高校生のための大学数学講座

複素関数論

1. 複素微分と正則関数
2. 複素積分とコーシーの積分定理

大島利雄

城西大学 数理・データサイエンスセンター

https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/index-j.html

NHK 文化センター青山教室

2022 年 9 月 4 日

$f(z)$：複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域 U 上の正則関数

U 内の各点 c の近く（近傍）で収束べき級数で表せる

$$f(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots + a_n(z-c)^n + \cdots$$

整関数：複素平面全体で正則な関数，たとえば多項式，e^z, $\sin z$

導関数：$f'(z) = a_1 + 2a_2(z-c) + \cdots + na_n(z-c)^{n-1} + \cdots$

原始関数：$F(z) = C + a_0(z-c) + \frac{a_1}{2}(z-c)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1} + \cdots$

実関数の積分

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(b) - F(a)$$

$$\gamma : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R},\ \gamma(\alpha) = a,\ \gamma(\beta) = b$$

$$a = t_0 < t_1 = a + \tfrac{b-a}{N} < \cdots < t_j = \alpha + \tfrac{j(b-a)}{N} < \cdots < t_N = b$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N-1} f\big(\gamma(t_j)\big)\gamma'(t_j)(t_{j+1} - t_j)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N-1} f\big(\gamma(t_j)\big)\big(\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\big)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N-1} F_j\big(\gamma(t_{j+1})\big) - F_j\big(\gamma(t_j)\big) = F(b) - F(a)$$

和の各項の差は $o(\frac{1}{N})$ の誤差

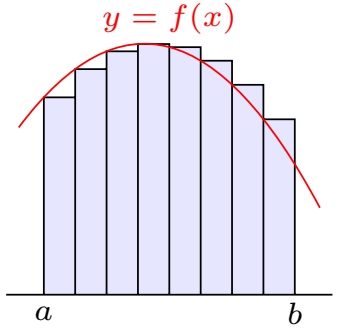
$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ が，$f(z)$ の一つの収束円の中に入っていれば，γ が $\mathbb{C}$ 内の曲線 C であっても正しい

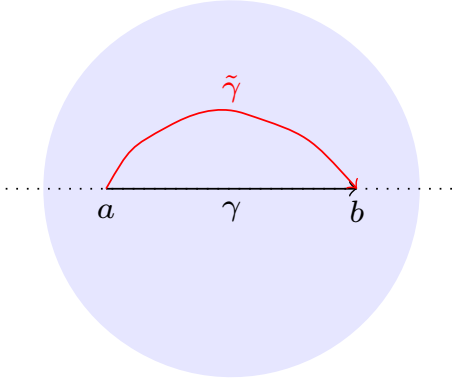
複素積分. γ が複素平面内の曲線 C で，$f(z)$ はその曲線に沿って正則とする

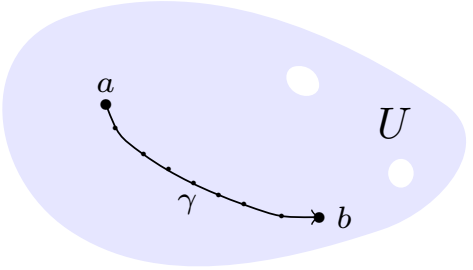
複素積分

$$\int_C f(z)dz$$

が同様に定義できる







原始関数 F は収束円内では存在するので，N を大きく取り，曲線を細分して，$F_j' = f$ となる F_j を使って定義してもよい．F_j の差は定数なので，F_j の取り方に依らない

$$|f(z)| \le M \quad (z \in C) \quad \Rightarrow \quad \left|\int_C f(z)dz\right| \le M|C| \quad (|C| \text{ は曲線 } C \text{ の長さ})$$

$-C$ は $-\gamma : [-\beta, -\alpha] \ni t \mapsto \gamma(-t) \in \mathbb{C}$ で定義される曲線（向きが逆）

