

# ベジェ曲線による曲線近似とその応用 Approximate curves by Bézier curves and their applications

大島利雄

TOSHIO OSHIMA

城西大学 理学部

FACULTY OF SCIENCE, JOSAI UNIVERSITY

## 1 はじめに

筆者は最近数式処理の数学教育への活用を試み、その結果の一つとして 2014 年 12 月の数理解析研究所での研究集会では、数式などで表された曲線や曲面を 3 次 Bézier 曲線を使って綺麗に描画する新たな方法を提示し、Risa/Asir と TeX を用いた実現を示した (cf. [O1, O2]). 数式で表された滑らかな曲線に対する近似精度が高いことに注目した高遠氏から、「定積分  $\int_0^x e^{-t^2} dt$  の数値積分に適用したが、思ったような精度にならない」という問い合わせを 2015 年 9 月にいただいた。原因は単純なプログラムミスであったが、3 次 Bézier 曲線による曲線の近似を用いて、このような定積分や曲線で囲まれた領域の面積の計算するプログラムを Risa/Asir 上で作成した (cf. [O5, O6]). 今回は、そのようなプログラム、および関連する話題 (Risa/Asir における積分計算) について紹介したい。

## 2 いくつかの通過点を順に指定した曲線の描画

$n$  次 Bézier 曲線は、始点  $B_0$  と終点  $B_n$  を結ぶ曲線で、途中の  $(n-1)$  個の制御点  $B_1, \dots, B_{n-1}$  を用いて

$$[0, 1] \ni t \mapsto P(t) = P(B_0, \dots, B_n; t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} B_i \quad (1)$$

と定義される。高次のものほど表現能力は高くなるがより複雑になることもあり、3 次 (cubic) Bézier 曲線での表現能力で十分なことが多いので、3 次 Bézier 曲線が最も広く用いられている。たとえば PDF ファイルは 3 次 Bézier 曲線描画を埋め込むことによる滑らかな曲線描画をサポートしている。

通過点  $P_0, P_1, \dots, P_N$  を順に通過する滑らかな平面曲線の描画を考えてみよう。隣り合った  $P_0$  と  $P_1$  とを、次に  $P_1$  と  $P_2$  とを、 $\dots$ 、最後に  $P_{N-1}$  と  $P_N$  とをそれぞれ 3 次 Bézier 曲線で結び、全体として  $C^1$  級の曲線になることを要請する。たとえば  $P_1$  と  $P_2$  とを結ぶ 3 次 Bézier 曲線は、その制御点  $Q$  と  $R$  を指定することで定まるが、それには前後の 2 点  $P_0$  と  $P_3$  の情報を使うのが妥当であろう。

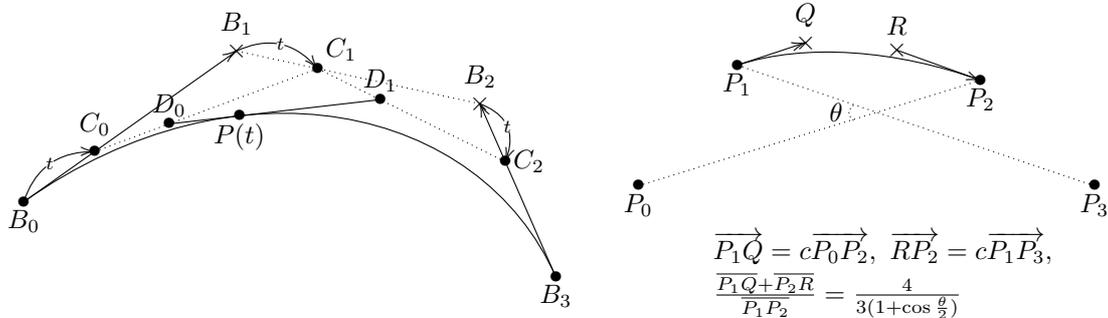
最も広く用いられている Catmull-Rom スプライン曲線は

$$\overrightarrow{P_1Q} = \frac{1}{6}\overrightarrow{P_0P_2}, \quad \overrightarrow{P_2R} = \frac{1}{6}\overrightarrow{P_3P_1} \quad (2)$$

