x_3	33	33	3111		3111	-12
x_4	222	411	21111	3111		-22

$$a+b+c+3d+2e+2f+2g=0,$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13}\\ {[0]_5} & [0]_4 & [0]_3 & [e]_2 & [-e]_2 & [b]_3 \\ a & b & [d]_3 & [f]_2 & [-f]_2 & [c]_3 \\ & c & & [g]_2 & [-g]_2 & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cccc} A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34}\\ {[0]_3} & [d+e+f+g]_4 & [a+d+e+f+g]_2 & [a+d+e+f+g]_3\\ -a-d-e-f & -b-c & -b & -b-c-d-e \\ -a-d-e-g & -b-c-d & -c & -b-c-d-f\\ -a-d-f-g & & -b-d & -b-c-d-g\\ & & -c-d & \end{array}\right\}$$

42, 411, 411, 33　6 階 6 パラメータ

$= 11, 110, 200, 11 \oplus 31, 301, 211, 22 \quad (4)$

$= 21, 210, 201, 12 \oplus 21, 201, 210, 21 \quad (4)$

$= 3(10, 100, 100, 10) \oplus 12, 111, 111, 03 \quad (2)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		42	411	411	33	2
x_1	42		2211	2211	42	-12
x_2	411	2211		411	411	-8
x_3	411	2211	411		411	-8
x_4	33	42	411	411		2

$$2a+b+c+d+e+3f+3g=0,$$

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} & A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34}\\ {[0]_4} & [0]_4 & [0]_4 & [f]_3 & [d]_2 & [b]_2 & [a]_4 & [f+g]_4 & [f+g]_4 & [f+g]_4\\ {[a]_2} & b & d & [g]_3 & [e]_2 & [c]_2 & -f & [a+2f+2g]_2 & b+2f+2g & d+2f+2g\\ & c & e & & -f & -f & -g & & c+2f+2g & e+2f+2g\\ & & & & -g & -g & & & & \end{array}\right\}$$

51, 33, 33, 222　6 階 5 パラメータ

$= 10, 10, 10, 100 \oplus 41, 23, 23, 122 \quad (12)$

$= 2(20, 11, 11, 11) \oplus 11, 11, 11, 02 \quad (3)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		51	33	33	222	2
x_1	51		33	33	222	2
x_2	33	33		3111	21111	−16
x_3	33	33	3111		21111	−16
x_4	222	222	21111	21111		−32

$$a + 3b + 3c + 2d + 2e + 2f = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc}
A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} & A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34} \\
[0]_5 & [0]_3 & [0]_3 & [d]_2 & [0]_3 & [0]_3 & [-b-c]_3 & [d]_2 & [-b-c-d-e-f]_2 & [-b-c-d-e-f]_2 \\
a & [b]_3 & [c]_3 & [e]_2 & [c]_3 & [b]_3 & 2d & [e]_2 & b+c & b+c \\
 & & & [f]_2 & & & 2e & [f]_2 & b & b \\
 & & & & & & 2f & & c & c \\
 & & & & & & & & 0 & 0
\end{array}\right\}$$

42, 411, 33, 33　6 階 5 パラメータ

$= 20, 110, 11, 11 \oplus 22, 301, 22, 22 \quad (2)$

$= 21, 210, 21, 12 \oplus 21, 201, 12, 21 \quad (4)$

$= 2(10, 100, 10, 10) \oplus 22, 211, 13, 13 \quad (4)$

$= 2(11, 200, 11, 11) \oplus 20, 011, 11, 11 \quad (1)$

$$2a + b + c + 3d + 3e + 3f = 0,$$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		42	411	33	33	2
x_1	42		222	411	411	−4
x_2	411	222		2211	2211	−22
x_3	33	411	2211		2211	−16
x_4	33	411	2211	2211		−16

$$\left\{\begin{array}{cccccc}
A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} \\
[0]_4 & [0]_4 & [0]_3 & [e]_3 & [0]_2 & [0]_4 \\
[a]_2 & b & [d]_3 & [f]_3 & [-a-c-d-e-f]_2 & a+d+2e \\
 & c & & & [-a-b-d-e-f]_2 & a+d+2f
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cccc}
A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34} \\
[0]_2 & [-a-d-e-f]_4 & [a+f]_2 & [a+b+e+f]_2 \\
[d]_2 & d & [a+e]_2 & [a+c+e+f]_2 \\
-a-e & -d & 0 & -a-b-2d-e-f \\
-a-f & & -d & -a-c-2d-e-f
\end{array}\right\}$$