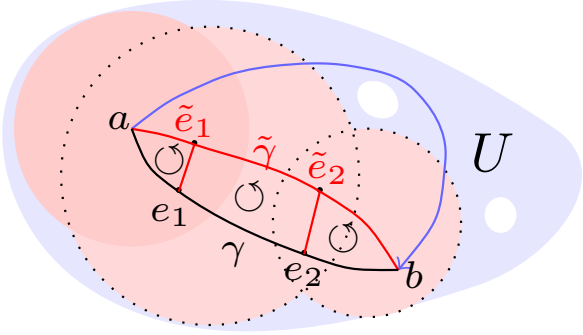
$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_{C} f(z)dz$$

収束円内部では，積分の値は，曲線の取り方によらず曲線の始点と終点で決まる

コーシーの積分定理．積分路の始点と終点を固定しておけば，正則領域 U 内で曲線を連続変形しても積分値は変わらない．特に，閉曲線 C の場合，それが領域内で一点に変形できれば

$$\int_{C} f(z)dz = 0$$

$$C : a \to e_1 \to e_2 \to b \to \tilde{e}_2 \to \tilde{e}_1 \to a$$
$$C_1 : a \to \underline{e_1 \to \tilde{e}_1} \to a$$
$$C_2 : e_1 \to \underline{e_2 \to \tilde{e}_2} \to \underline{\tilde{e}_1 \to e_1}$$
$$C_3 : e_2 \to b \to \underline{\tilde{e}_2 \to e_2}$$

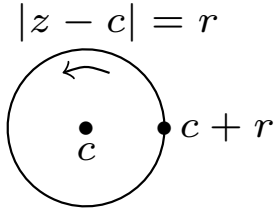


$$\int_{C_\gamma} - \int_{C_{\tilde{\gamma}}} = \int_{C} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0$$

閉曲線：始点と終点が同じ曲線

単純閉曲線：自分自身と交わらない閉曲線．反時計回りの向き（標準）

重要な例



$$\gamma : [0,2\pi] \ni t \mapsto c + re^{it} \in \mathbb{C},\ \gamma'(t) = rie^{it}$$

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{(z-c)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{(re^{it})^n} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{(1-n)it}}{r^{n-1}} dt$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{e^{(1-n)it}}{r^{n-1}(1-n)}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0 & (n \neq 1) \\ 2\pi i & (n=1) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dz}\frac{(z-c)^{1-n}}{1-n} = (z-c)^{-n} \quad : \textbf{原始関数}$$

$$\frac{d}{dz}\log(z-c) = \frac{1}{z-c} \quad \Rightarrow$$

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-c} = \left[\log(re^{it})\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \left[\log r + it\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi i$$

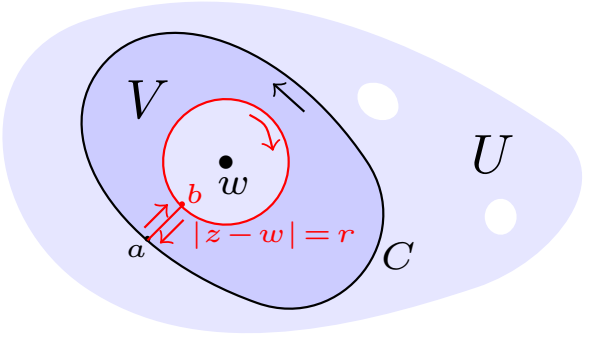
$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{(z-c)^n} = \begin{cases} 0 & (n : \textbf{整数},\ n \neq 1) \\ 2\pi i & (n=1) \end{cases}$$

コーシーの積分公式. $f(z)$ は単純閉曲線 C とその内部領域 V で正則ならば

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-w}dz \qquad (w \in V)$$

$$\tilde{C} := C + L_{a\to b} - C_{|z-w|=r} - L_{a\to b}$$

$$\int_{\tilde{C}} = 0 \ \Rightarrow\ \int_C = \int_{|z-w|=r}$$



$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-w}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-w|=r} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-w|=r} \frac{f(w)}{z-w}dz = f(w)$$

$C : |z-c| = R,\ |w-c| < R \ \Rightarrow$

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-c)-(w-c)} = \frac{1}{z-c}\frac{1}{1-\frac{w-c}{z-c}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z-c}\left(\frac{w-c}{z-c}\right)^n$$

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}dz\right)(w-c)^n$$

$\overline{D_R(c)} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-c| \le R\} \subset U \;\Rightarrow\; c$ でのべき級数は収束半径が R 以上