によって制御点を定めるが、筆者は [O2, O4] において、曲線の曲がり具合を考慮した

$$\overrightarrow{P_1Q} = c\overrightarrow{P_0P_2}, \quad \overrightarrow{P_2R} = c\overrightarrow{P_3P_1}, \quad \frac{\overrightarrow{P_1Q} + \overrightarrow{P_2R}}{P_1P_2} = \frac{2}{3(1 + \cos \frac{\theta}{2})} \quad (3)$$

を提案した. ただし  $\theta$  は  $\overrightarrow{P_0P_2}$  と  $\overrightarrow{P_1P_2}$  との成す角で,  $P_0, P_1, P_2, P_3$  が一直線上に等間隔で並んでいれば  $\theta = 0$  である (このとき  $c = \frac{1}{6}$ ).

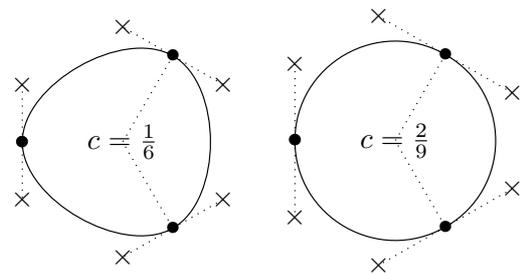


定数  $c$  は

$$c = \frac{4\overline{P_1P_2}}{3(\overline{P_0P_2} + \overline{P_1P_3})} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\overrightarrow{P_0P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_3}}{\overline{P_0P_2} \cdot \overline{P_1P_3}} \right)}} \quad (4)$$

によって計算できるが, 円周上に  $P_0, P_1, \dots$  が等間隔に並んだときに円弧のよい近似を与えるように定めている (なお, Bézier 曲線は正確な円弧を描くことはできない).

円周上に点が等間隔に並んだときの中心からの相対誤差は, 隣り合った点の中心角が  $120^\circ$  以下なら  $0.16\%$  以下に,  $90^\circ$  以下ならば  $0.028\%$  以下に抑えられ, 描かれる曲線は円弧上またはその外側になる. 右の図は, 円周上に 3 点を取り, そこを通る曲線を (2) によって描いたものと (3) によって描いたものである ( $\times$  は計算された制御点を示す).



### 3 Bézier 曲線での近似を用いた定積分の計算

平面上の閉曲線  $\gamma(t)$  が, 区分的 Bézier 曲線

$$\begin{aligned} C : [0, N] \ni t \mapsto \gamma(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= \gamma_k(t - k) = (x_k(t - k), y_k(t - k)) \quad (k \leq t \leq k + 1, 0 \leq k < N) \end{aligned} \quad (5)$$

で与えられているとき, この閉曲線で囲まれた部分の (符号付き) 面積  $S$  は

$$S = \int_0^N y(t) dx(t) = \int_0^N y(t) x'(t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 y_k(t) x'_k(t) dt \quad (6)$$

となる. ここで符号付きとは, 時計回りに 1 回囲まれている場合は通常的面積で, 逆回りで囲まれている場合はその  $-1$  倍となる.  $\gamma_k(t)$  が 3 次 Bézier 曲線ならば,  $y_k(t)x'_k(t)$  は 5 次多項式で, (6) の計算は極めて簡単である. なお,  $C$  が閉曲線でない場合は,  $S$  は曲線  $C$  と  $x = \gamma(N)$  と  $x = \gamma(0)$  と  $y = 0$  とで囲まれた部分 (向きは  $C$  で定まる) の面積となる. 特にある実数  $a$  に対して  $x(t) = t + a$  ( $0 \leq t \leq N$ ) ならば,  $S = \int_a^{a+N} y(x) dx$  である.