42, 33, 33, 33　6 階 4 パラメータ

$= 10, 10, 10, 10 \oplus 32, 23, 23, 23 \quad (8)$

$= 21, 21, 21, 21 \oplus 21, 12, 12, 12 \quad (4)$

$= 2(\underline{20, 11, 11, 11}) \oplus 02, 11, 11, 11 \quad (1)$

$= 2(31, 22, 22, 22) \oplus -(\underline{20, 11, 11, 11}) \quad (1)$

Type 3 の分解が一つ現れる.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		42	33	33	33	2
x_1	42		222	222	222	−16
x_2	33	222		2211	2211	−22
x_3	33	222	2211		2211	−22
x_4	33	222	2211	2211		−22

$$2a + b + c + d + e = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc}
A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} & A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34} \\
[0]_4 & [0]_3 & [0]_3 & [d]_3 & [a]_2 & [a]_2 & [d]_2 & [-a]_2 & [-b-d-e]_2 & [-c-d-e]_2 \\
[3a]_2 & [b]_3 & [c]_3 & [e]_3 & [b]_2 & [c]_2 & [e]_2 & [-2a-d+e]_2 & [2a]_2 & [2a]_2 \\
 & & & & [-b]_2 & [-c]_2 & b+c+3d & [-2a+d-e]_2 & 2c & 2b \\
 & & & & & & b+c+3e & & -c & -b
\end{array}\right\}$$

$\mathbf{42, 42, 42, 321}$　6 階 5 パラメータ

$= 10, 10, 01, 100 \oplus 32, 32, 41, 221 \quad (3)$
$= 11, 11, 20, 110 \oplus 31, 31, 22, 211 \quad (3)$
$= 21, 21, 21, 200 \oplus 21, 21, 21, 120 \quad (1)$
$= 2(10, 10, 10, 010) \oplus 22, 22, 22, 301 \quad (1)$
$= 2(21, 21, 21, 210) \oplus 00, 00, 00, (-1)01 \quad (1)$
$= 3(10, 10, 10, 100) \oplus 12, 12, 12, 021 \quad (1)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		42	42	42	321	2
x_1	42		321	321	2211	−14
x_2	42	321		321	2211	−14
x_3	42	321	321		2211	−14
x_4	321	2211	2211	2211		−28

$$2a + 2b + 2c + 3d + 2e + f = 0,$$

$$\left\{\begin{matrix} A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} \\ [0]_4 & [0]_4 & [0]_4 & [d]_3 & [0]_3 & [0]_3 \\ [a]_2 & [b]_2 & [c]_2 & [e]_2 & [-a-b-d-f]_2 & [-a-c-d-f]_2 \\ & & & f & a+b+2d & a+c+2d \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34} \\ [0]_3 & [-\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}f]_2 & [-\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}f]_2 & [-\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}f]_2 \\ [-b-c-d-f]_2 & [b+c+d+f]_2 & [a+c+d+f]_2 & [a+b+d+f]_2 \\ b+c+2d & f & f & f \\ & -b-c-d & -a-c-d & -a-b-d \end{matrix}\right\}$$

上の分解には Type 2 のものが一つ現れる．このときは F_4 の場合の (27) と同様

$$F_1(\alpha; \beta - \delta, \delta; \gamma; x, y) \cdot F(\alpha, \beta, \gamma; y) \tag{28}$$

というような解がある場合に対応し，KZ 方程式としては既約であるが，x 変数のみの Schlesinger 型方程式としては可約になる．

この分解の例は $42, 42, 42, \underline{3}2\underline{1} \to 42, 42, 42, 42 = 2(21, 21, 21, 21)$ に対応する（cf. Remark 4）．$21, 21, 21, 21$ は Appell の F_1 のスペクトル型であることに注意．

5.9 Decompositions of Type 2 and Type 3

4 点以上の特異点に対応する 10 階以下のリジッドなスペクトル型（347 種）の全ての Type 2 と Type 3 の分解を以下に列挙する．Type 2 の分解で → で示されたリジッドスペクトル型は，そのより小さな階数の Type 2 の分解に middle convolution で帰着されることを示している（よって KZ 方程式の既約条件には関わらない分解となる）．

$$22, 22, 22, 31 = 2(11, 11, 11, 20) \oplus 00, 00, 00, (-1)1$$

$$32, 32, 32, 32 = 2(21, 21, 21, 21) \oplus -(10, 10, 10, 10)$$

$$42, 42, 42, 312 = 2(\underline{2}1, \underline{2}1, \underline{2}1, 20\underline{1}) \oplus 00, 00, 00, (-1)10 \to 22, 22, 22, 310$$
$$42, 33, 33, 33 = 2(31, 22, 22, 22) \oplus -(20, 11, 11, 11)$$

$$52, 52, 43, 322 = 2(31, 31, 22, 211) \oplus -(10, 10, 01, 100)$$
$$43, 43, 43, 43 = 2(32, 32, 32, 32) \oplus -(21, 21, 21, 21)$$

$$\underline{6}2, \underline{6}2, \underline{6}2, \underline{6}2, \underline{5}3 = 2(31, 31, 31, 31, 31) \oplus 00, 00, 00, 00, (-1)1 \rightsquigarrow 12, 12, 12, 12, 03$$
$$62, 62, 431, 422 = 2(\underline{3}1, \underline{3}1, \underline{2}20, 2\underline{1}1) \oplus 00, 00, 0(-1)1, 000 \to 42, 42, 231, 402$$
$$62, 62, 44, 3221 = 2(\underline{3}1, \underline{3}1, \underline{2}2, 2\underline{1}10) \oplus 00, 00, 00, (-1)001 \to 42, 42, 24, 3021$$
$$62, 53, 53, 332 = 2(41, 32, 32, 221) \oplus -(20, 11, 11, 110)$$