U 上の正則関数の異なる導入：

U 内の各点で複素微分可能 $\Rightarrow$ コーシーの積分定理 $\Rightarrow$ 収束べき級数で表せる

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

リウヴィルの定理. 適当な非負整数 n と整数 M 対して $|f(z)| \le M(|z|^n+1)$ を満たす整関数 $f(z)$ は n 次以下の多項式となる．特に有界な整関数は定数となる

$$m > n \;\Rightarrow\; |a_m| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{m+1}}dz\right| \le \frac{M(R^n+1)}{2\pi R^{m+1}} 2\pi R \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

代数学の基本定理. $n\ (>0)$ 次の多項式 $f(z)$ に対し，$f(c)=0$ を満たす $c \in \mathbb{C}$ が存在する

そのような c が存在しないとすると，$\frac{1}{f(z)}$ は整関数で $\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{f(z)} = 0$ を満たし，複素平面上で有界で定数となって矛盾

孤立特異点におけるローラン展開. $f(z):\ D_R(c)\setminus\{c\}$ で正則．このとき

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad\Big(|z-c|<R\Big),\quad a_n:=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)dz}{(z-c)^{n+1}}$$

$c=0$ とする．　$0<r_2<|w|<r_1<R,\quad a=r_1,\ b=r_2$

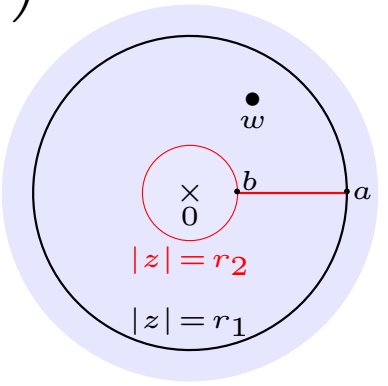
$C:=C_{|z|=r_1}+L_{a\to b}-C_{|z|=r_2}+L_{b\to a}$

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)dz}{z-w}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_1}\frac{f(z)dz}{z-w}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_2}\frac{f(z)dz}{z-w}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nw^n\quad\Big(a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)dz}{z^{n+1}},\ n=-m-1\Big)$$

$$\frac{1}{z-w}=\frac{1}{z(1-\frac{w}{z})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\Big(\frac{w}{z}\Big)^n\qquad(|w|<|z|=r_1)$$

$$=-\frac{1}{w(1-\frac{z}{w})}=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{w}\Big(\frac{z}{w}\Big)^m\qquad(|z|=r_2<|w|)$$



$a_n\neq0$ となる最小の n を c における**零点の位数**，$-n$ を**極の位数**という．$n\geq0$ のとき**除ける特異点**，$n=-\infty$ のとき**真性特異点**，$-\infty<n<0$ のとき**極**という

孤立特異点における留数

$$\mathrm{Res}(f,c) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r} f(z)dz$$

$f(z)$ が $z=c$ を $m\,(\geq 1)$ 位の極とするとき

$$\mathrm{Res}(f,c) = \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\frac{(z-c)^m f(z)}{(m-1)!}\right]_{z\to c}$$

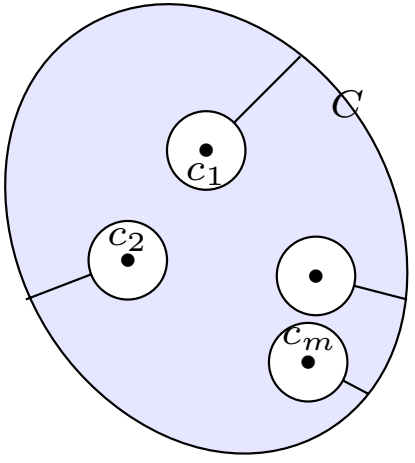
$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-c)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + \cdots$$