曲線上に何点か点を取り，その点を通る曲線を前節の方法で複数の 3 次 Bézier 曲線による近似を行い，上の方法で積分の計算を行うことを考える．

**特長.** i) 上の方法による閉曲線で囲まれた部分の計算のアルゴリズムは，回転不変性がある．

ii) 曲線上の点は（パラメータに対して）等間隔に選ぶ必要はない．複雑な部分や特異点の近くでは，より細かく取ると，元の曲線により近い近似曲線が得られるであろう．

iii) もとの曲線への近似度が高いということは，より少ない曲線上の点で，積分計算の近似の度合いが高いことを意味する．

iv) 複素数値関数の定積分は，実部と虚部分に分けることにより，実数値関数の定積分の計算に帰着される．

v) 上のことを用いて，複素積分の数値計算ができる．

vi) 無限区間の広義積分（たとえば  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ ）は，積分区間を適当な変数変換で有界区間  $(0, 1)$  に変換することによって数値計算が出来る．

このようにして数値積分を実行したときの誤差は以下ようになった．

**Bézier 曲線を使った数値積分の相対誤差**

非積分関数	積分範囲	指定	16 分割	32 分割	96 分割	384 分割	1536 分割
$(\sin \theta, \cos \theta)$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$	$(-n, -)$	$6.8 \times 10^{-8}$	$1.1 \times 10^{-9}$	$1.5 \times 10^{-12}$	$3.2 \times 10^{-17}$	$8.7 \times 10^{-20}$
Cardioid	$-\pi \leq \theta \leq \pi$	$(n, -)$	$5.4 \times 10^{-4}$	$3.1 \times 10^{-5}$	$3.8 \times 10^{-7}$	$1.5 \times 10^{-9}$	$5.8 \times 10^{-12}$
$x \sin x$	$0 \leq x \leq \pi$	$(-n, -)$	$2.9 \times 10^{-4}$	$1.8 \times 10^{-6}$	$2.2 \times 10^{-8}$	$8.7 \times 10^{-11}$	$3.4 \times 10^{-13}$
$\frac{\sin x}{x}$	$0 < x \leq \pi$	$(-n, -)$	$1.5 \times 10^{-6}$	$9.5 \times 10^{-8}$	$1.2 \times 10^{-9}$	$4.6 \times 10^{-12}$	$1.7 \times 10^{-14}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$-\infty < x < \infty$	$(n, -)$	$1.3 \times 10^{-5}$	$1.3 \times 10^{-7}$	$8.5 \times 10^{-10}$	$4.7 \times 10^{-12}$	$2.1 \times 10^{-14}$
$e^{-x^2}$	$-\infty < x < \infty$	$(n, -)$	$7.1 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-4}$	$2.6 \times 10^{-6}$	$1.1 \times 10^{-8}$	$4.3 \times 10^{-11}$
$x^{-\frac{3}{2}}$	$1 \leq x < \infty$	$(n, -)$	$7.1 \times 10^{-2}$	$4.9 \times 10^{-2}$	$2.8 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-2}$	$7.0 \times 10^{-3}$
$x^{-\frac{3}{2}}$	$1 \leq x < \infty$	$(n, -)^{16}$	$5.9 \times 10^{-6}$	$4.5 \times 10^{-5}$	$2.8 \times 10^{-5}$	$1.4 \times 10^{-5}$	$6.9 \times 10^{-6}$
$x^{-\frac{3}{2}}$	$1 \leq x < \infty$	$(n, 1)$	$3.0 \times 10^{-4}$	$3.8 \times 10^{-5}$	$1.4 \times 10^{-6}$	$6.6 \times 10^{-9}$	$2.6 \times 10^{-11}$
$\frac{1}{x^2+\sqrt{-1}}$	$-\infty < x < \infty$	$(n, -)$	$2.3 \times 10^{-3}$	$1.7 \times 10^{-4}$	$2.6 \times 10^{-6}$	$1.9 \times 10^{-8}$	$8.1 \times 10^{-11}$
$e^{\frac{1}{z}}$	$ z  = 1$	$(-n, -)$	$7.6 \times 10^{-5}$	$4.1 \times 10^{-6}$	$4.8 \times 10^{-8}$	$1.9 \times 10^{-10}$	$7.3 \times 10^{-13}$