$$
\begin{aligned}
62,53,44,422 &= 2(31,31,22,211) \oplus 00,(-1)1,00,000\\
62,44,44,431 &= 2(\underline{3}1,\underline{2}2,\underline{2}2,\underline{2}20) \oplus 00,00,00,0(-1)1 \to 42,24,24,231\\
53,44,44,44 &= 2(42,33,33,33) \oplus -(31,22,22,22)\\
&= 2(31,22,22,22) \oplus (-1)1,00,00,00
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
72,72,72,63,54 &= 2(41,41,41,32,32) \oplus -(10,10,10,01,10)\\
81,63,63,63,63 &= 3(30,21,21,21,21) \oplus (-1)1,00,00,00,00\\
81,63,333,333 &= 3(30,21,111,111) \oplus (-1)1,00,000,000\\
72,72,432,432 &= 2(41,41,221,221) \oplus -(10,10,010,010)\\
72,63,522,522 &= 2(41,32,311,311) \oplus -(10,01,100,100)\\
72,54,54,432 &= 2(41,32,32,221) \oplus -(10,10,10,010)\\
63,63,63,432 &= 2(42,42,42,321) \oplus -(21,21,21,210)\\
54,54,54,54 &= 2(43,43,43,43) \oplus -(32,32,32,32)\\
&= 2(32,32,32,32) \oplus -(10,10,10,10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
82,82,82,64,631 &= 2(\underline{4}1,\underline{4}1,\underline{4}1,3\underline{2},\underline{3}20) \oplus 00,00,00,00,0(-1)1 \to 42,42,42,60,231\\
82,82,73,73,55 &= 2(51,51,42,42,33) \oplus -(20,20,11,11,11)\\
82,82,442,4321 &= 2(\underline{4}1,\underline{4}1,\underline{2}21,22\underline{1}0) \oplus 00,00,000,0(-1)01 \to 62,62,242,4301\\
82,631,622,622 &= 2(\underline{4}1,\underline{3}20,\underline{3}11,3\underline{1}1) \oplus 00,0(-1)1,000,000 \to 62,62,422,4301\\
82,73,55,3322 &= 2(51,42,33,2211) \oplus -(20,11,11,1100)\\
82,73,532,532 &= 2(51,42,321,321) \oplus -(20,11,110,110)\\
82,64,64,4321 &= 2(\underline{4}1,\underline{3}2,\underline{3}2,22\underline{1}0) \oplus 00,00,00,0(-1)01 \to 62,62,44,4301\\
82,64,631,442 &= 2(\underline{4}1,\underline{3}2,\underline{3}20,22\underline{1}) \oplus 00,00,0(-1)1,000 \to 62,62,431,440\\
82,64,622,532 &= 2(\underline{4}1,\underline{3}2,\underline{3}11,31\underline{1}) \oplus 00,00,000,(-1)10 \to 62,44,422,530\\
82,55,55,433 &= 2(51,33,33,222) \oplus -(20,11,11,011)\\
73,73,64,433 &= 2(52,52,43,322) \oplus -(31,31,22,211)\\
73,622,55,55 &= 2(42,411,33,33) \oplus -(11,200,11,11)\\
64,64,64,631 &= 2(\underline{3}2,\underline{3}2,3\underline{2},\underline{3}20) \oplus 00,00,00,0(-1)1 \to 44,44,62,431\\
64,55,55,55 &= 2(53,44,44,44) \oplus -(42,33,33,33)\\
&= 2(42,33,33,33) \oplus -(20,11,11,11)
\end{aligned}
$$

たとえば，8 階で特異点が 4 個以上に対応するリジッドなスペクトル型で，Type 2 と Type 3 のものを全て得るには，[14] を `Risa/Asir` で読み込んで以下を実行すればよい.

```
Rank=8; /* give rank */
G=os_md.spgen(Rank|eq=1,str=1,pt=[4,100]); /* get spectral types */
for(T=G;T!=[];T=cdr(T)){
  if((os_md.sproot(car(T),"pairs"|only=6))!=[]) /* only type 2, 3 */
    os_md.sproot(os_md.s2sp(car(T)|std=-1),  /* in standard order */
      "pairs"|only=6,dviout=1);
};
```