$g(z)$, $h(z)$ が $z=c$ で正則で，$g(z)$ が $z=c$ を一位の零点とするとき

$$\mathrm{Res}\left(\frac{h}{g}, c\right) = \frac{h(c)}{g'(c)}$$

留数定理. $f(z)$: 単純閉曲線 C とその内部で m 個の孤立特異点 $\{c_1,\ldots,c_m\}$ を除いて正則ならば

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}(f,c_j)$$



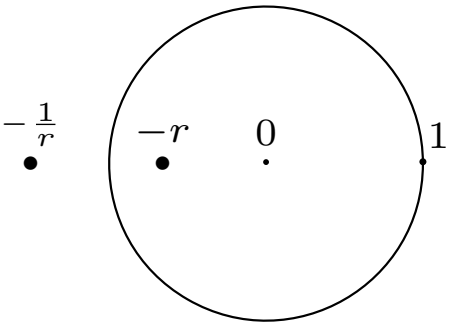
$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)dz}{iz} = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta \qquad (z = e^{i\theta},\ \frac{de^{i\theta}}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz)$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r\cos\theta + 1 &= r^2 + r(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + 1 = r^2 + r(z + \tfrac{1}{z}) + 1 \\ &= z^{-1}(rz^2 + (r^2+1)z + r) \\ &= z^{-1}(rz+1)(z+r) \end{aligned}$$

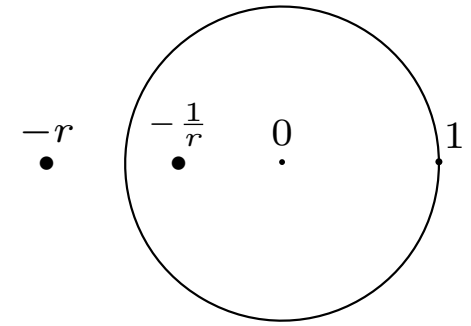
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r^2 + 2r\cos\theta + 1} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{i(rz+1)(z+r)}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i \lim\limits_{z\to -r} \dfrac{z+r}{i(rz+1)(z+r)} = \dfrac{2\pi}{1-r^2} & (|r|<1) \\ 2\pi i \lim\limits_{z\to -\frac{1}{r}} \dfrac{z+\frac{1}{r}}{i(rz+1)(z+r)} = \dfrac{2\pi}{r^2-1} & (|r|>1) \end{cases}$$

$|r| < 1 \ \Rightarrow$



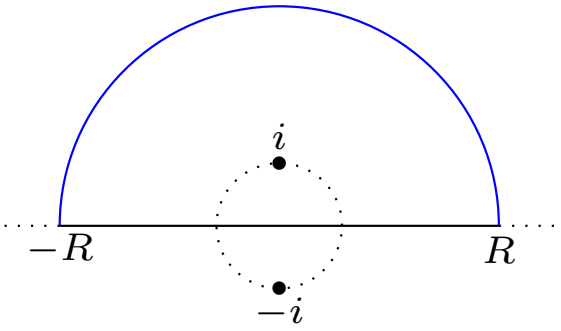
$|r| > 1 \ \Rightarrow$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos rx}{x^2+1} dx = \pi e^{-|r|} \quad (r : \textbf{実数})$$

$$C_R^+ := \{ Re^{i\theta} ; \theta \in [0, \pi] \}$$

$$\widetilde{C}_R := L_{-R \to R} + C_R^+$$



$$\int_{\widetilde{C}_R^+} \frac{e^{i|r|z} dz}{z^2+1} = 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{i|r|z}}{z^2+1}, i \right) = 2\pi i \cdot \left[\frac{e^{i|r|z}}{2z} \right]_{z=i} = \pi e^{-|r|}$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\cos rx}{x^2+1} dx + \int_{C_R^+} \frac{e^{i|r|z}}{z^2+1} dz$$

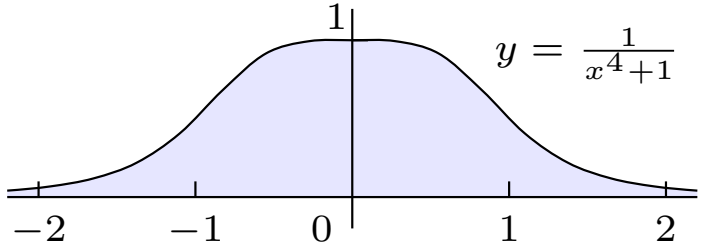
$$\left| e^{i|r|R(\cos\theta + i\sin\theta)} \right| = \left| e^{i|r|R\cos\theta - |r|R\sin\theta} \right| \leq 1 \quad (\theta \in [0, \pi])$$