最初の  $(\sin \theta, \cos \theta)$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) は単位円を時計回りに一周する曲線を表すので，単位円の面積の数値計算となる．近似曲線は単位円上またはそれより外側となって，単位円は近似閉曲線の内部に含まれるので，計算される面積  $S$  は単位円の面積  $\pi$  より大きくなる．32 分割とあるのは，円上に等間隔に 32 点を取って，そこを通る近似曲線をもとに計算をしたということで，このときの相対誤差  $\frac{S-\pi}{\pi}$  が約  $1.1 \times 10^{-9}$  であることを上の表は示している．

2 番目の Cardioid は  $((1 + \cos \theta) \cos \theta, (1 + \cos \theta) \sin \theta)$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) というカージオイド曲線で囲まれた領域の面積の数値計算例である．

積分区間が  $(-\infty, \infty)$  の積分  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  に対しては，正定数  $C$  を用いた変数変換

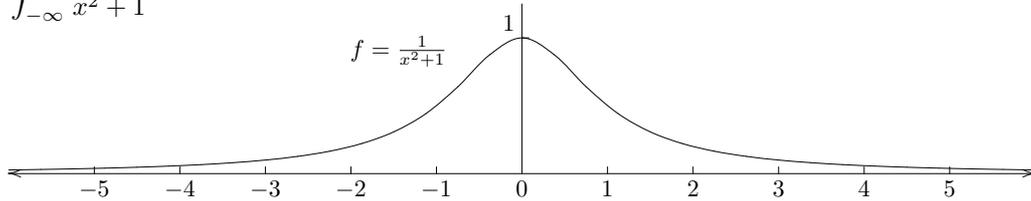
$$\phi_C : (0, 1) \ni t \mapsto x = \frac{1}{C} \left( \frac{1}{1-t} - \frac{1}{t} \right) \in (-\infty, \infty), \quad (7)$$

$$\psi_C : (0, 1) \ni t \mapsto x = \frac{1}{C} \left( e^{\frac{1}{1-t}} - e^{\frac{1}{t}} \right) \in (-\infty, \infty). \quad (8)$$

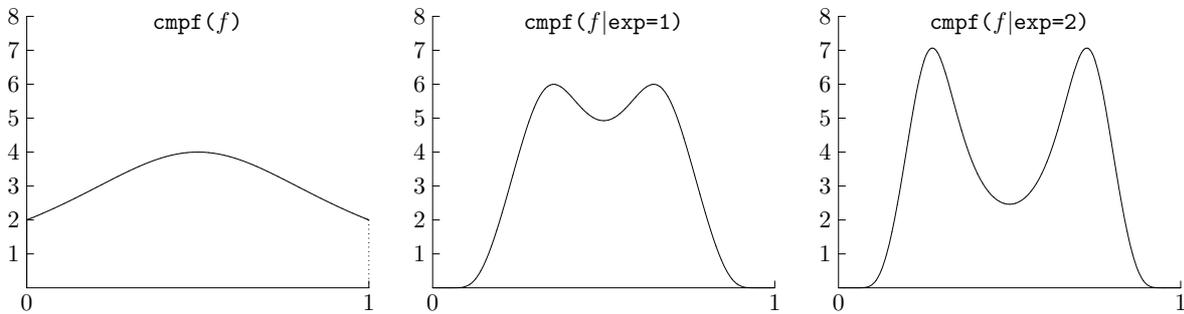
で，有界区間  $(0, 1)$  上の積分に直すことができ，[O6] ではそれを用いている．

関数  $f(x)$  が  $|x| \rightarrow \infty$  のとき  $|f(x)| = O(x^{-2})$  を満たすならば、一般に  $\phi_C$  を用いる方が  $\psi_C$  を用いるよりよい結果をもたらすことが多い。