5.10 Multiplicities of simultaneous eigenvalues

リジッドな Schlesinger 型方程式のスペクトル型（$A_{0,1}$, $A_{0,2}$, $A_{0,3}$, $A_{0,4}$ の順）と KZ 方程式に拡張したときの互いに可換な留数行列の 15 組（§5.3 の例と同じ順）の同時固有値の重複度の表である．

$$[21,21,21,21] : 1^3,1^3,1^3,1^3,1^3,1^3,1^3,1^3,1^3,1^3,1^3,1^3,1^3,1^3,1^3$$

$$[22,31,31,211] : 1^4,1^4,1^4,21^2,1^4,1^4,21^2,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4$$
$$[22,31,22,22] : 1^4,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4,1^4$$

$$[41,41,221,221] : 21^3,21^3,21^3,21^3,21^3,21^3,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,21^3,1^5,1^5$$
$$[41,32,23,211] : 21^3,1^5,1^5,21^3,1^5,1^5,21^3,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5$$
$$[32,32,32,32] : 1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5,1^5$$

$$[51,51,222,2211] : 31^3,21^4,2^21^2,31^3,21^4,2^21^2,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,2^21^2,1^6,1^6$$
$$[42,411,411,411] : 21^4,21^4,21^4,21^4,21^4,21^4,21^4,21^4,21^4,21^4,21^4,21^4,21^4,21^4,21^4$$
$$[51,42,33,2211] : 31^3,1^6,21^4,2^21^2,1^6,21^4,2^21^2,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,21^4,1^6,1^6$$
$$[51,42,321,321] : 21^4,21^4,21^4,21^4,21^4,21^4,21^4,1^6,1^6,21^4,1^6,1^6,21^4,1^6,1^6$$
$$[42,411,411,33] : 2^21^2,2^21^2,2^21^2,1^6,2^21^2,21^4,1^6,2^21^2,21^4,1^6,1^6,2^21^2,1^6,1^6,2^21^2$$
$$[51,411,33,222] : 21^4,1^6,21^4,2^21^2,21^4,1^6,1^6,2^21^2,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6$$
$$[51,33,33,222] : 21^4,1^6,1^6,2^21^2,1^6,1^6,2^21^2,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6$$
$$[42,42,42,321] : 21^4,1^6,1^6,21^4,1^6,1^6,21^4,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6$$
$$[42,411,33,33] : 1^6,1^6,1^6,21^4,21^4,1^6,1^6,2^21^2,1^6,1^6,2^21^2,1^6,1^6,1^6,1^6$$
$$[42,33,33,33] : 1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6,1^6$$

$$[61,61,2221,2221] : 31^4,31^4,321^2,31^4,31^4,321^2,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,321^2,1^7,1^7$$
$$[61,511,331,322] : 2^21^3,21^5,2^21^3,2^21^3,31^4,21^5,1^7,2^21^3,1^7,1^7,1^7,21^5,21^5,1^7,21^5$$
$$[52,511,43,4111] : 321^2,2^31,2^21^3,321^2,21^5,21^5,1^7,21^5,2^31,1^7,2^21^3,21^5,1^7,2^31,21^5$$
$$[511,511,43,421] : 31^4,21^5,2^21^3,31^4,21^5,2^21^3,2^21^3,21^5,21^5,2^21^3,2^21^3,2^21^3,2^21^3,21^5,21^5$$
$$[61,52,331,3211] : 31^4,21^5,31^4,2^21^3,21^5,31^4,2^21^3,1^7,1^7,21^5,1^7,1^7,31^4,1^7,1^7$$
$$[61,421,421,421] : 2^21^3,2^21^3,2^21^3,21^5,21^5,21^5,21^5,21^5,21^5,21^5,21^5,21^5,21^5,21^5,21^5$$
$$[61,52,322,322] : 21^5,21^5,2^21^3,2^21^3,2^21^3,2^21^3,21^5,1^7,1^7,21^5,1^7,1^7,2^21^3,1^7,1^7$$
$$[61,43,43,2221] : 31^4,21^5,21^5,2^31,1^7,21^5,2^31,1^7,21^5,1^7,1^7,1^7,21^5,21^5,1^7$$
$$[61,43,421,322] : 21^5,21^5,21^5,21^5,2^21^3,21^5,2^21^3,21^5,1^7,21^5,1^7,1^7,21^5,1^7,1^7$$
$$[52,52,421,421] : 21^5,21^5,21^5,21^5,21^5,21^5,21^5,1^7,1^7,21^5,1^7,1^7,21^5,1^7,1^7$$
$$[52,511,43,331] : 21^5,21^5,1^7,31^4,21^5,1^7,21^5,2^21^3,21^5,1^7,2^21^3,1^7,1^7,21^5,1^7$$
$$[52,52,43,322] : 2^21^3,1^7,1^7,2^21^3,1^7,1^7,21^5,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7$$
$$[52,43,43,421] : 21^5,1^7,1^7,2^21^3,1^7,1^7,2^21^3,1^7,1^7,21^5,21^5,1^7,1^7,1^7,1^7$$
$$[43,43,43,43] : 1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7,1^7$$

Remark 12 (素数階の KZ 方程式). 7 は素数なので 7 階のリジッドなスペクトル型 $\mathbf{m}$ に対して

$\Sigma(\mathbf{m})$ には Type 3 のものはない．このようなときは Schlesinger 型方程式と，それを拡張した KZ 方程式の既約条件は同じである．