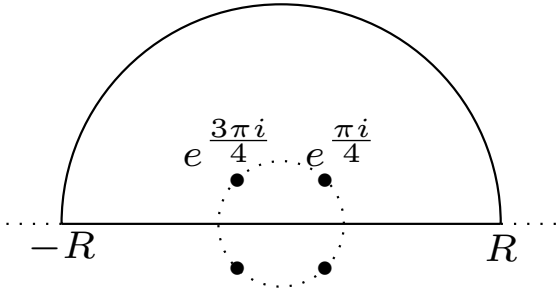
$$\left| \int_{C_R^+} \frac{e^{i|r|z}\, dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^2}, i \right) = 2\pi i \left[\frac{d}{dz} \frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2} \right]_{z\to i}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} \right]_{z\to i} = 2\pi i \left[\frac{-2}{(z+i)^3} \right]_{z\to i} = \frac{\pi}{2}$$

$$z^4+1=(z-e^{\frac{\pi i}{4}})(z-e^{\frac{3\pi i}{4}})(z-e^{\frac{5\pi i}{4}})(z-e^{\frac{7\pi i}{4}})$$





$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z^4+1},e^{\frac{\pi i}{4}}\Big)+2\pi i\cdot\mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z^4+1},e^{\frac{3\pi i}{4}}\Big)$$

$$=2\pi i\Big(\Big[\frac{1}{4z^3}\Big]_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}}+\Big[\frac{1}{4z^3}\Big]_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}}\Big)=\frac{\pi i}{2}(e^{-\frac{3\pi i}{4}}+e^{-\frac{9\pi i}{4}})$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^{\frac{\pi i}{2}}e^{-\frac{3\pi i}{4}}+e^{\frac{\pi i}{2}}e^{-\frac{9\pi i}{4}})=\frac{\pi}{2}(e^{-\frac{\pi}{4}i}+e^{\frac{\pi}{4}i})=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

定理. $f(z)$ は単純閉曲線 C とその内部で正則で，C 上で零にならないとする．このとき $f(z)$ の C 内の零点の個数は以下で与えられる（重複度込み）

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

$f(z)=a_m(z-c)^m+a_{m+1}(z-c)^{m+1}+\cdots\ \Rightarrow\ \frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-c}+b_0+b_1(z-c)+\cdots$

となるので，$\mathrm{Res}(\frac{f'}{f},c)=m$. $\big(\frac{1}{1-zg(z)}=1+zg(z)+z^2(g(z))^2+\cdots\big)$

ルーシェの定理. $f(z),\ g(z)$ は単純閉曲線 C とその内部で正則で，C 上では $|f(z)| > |g(z)|$ が成り立つとする．このとき C 内の $f(z)$ の零点の個数と $f(z)+g(z)$ の零点の個数は等しい

$h(z) = 1 + \dfrac{g(z)}{f(z)} = \dfrac{f(z)+g(z)}{f(z)}$ とおくと

$$\frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)} = \big(\log(f(z)+g(z))\big)' = \big(\log(f(z)) + \log(h(z))\big)' = \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

曲線 C を $\gamma : [\alpha,\beta] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{C}$ とするとき，曲線 Γ を $\tilde{\gamma} : [\alpha,\beta] \mapsto h(\gamma(t)) \in \mathbb{C}$ とする

$$\int_C \frac{h'(z)}{h(z)}dz = \int_\alpha^\beta \frac{h'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)}{h(\gamma(t))}dt = \int_\alpha^\beta \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{\tilde{\gamma}(t)}dt = \int_\Gamma \frac{dw}{w}$$

Γ は 1 を中心とする半径 1 の円内の閉曲線なので，上の値は 0

よって前定理からルーシェの定理が分かる

適用例：$f(z) = z^n$, $g(z)$ は $(n-1)$ 次以下の多項式，$C : |z| = R$ は大きな円

- $z^5 + z^4 + z^2 + 1 = 0$ は，$\frac{1}{2} < |z| < 2$ の範囲に解を 5 つ持つ
- $2z^n = \sin z$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ は $|z| < 1$ の範囲で n 個ある