積分  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$  の場合は

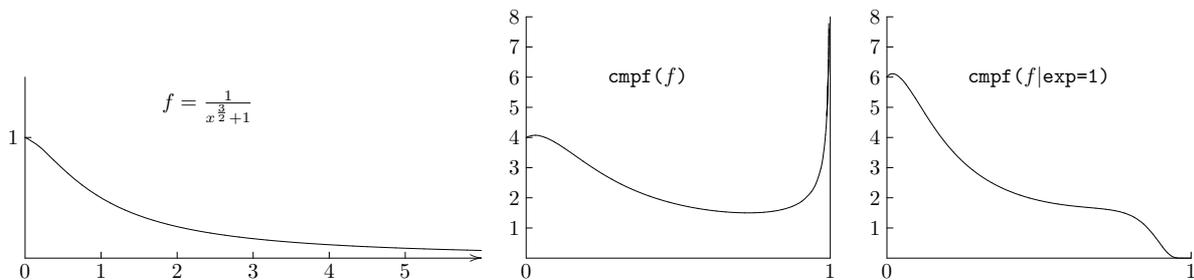


という曲線の積分であるが、[O6]におけるデフォルトの  $\phi_2$  の場合、**exp=1** を指定した場合の  $\varphi_{12}$ 、**exp=2** を指定した場合の  $\varphi_{24}$ 、それぞれの場合に  $(0, 1)$  上の積分に変換したときの被積分関数のグラフを図示すると



となり、相対誤差の表はデフォルトの変換による数値積分の相対誤差である。

この仮定を満たさない  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}+1}$  の場合、[O6]におけるデフォルトの（有理関数による）変換と **exp=1** を指定した変換で  $(0, 1)$  区間上の積分に直したときの被積分関数のグラフは



のようになり、**exp=1** を指定するのが望ましい。

相対誤差評価の表の  $\int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx$  も上に述べた  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}+1}$  のときと同様である。

相対誤差の表は [O6] における計算結果であるが、表における  $(n, -)$  は特別の指定なしのデフォルトでの計算、 $(n, -)$  は閉曲線であることを指定したデフォルトの計算、 $(n, 1)$  はオプション **\exp=1** を指定した計算、 $(n, -)^{16}$  は **prec=16** を指定した計算（これは必要に応じて局所的に 16 段階まで分割を増やすことを許すこと）を意味している。

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{-1}}$  は複素数値関数の広義積分、 $\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$  は複素積分である。

## 4 Risa/Asir 上での様々な積分計算

この節では, Risa/Asir 上で [O6] を用いることによって現時点で可能な積分計算について述べる. [O6] の `os_muldif.rr` というモジュールを読み込むことによりサポートされる. `os_muldif.rr` 内の関数を呼び出すには関数名の頭に `os_md.` を付加する. 現時点で `os_muldif.rr` には約 330 個の関数が含まれている (昨年同時期は 250 個余り, 一昨年同時期は 150 個程度. マニュアルは `os_muldif.pdf`).

### 4.1 数値積分

数値積分に関しては, 現時点で以下がサポートされている (cf. `os_muldif.pdf`).