Remark 13 (パラメータの個数)**.** リジッドな Schlesinger 型方程式に対応した KZ 方程式の解となる 2 変数超幾何関数は，方程式の階数を n とすると，($n \geq 3$ のとき）パラメータの数の最小は 4 で最大は $n+1$ となる．最小のものは $P_{4,n}$, 最大のものは I_n, J_n となる（cf. [11, §13.9]）:

$$\begin{aligned}P_{4,2m} &= m+1m-1, mm, mm, mm\\ P_{4,2m+1} &= m+1m, m+1m, m+1m, m+1m\\ I_{2m} &= (2m-1)1, mm, m1^m, m-11^{m+1}\\ I_{2m+1} &= (2m)1, m+1m, m+11^m, m+11^m\\ J_{2m} &= (2m-1)1, (2m-1)1, 2^m1, 2^{m-1}1^2\\ J_{2m+1} &= (2m)1, (2m)1, 2^m1, 2^m1\end{aligned}$$

Remark 14 (リジッドな切り口)**.** 特異点が 4 つの 7 階以下のリジッド Schlesinger 方程式で，2 変数超幾何に拡張したときに同じ KZ 方程式になるものは以下の 4 組（スペクトル型の組で表す）である．他は全て異なり全 30 種の 7 階以下の 2 変数超幾何となる．

$$\begin{matrix}(41, 41, 221, 221 : 41, 32, 311, 311) & (51, 51, 222, 2211 : 51, 411, 33, 222)\\ (61, 61, 2221, 2221 : 61, 43, 4111, 4111) & (61, 52, 322, 322 : 61, 43, 331, 331)\end{matrix} \tag{29}$$

一般にスペクトル型 I_n と J_n は、同一の KZ 型方程式が対応する．

4 点の特異点をもつリジット Fuchs 型方程式のスペクトル型の数とその中で同一の KZ 型方程式に対応する組の数を階数別に表にすると以下のようになる．以下の同一の KZ 型方程式に対応する例では，n 階の場合，ある特異点で $n-11$ となるスペクトル型を必ず含んでいることが計算から分かる．

表 3　切り口が異なるリジッドなスペクトル型をもつ 2 変数超幾何

階数 →	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Fuchs 型 ODE	1	2	4	11	16	35	58	109	156	299	402	658	924	1517
同一の KZ 型	0	0	1	1	2	4	9	12	18	31	47	68	94	141
2 変数超幾何	1	2	3	10	14	31	49	97	138	268	355	590	830	1376

Remark 15 (非リジッドな切り口)**.** リジッドな 4 点特異点の Schlesinger 型常微分方程式に対応する KZ 方程式から別の変数（x_1, x_2, x_3, x_4 の 4 つある）の Schlesinger 型方程式が得られるが，後者のリジッド指数が p となるものを考える（上の例では $p=2$ であるがスペクトル型が元と異なるものを考えた）．16 階までには，$p=0$ や -2 となるものはない．

リジッド指数が -4 や -6 のものが現れるのは以下の場合に限る（→ はリダクション, ∗ は basic すなわち middle convolution で階数が下げられない）．

$$\begin{array}{lcll}\mathrm{idx} = -4 : 31, 22, 22, 22 & \Rightarrow & 22, 22, 211, 211\ * & \\ \qquad\qquad 42, 411, 33, 33 & \Rightarrow & 42, 411, 411, 222 & \to\ 22, 22, 211, 211\\ \mathrm{idx} = -6 : 41, 32, 32, 221 & \Rightarrow & 32, 32, 311, 2111 & \to\ 22, 22, 211, 1111\ *\\ \qquad\qquad 51, 42, 33, 2211 & \Rightarrow & 42, 42, 411, 21111 & \to\ 32, 32, 311, 2111\end{array}$$

一方，リジッド指数 -8 が現れるのは

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{idx} = -8: 51,42,33,2211 & \Rightarrow & 411,33,33,2211 * & \\
51,42,321,321 & \Rightarrow & 42,42,3111,3111 & \to 22,22,1111,1111 * \\
61,52,331,3211 & \Rightarrow & 52,52,4111,31111 & \to 42,42,3111,3111 \\
71,62,3311,3311 & \Rightarrow & 62,62,41111,41111 & \to 52,52,4111,31111 \\
62,611,431,431 & \Rightarrow & 62,5111,5111,422 & \to 42,42,3111,3111 \\
72,711,441,4311 & \Rightarrow & 72,6111,522,51111 & \to 62,5111,5111,422 \\
82,811,4411,4411 & \Rightarrow & 82,622,61111,61111 & \to 72,6111,522,51111
\end{array}
$$

のほか　$31,31,22,211 \Rightarrow 211,211,211,211 *$　で始まる

$$
\begin{aligned}
&(4m-2)11,(2m+1)2^{m-1}1,(2m+1)2^{m-1}1,(2m)(2m)\\
&\qquad \Rightarrow \quad (4m-2)11,(4m-2)11,4^{m-1}211,4^{m-1}211\\
&(4m)11,(2m+2)2^{m},(2m+2)2^{m-1}11,(2m+1)(2m+1)\\
&\qquad \Rightarrow \quad (4m)11,(4m)11,4^{m}11,4^{m-1}2211
\end{aligned}
$$

という偶数階の系列のものがある（$m = 1, 2, \ldots$）.