- 区間  $[a, b]$  での実数値関数  $f$  の数値積分 ( $n$  は分割点の個数)  
 $a = "-"$  は  $-\infty$  を,  $b = "+"$  は  $+\infty$  を意味する.  
変数が  $x$  でなくて  $t$  のときは,  $[a, b]$  を  $[t, a, b]$  とする.  
 $[a, b]$  の外でも  $f$  が滑らかに定義されているときは, 分割点の個数の  $-1$  倍を  $n$  とする.  
`fint(f, n, [a, b] | exp=c, int=k, prec=v)`
- 区間  $[a, b]$  での複素数値関数  $f$  の数値積分 ( $n$  は分割点の個数)  
`fint(f, n, [a, b] | cpx=1, exp=c, int=k, prec=v)`
- 複素数値関数  $f$  の  $C^1$  級曲線  $[a, b] \ni t \mapsto (\phi(t), \psi(t))$  に沿った複素積分  
 $f$  の変数は複素数  $z$  とその実部  $x$  と虚部  $y$  を用いることができる.  
`fint(f, n, [[phi, psi], [a, b]] | exp=c, int=k, prec=v)`
- 複素数値関数  $f$  の区分的  $C^1$  級曲線に沿った複素積分 ( $f$  の変数は  $z, x, y$ )  
`fint(f, n, [[phi1, psi1], [a1, b1]], [[phi2, psi2], [a2, b2]]... | exp=c, int=k, prec=v)`
- 点  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$  を順に繋ぐ折線に沿った複素数値関数  $f$  の複素積分  
`fint(f, n, [[a1, b1], [a2, b2], ..., [an, bn]] | exp=c, int=k, prec=v)`
- 点  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n), (a_1, b_1)$  を順に繋ぐ閉じた折線に沿った複素数値関数  $f$  の複素積分  
`fint(f, n, [[a1, b1], [a2, b2], ..., [an, bn], -1] | exp=c, int=k, prec=v)`
- 曲線  $C : [a, b] \ni t \mapsto (\phi(t), \psi(t))$  に沿った線積分  $\int_C y dx$   
無限区間, すなわち  $a = "-"$  ( $-\infty$  を意味する),  $b = "+"$  ( $+\infty$  を意味する) も可  
`areabezier([[phi, psi], n, [t, a, b]] | exp=c, int=k, prec=v)`
- $z$  変数の有理式  $\frac{p}{q}$  ( $q$  は多項式) の  $\forall f_j > 0$  で表される領域の周での複素積分 (留数計算)  
`fresidue(p, q | cond=[f1, f2, ...], sum=2)`
- 滑らかな閉曲線  $C : [a, b] \ni t \mapsto (\phi(t), \psi(t))$  で囲まれた領域の面積 (曲線が時計回りならその  $-1$  倍)  
`areabezier([[phi, psi], n, [t, a, b]] | int=k, prec=v)`
- 点  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$  を順に通る始点にもどる折線で囲まれた多角形の面積  
`areabezier(xyline([[a1, b1], ..., [an, bn]] | close=1))`
- 点  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$  を順に通る始点にもどる滑らかな閉曲線で囲まれた部分の面積  
`areabezier(xyline([[a1, b1], ..., [an, bn]] | close=1, curve=1))`

- 区分的 Bézier 曲線  $\ell$  で囲まれた部分の面積 ( $\ell$  は lbezier で扱われるデータ形式のいずれか)  
areabezier( $\ell$ )

## 4.2 留数

複素数変数  $z$  の有理式  $\frac{p}{q}$  の留数の計算を行う。ただし、 $q$  は  $z$  の多項式で、 $p$  は正則とする。可能な限り正確な値を求める。それが出来ないときは近似計算を行う。

- $z$  変数の多項式  $q$  を分母とする有理式  $\frac{p}{q}$  の特異点と留数のリストを得る  
fresidue( $p, q$ )
- $f_1 > 0, f_2 > 0, \dots$  を満たす領域内での有理式  $\frac{p}{q}$  の特異点と留数のリストを得る  
 $f_j$  は、 $z, x, y$  の (リスト形式) 関数 ( $z = x + yi$ )  
fresidue( $p, q | \text{cond}=[f_1, f_2, \dots]$ )
- 条件を満たす留数の和を求める  
fresidue( $p, q | \text{cond}=[f_1, f_2, \dots], \text{sum}=1$ )
- 条件を満たす留数の和の  $2\pi\sqrt{-1}$  倍を求める  
fresidue( $p, q | \text{cond}=[f_1, f_2, \dots], \text{sum}=2$ )
- load("sp") によって af\_noalg() を使えるようにおくと、正確な値が求められる範囲が広がる。

実行例は以下の通りで

```
[0] os_md.fresidue(z^2, (z^2+1)^2);
[[[1*i], [-1/4*i]], [[-1*i], [1/4*i]]]
[1] os_md.fresidue(16, z^4+4);
[[[-1+1*i], [1-1*i]], [[-1-1*i], [1+1*i]], [[1+1*i], [-1-1*i]],
[[1-1*i], [-1+1*i]]]
[2] os_md.fresidue(16, z^4+4 | cond=[y]);
[[[-1+1*i], [1-1*i]], [[1+1*i], [-1-1*i]]]
[3] os_md.fresidue(16, z^4+4 | cond=[y], sum=1);
(-2*i)
[4] os_md.fresidue(16, z^4+4 | cond=[y], sum=2);
4*pi
[5] os_md.fresidue(3*z^4, z^6+1 | cond=[y], sum=2);
2*pi
[6] os_md.fresidue(3*z, z^3+i | cond=[y], sum=2);
2*pi
[7] os_md.fresidue(e^(i*z*x), z^2+1 | cond=[y], sum=2);
((e)^(-xi))*pi
```

[4], [5], [6], [7] ( $\xi \geq 0$ ) は、留数計算により以下の積分計算を得ている.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16}{x^4 + 4} dx = 4\pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x^4}{x^6 + 1} dx = 2\pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{x^3 + \sqrt{-1}} dx = 2\pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{x^2 + 1} dx = e^{-\xi\pi}.$$

### 4.3 不定積分 (原始関数)

変数  $x$  を変数とする関数  $f$  の不定積分は

$$\text{integrate}(f, x) \tag{9}$$

によって求められる (積分定数の  $+C$  は略される). ここで,  $f$  は不定元のパラメータを含んでもよい.

主に教育用が目的のため, 大学の微積分学で現れる不定積分の問題が扱えることを目標として開発した. 数式は  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  での出力が可能であるので, それを用いて現時点で可能な不定積分の計算例を以下に挙げ, 結果がどのような形で求められているかの参考にして欲しい. すなわち

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\frac{1}{c}x^2 + \frac{a}{b}\right) dx &= \frac{1}{3c}x^3 + \frac{a}{b}x, \\ \int x^2 e^x dx &= (x^2 - 2x + 2)e^x, \\ \int x a^x dx &= \frac{(x \log a - 1)a^x}{(\log a)^2}, \\ \int x^2 \sin cx dx &= \left(-\frac{1}{c}x^2 + \frac{1}{c^3}\right) \cos cx + \frac{2}{c^2}x \sin cx, \\ \int 4x \log^2(x+1) dx &= (2x^2 - 2) \log^2(x+1) - (2x^2 - 4x - 6) \log(x+1) + x^2 - 6x, \\ \int \frac{2 dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \frac{1}{a^3} \arctan \frac{x}{a} + \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)}, \\ \int \frac{4 dx}{(x^2 - a^2)^2} &= \frac{1}{a^3} (\log(x+a) - \log(x-a)) - \frac{2x}{a^2(x^2 - a^2)}, \\ \int \frac{dx}{x^2 - 2} &= \frac{\sqrt{2}}{4} \log \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}, \\ \int \frac{dx}{x^4 + 1} &= \frac{\sqrt{2}}{8} \log \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} (\arctan(\sqrt{2}x + 1) + \arctan(\sqrt{2}x - 1)), \\ \int \frac{dx}{x^6 + 1} &= \frac{\sqrt{3}}{12} (\log(x^2 + \sqrt{3}x + 1) - \log(x^2 - \sqrt{3}x + 1)) \\ &\quad + \frac{1}{6} \arctan(2x + \sqrt{3}) + \frac{1}{6} \arctan(2x - \sqrt{3}) + \frac{1}{3} \arctan x, \\ \int x \sin x \cdot e^x dx &= (x(\sin x - \cos x) + \cos x)e^x, \\ \int \tan x dx &= -\log \cos x, \\ \int \tan^2 x dx &= \frac{\sin x}{\cos x} - x, \\ \int \frac{dx}{3 \cos x + 4 \sin x} &= \frac{1}{5} \log \frac{3 \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} - 3 \cos \frac{x}{2}}, \\ \int \arctan x dx &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int 6(x^2 + 1) \arctan \frac{1}{x} dx &= (2x^3 + 6x) \arctan \frac{1}{x} + x^2 + 2 \log(x^2 + 1), \\
\int (2bx - a^2x^2)^{-\frac{1}{2}} dx &= \frac{1}{a} \arcsin \frac{a^2x - ab}{b}, \\
\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{1}{2} \left( x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right), \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \\
\int \sqrt{x^2 - 1} dx &= \frac{1}{2} \left( x\sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right), \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}), \\
\int 2\sqrt{x^2 + a^2} dx &= x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}), \\
\int \frac{\sqrt{x} dx}{x + 1} &= 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x}, \\
\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x + 1} &= 3\sqrt[3]{x} - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{1}{2} \log(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1) - \log(\sqrt[3]{x} + 1), \\
\int \sqrt{\frac{2-x}{x}} dx &= x\sqrt{\frac{2-x}{x}} - 2 \arctan \sqrt{\frac{2-x}{x}}, \\
\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} &= \arctan \exp x, \\
\int \frac{x \sin x + \cos x}{x \cos x} dx &= \log x - \log \cos x
\end{aligned}$$