5.11 Middle convolution of F_4

§5.4 で考察した F_4 に対応する KZ 方程式に $u \mapsto (x_1 - x_3)^{-2d}u$ に対応する addition を施すと，その一般化 Riemann scheme は

$$
\left\{\begin{array}{cccccccccc}
A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} & A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34}\\
[0]_2 & [0]_3 & [0]_2 & [d]_2 & [0]_2 & [a-d+e]_2 & [0]_2 & [-b+d-e]_2 & [d]_2 & [-c+d-e]_2\\
[b]_2 & 2a & [c]_2 & [e]_2 & [b]_2 & 0 & [c]_2 & 2c+2d & [e]_2 & 2b+2d\\
 & & & & & -2d+2e & & 2d & & 2d
\end{array}\right\},
$$
$$
a+b+c+d+e=0
$$

となる．パラメータが一般ならば x_1 変数が満たす Schlesinger 型常微分方程式は既約である．

さらに変数 x_1 について middle convolution $\mathrm{mc}_{x_1,2d}$ を施すと，階数 6 の KZ 方程式が得られ，その一般化 Riemann scheme は

$$
\left\{\begin{array}{cccccccccc}
A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{12} & A_{13} & A_{23} & A_{14} & A_{24} & A_{34}\\
[0]_4 & [0]_3 & [0]_2 & [d]_2 & [0]_4 & [0]_3 & [0]_2 & [-2d]_3 & [d]_2 & [-c+d-e]_2\\
[b+2d]_2 & [2a]_2 & [c]_3 & [e]_3 & [b+2d]_2 & [-b-c]_2 & [c]_3 & [a+c]_2 & [e]_3 & [2b+2d]_2\\
 & 2b & -2d+e & c & & 2e & -2d+e & 2c & c & 0\\
 & & & & & & & & & 2a
\end{array}\right\}
$$

スペクトル型は

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	idx
x_0		42	321	321	321	-10
x_1	42		42	321	321	-4
x_2	321	42		321	321	-10
x_3	321	321	321		2211	-20
x_4	321	321	321	2211		-20

で，どの変数 x_j $(0 \le j \le 4)$ の満たす Schlesinger 型常微分方程式もリジッドではない．

同時固有空間分解は

$$
\begin{aligned}
[A_{01}:A_{23}] &= \{[b+2d:c],\, [b+2d:0],\, [0:c]_2,\, [0:0],\, [0:-2d+e]\}\,,\\
[A_{01}:A_{24}] &= \{[b+2d:e],\, [b+2d:d],\, [0:e]_2,\, [0:d],\, [0:c]\}\,,\\
[A_{01}:A_{34}] &= \{[b+2d:-c+d-e],\, [b+2d:2b+2d],\, [0:-c+d-e],\, [0:2b+2d],\, [0:0],\\
&\qquad [0:2a]\}\,,\\
[A_{02}:A_{13}] &= \{[2a:-b-c],\, [0:-b-c],\, [0:2e],\, [0:0],\, [2a:0],\, [2b:0]\}\,,\\
[A_{02}:A_{14}] &= \{[2a:a+c],\, [0:a+c],\, [0:2c],\, [0:-2d],\, [2a:-2d],\, [2b:-2d]\}\,,\\
[A_{02}:A_{34}] &= \{[2a:-c+d-e],\, [0:-c+d-e],\, [0:2b+2d],\, [0:0],\, [2a:2a],\, [2b:2b+2d]\}\,,\\
[A_{03}:A_{12}] &= \{[c:b+2d],\, [0:b+2d],\, [c:0]_2,\, [0:0],\, [-2d+e:0]\}\,,\\
[A_{03}:A_{14}] &= \{[c:a+c],\, [c:2c],\, [0:a+c],\, [c:-2d],\, [0:-2d],\, [-2d+e:-2d]\}\,,\\
[A_{03}:A_{24}] &= \{[c:e],\, [c:d],\, [0:e],\, [0:d],\, [c:c],\, [-2d+e:e]\}\,,\\
[A_{04}:A_{12}] &= \{[e:b+2d],\, [d:b+2d],\, [e:0]_2,\, [d:0],\, [c:0]\}\,,\\
[A_{04}:A_{13}] &= \{[e:-b-c],\, [e:2e],\, [d:-b-c],\, [e:0],\, [d:0],\, [c:0]\}\,,\\
[A_{04}:A_{23}] &= \{[e:c],\, [e:0],\, [d:c],\, [d:0],\, [c:c],\, [e:-2d+e]\}\,,\\
[A_{12}:A_{34}] &= \{[b+2d:-c+d-e],\, [b+2d:2b+2d],\, [0:-c+d-e],\, [0:2b+2d],\, [0:0],\\
&\qquad [0:2a]\}\,,\\
[A_{13}:A_{24}] &= \{[-b-c:e],\, [-b-c:d],\, [2e:e],\, [0:e],\, [0:d],\, [0:c]\}\,,\\
[A_{14}:A_{23}] &= \{[a+c:c],\, [2c:c],\, [a+c:0],\, [-2d:c],\, [-2d:0],\, [-2d:-2d+e]\}
\end{aligned}
$$

となる．

$x = x_1$ 変数に対する常微分方程式（x_0 と x_1 を交換すると考えてもよい）はリジッド指数が -4 で，その一般化 Riemann scheme は

$$
\begin{Bmatrix}
x=0 & x=y & x=1 & x=\infty\\
[0]_4 & [0]_4 & [0]_3 & [-2d]_3\\
[b+2d]_2 & [b+2d]_2 & [-b-c]_2 & [a+c]_2\\
 & & 2e & 2c
\end{Bmatrix}
\qquad (a+b+c+d+e=0)
$$

となる．

5.12 KZ equation

オリジナルの KZ 方程式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \phi}{\partial z_i} = \frac{1}{\kappa}\sum_{j\ne i}\frac{\Omega_{i,j}}{z_i-z_j}\phi \qquad (1\le i\le n),\\
&\Omega_{i,j} := \frac{m_i m_j}{2} I_n - D_{i,j} = \Omega_{j,i} \qquad (1\le i<j\le n),\\
&D_{i,j} := \Bigl(m_j\delta_{p,i}(\delta_{q,i}-\delta_{q,j}) + m_i\delta_{p,j}(\delta_{q,j}-\delta_{q,i})\Bigr)_{\substack{1\le p\le n\\ 1\le q\le n}} =
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} i & j \end{array}\\
\begin{array}{c} i\\ j \end{array} &
\begin{pmatrix} m_j & -m_j\\ -m_i & m_i \end{pmatrix}
\end{array}
\end{aligned}
$$

という形をしていて，j 番目の成分が

$$\int_\gamma \prod_{1\le i<j\le n}(z_i-z_j)^{\frac{m_im_j}{2\kappa}}\prod_{k=1}^n(t-z_k)^{-\frac{m_k}{\kappa}}\frac{dt}{t-z_j}$$

で与えられる解 u をもつ（cf. [18]).

$\mathbb{C}^n$ の標準基底を $\{e_1,\dots,e_n\}$ として（e_j は n 次の単位行列 I_n の j 列目の縦ベクトル）

$$e_{i_1,\dots,i_p}=e_{i_1}+\cdots+e_{i_p}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
D_{i,j}e_\nu &= 0 \qquad (\nu\ne i,\ j),\\
D_{i,j}e_{i,j} &= 0,\\
D_{i,j}e_i &= m_je_i-m_ie_j\equiv(m_i+m_j)e_i \mod \mathbb{C}e_{i,j}
\end{aligned}$$

であるから

$$[\Omega_{i,j}]=\big\{[\tfrac{m_im_j}{2}]_{n-1},\tfrac{m_im_j}{2}-m_i-m_j\big\}.$$

また

$$\begin{aligned}
-\Omega_{1,\infty} &:= \Omega_{1,2}+\cdots+\Omega_{1,n}=\tfrac{m_1}{2}(m_2+\cdots+m_n)I_n-B_{1,\infty},\\
B_{1,\infty} &= B_{1,2}+\cdots+B_{2,n}=\begin{pmatrix} m_2+\cdots+m_n & -m_2 & \cdots & -m_n\\ -m_1 & m_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -m_1 & & & m_1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
B_{1,\infty}e_{1,\dots,n} &= 0,\\
B_{1,\infty}e_1 &= (m_2+\cdots+m_n)e_1-m_1e_2-\cdots-m_1e_n\\
&\equiv (m_1+\cdots+m_n)e_1 \mod \mathbb{C}e_{1,\dots,n},\\
B_{1,\infty}e_j &= -m_je_1+m_1e_j\equiv m_1(v)_j \mod \mathbb{C}e_1
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
[\Omega_{1,\infty}]=\big\{&[-\tfrac{m_1}{2}(m_2+\cdots+m_n-2)]_{n-2},\ m_1-(\tfrac{m_1}{2}-1)(m_2+\cdots+m_n),\\
&\tfrac{m_1}{2}(m_2+\cdots+m_n)\big\}.
\end{aligned}$$

$\Omega_{i,j}e_{1,\dots,n}\in\mathbb{C}e_{1,\dots,n}$ であるから，$\Omega_{i,j}$ から $\bar V=\mathbb{C}^n/\mathbb{C}e_{1,\dots,n}$ 上に線形変換 $\bar\Omega_{i,j}$ が誘導され

$$\begin{aligned}
[\bar\Omega_{i,j}] &= \big\{[\tfrac{m_im_j}{2}]_{n-2},\ \tfrac{m_im_j}{2}-m_i-m_j\big\},\\
[\bar\Omega_{1,\infty}] &= \big\{[-\tfrac{m_1}{2}(m_2+\cdots+m_n-2)]_{n-2},\ m_1-(\tfrac{m_1}{2}-1)(m_2+\cdots+m_n)\big\},\\
[\bar\Omega_{j,\infty}] &= \big\{[\tfrac{m_j^2}{2}-\tfrac{m_j}{2}(m_1+\cdots+m_n-2)]_{n-2},\ \tfrac{m_j^2}{2}-(\tfrac{m_j}{2}-1)(m_1+\cdots+m_n)\big\}
\end{aligned}$$