を得ている．たとえば最後の 2 つの積分は、 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  を用いない直接の表示では

```
[0] os_md.integrate(1/((e^x+e^(-x))),x);
atan(exp(x))
[1] os_md.integrate((sin(x)*x+cos(x))/(cos(x)*x),x);
log(x)-log(cos(x))
```

となる．

#### 4.4 あとがき

「はじめに」で書いたように、2015 年の秋に **Risa/Asir** で数値積分を計算する関数を書いた．一方、数式処理は大学での数学教育に有用であり、微積分学や複素関数論では、数値積分より初等関数の不定積分や留数計算を正確に求めることが要請される．そのため、数値積分計算の関数を書いた後、不定積分や留数計算を求める関数を 2015 年 11 月に作成した．

[O3] では、行列を行基本変形で簡約型に直す関数を解説した．教育目的のため、最終的な簡約型のみを求めなくて、(計算機にとって簡単な方法とは限らない) 人が実際に行う (のが推奨される) 基本変形を行って、その変形過程を込めて  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  で出力する、というものであった (要望が多かったので、問題を自動生成する関数も 2016 年 2 月に作成した)．

同様の理由から、初等関数の不定積分の計算は、微積分学で習得する方法に従うこととし、微積分学の演習などに現れる多くの問題が正確に解けることを目標にしている．掲げた例は現時点で解ける典型例であり、一

般的にどのようなものが解けるかの例示となっている.

注意. i) 不定積分では, 積分変数以外の不定元が被積分関数のパラメータとして入っていることを許す. 不定元は実数のパラメータとみなされる.

ii) 三角関数や指数関数の適当な意味での簡約化が必要になる. そのため, これらの関数を複素変数の指数関数に直し, 指数関数の積公式を使って整理した後, 実変数の指数関数と三角関数とに直す, という方法を用いた.

iii) 有理関数の積分は部分分数展開において, (分母の) 多項式の因数分解が必要となるが, 有理数の 2 次拡大や  $\sqrt{-1}$ などを付加して因数分解が可能であることを要請している, 不定元  $a$  などの拡大が必要な場合は対応していない (たとえば  $\sqrt{a}$  など). よって  $\int \frac{dx}{x^2 + 2a^2}$  は計算できるが,  $\int \frac{dx}{x^2 + 2a}$  には対応していない.

定積分は, 不定積分が求まれば正確に計算できることが期待される. 広義積分まで含めると, 変数変換, 関数の極限值, 関数 (値) の簡約化など, **Risa/Asir** の関数の取り扱いを含め, よりよい結果を得るための検討の余地や問題点は沢山ある.

## 参考文献

- [O1] 大島利雄, 数式処理による数学研究とプレゼンテーション, 数式処理とその周辺分野の研究, 数理解析研究所講究録 **1907** (2014), 97–109.
- [O2] 大島利雄, **Risa/Asir** による曲線と関数グラフの描画, 数式処理とその周辺分野の研究, 数理解析研究所講究録 **1955** (2015), 102–113.
- [O3] 大島利雄, 【特別講演】大学の数学教育における数式処理と **T<sub>E</sub>X** の活用, 数式ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究, 数理解析研究所講究録 **1978** (2015), 1–11.
- [O4] T. Oshima, Drawing curves, Symposium MEIS2015: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis, MI Lecture Notes 2015 **64** (2015), 117–120, Kyushu University, ISSN : 2188–1200
- [O5] T. Oshima, Drawing curves, Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III, to appear from Springer Japan.
- [O6] 大島利雄, `os_muldif.rr` および `os_muldif.pdf`, a library for computer algebra **Risa/Asir**, 2007–2016, <ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif/>