を満たす．さらに $u \mapsto \prod_{i<j}(x_i - x_j)^{-\frac{m_i m_j}{2\kappa}} u$ という addition により

$$[\bar{\Omega}_{i,j}] = \{[0]_{n-2},\ -m_i - m_j\}, \qquad [\bar{\Omega}_{j,\infty}] = \{[m_j]_{n-2},\ m_1 + \cdots + m_n\}$$

と変換される．

変数 z_1 の満たす常微分方程式のスペクトル型はリジッドな Jordan-Pochhammer 型 $n-21, n-21, \ldots, n-21$ となる（n 個の特異点を持ち，$n=3$ のとき Gauss の超幾何となる）ので，KZ 方程式は Lauricella の F_D の満たす微分方程式に対応することが分かる．

そのスペクトル型の分解は

$$\begin{aligned}\overbrace{n-21, n-21, \cdots, n-21}^{n} &= 01, 10, \cdots, 10 \oplus n-20, n-31, \cdots, n-31 \qquad (n)\\ &= (n-2)(10, 10, \cdots, 10) \oplus 01, 01, \cdots, 01 \qquad (1)\end{aligned}$$

であるから（cf. [11, §13.3]），z_1 変数の Schlesinger 型微分方程式の一般化 Riemann scheme を

$$\begin{Bmatrix} [a_{1,0}]_{n-2} & \cdots & [a_{n,0}]_{n-2} \\ a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \end{Bmatrix}, \qquad \sum_{j=1}^{n}\big((n-2)a_{j,0} + a_{j,1}\big) = 0$$

とおくと（$\frac{\bar{\Omega}_{1,\infty}}{\kappa} = \{[a_{1,0}]_{n-2},\ a_{1,1}\}$, $\frac{\bar{\Omega}_{1,j}}{\kappa} = \{[a_{j,0}]_{n-2},\ a_{j,1}\}$, $j = 2, \ldots, n$），既約のための必要十分条件は

$$\Big\{\sum_{j=1}^{n} a_{j,1},\ \sum_{j=1}^{n} a_{j,\delta_{j,k}}\ \Big|\ k = 1, \ldots, n\Big\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$$

となる．すなわち

$$\{m_1, \ldots, m_n, m_1 + \cdots + m_n\} \cap \kappa\mathbb{Z} = \emptyset.$$

参考文献

[1] Crawley-Boevey, C., On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspaces and sum zero, *Duke Math. J.* **118** (2003), 339–352.

[2] Dettweiler, T. and S. Reiter, An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems, *J. Symbolic Comput.* **30** (2000), 761–798.

[3] Haraoka, Y., Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements, *Adv. Studies in Pure Math.* **62** (2012), 109–136.

[4] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房, 2015, 363pp.

[5] Haraoka K. and T. Kikukawa, Rigidity of monodromies for Appell's hypergeometric functions, *Opuscula Math.* **5** (2015), 567–594.

[6] Kato M., A Pfaffian system of Appell's F4, *Bull. College Educ. Univ. Ryukyus* **33** (1988), 331–334.

[7] Kato M., Connection formulas for Appell's system F4 and some applications, *Funkcial, Ekvac.* **38** (1995), 243–266.

[8] Katz, N. M., Rigid Local Systems, *Annals of Mathematics Studies,* vol. 139, Princeton University Press, 1995.

[9] Knizhnik, V. and A. Zamolodchikov, Current algebra and Wess-Zumino model in 2 dimensions, *Nucl. Phys.* **B 247** (1984), 83–103

[10] 大島利雄, 特殊函数と代数的線型常微分方程式, 東京大学数理科学，レクチャーノート **11**, 2011, 111pp (廣惠一希記).
`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/publication/documents/spfct3.pdf`

[11] Oshima, T., Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, *MSJ Memoirs*, vol. 11, Mathematical Society of Japan, 2012.

[12] Oshima, T., Classification of Fuchsian systems and their connection problem, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B37** (2013), 163–192.

[13] Oshima, T., Reducibility of hypergeometric equations, *to appear in Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, Trends in Mathematics*, Springer, 2016.

[14] Oshima, T., Transformations of KZ type equations, *to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, 2016.

[15] 大島利雄，Riemann 球面上の複素常微分方程式と多変数超幾何函数，岡シンポジウム（2015 年）講義録として出版予定，奈良女子大.

[16] 大島利雄, `okubo.exe`, スペクトル型の解析プログラム, 2007–2008,
`ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/okubo/`

[17] 大島利雄, `os_muldif.rr`, 数式処理 `Risa/Asir` のライブラリ, 2008–2016,
`ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif/`

[18] Varchenko, A., Special functions, KZ type equations, and representation theory, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics* **98**, American Mathematical Society, 2003.