高校生のための大学数学講座

複素関数論

1. 複素微分と正則関数
2. 複素積分とコーシーの積分定理

大島利雄

城西大学 数理・データサイエンスセンター

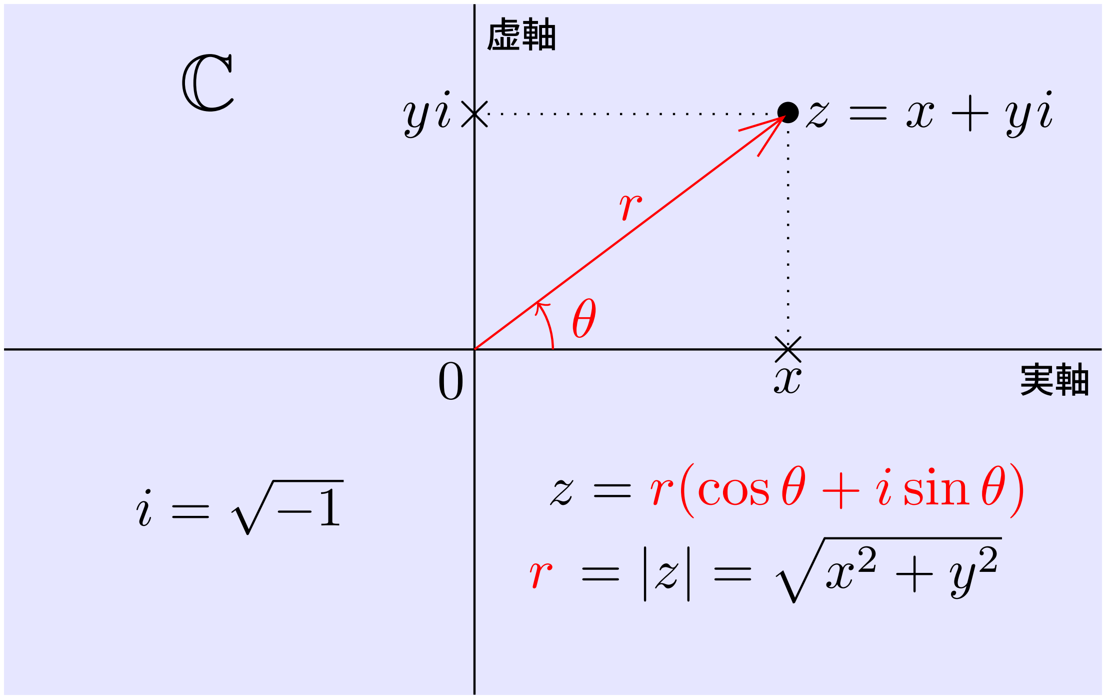
https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/index-j.html

NHK 文化センター青山教室

2022 年 8 月 7 日

ガウス：Johann Carl Friedrich Gauß (1777〜1855)

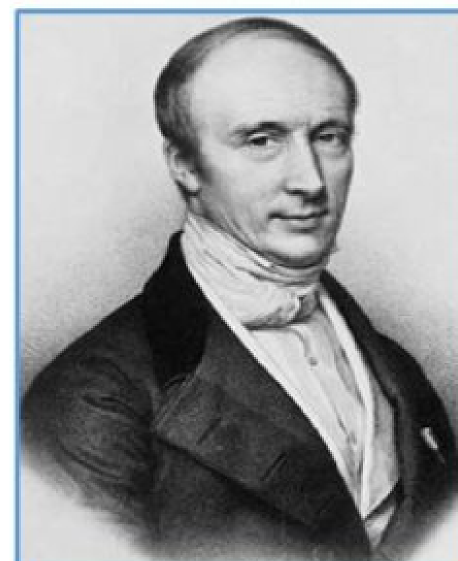
1811 年：Gauss 平面（複素数平面）



コーシー：Augistin Louis Cauchy (1789〜1857)

Cauchy の積分定理

$$\boxed{\oint f(z)dz = 0}$$



複素関数

関数	$z=0$	$z=\frac{1}{2}$	$z=1$	$z=2$	$z=\frac{\sqrt{-1}}{2}=\frac{i}{2}$	$\cdots$
$f(z)=1+z+z^2$	1	$\frac{7}{4}$	3	7	$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}i$	$\cdots$
$f(z)=\frac{1}{1-z}$	1	2	$\times$	-1	$\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i$	$\cdots$

$$1+\frac{i}{2}+\left(\frac{i}{2}\right)^2=1+\frac{i}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{i}{2}$$

$$\frac{1}{1-\frac{i}{2}}=\frac{2}{2-i}=\frac{2(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{4+2i}{5}$$

$$v_n(z)\overset{\text{定義}}{:=}1+z+z^2+\cdots+z^n$$

$$zv_n(z)=\qquad z+z^2+\cdots+z^n+z^{n+1}$$

$$(1-z)v_n(z)=1-z^{n+1}\quad\Rightarrow$$

$$v_n(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{z^{n+1}}{1-z}\qquad(z\neq 1)$$

$$|z|<1\Rightarrow\left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right|=\frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}\leq\frac{|z|^{n+1}}{1-|z|}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$v_n(z)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\quad\text{(無限級数)}$$

$$1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots=\frac{1}{(1-z)^2}\qquad(|z|<1)$$

複素関数を沢山作りたい！

複素数 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ が $|a_n| \leq 1$ を満たすとき，無限級数（べき級数）

$$u(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

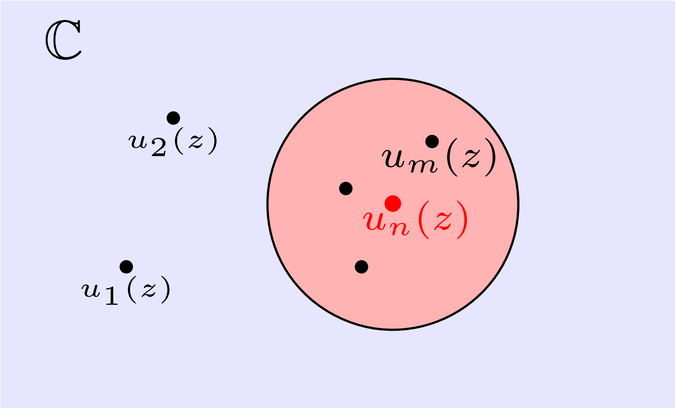
は収束するか (値が決まるか) ？

$u_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n$ とおく

$|z| < 1$ で考えよう．$m > n$ のとき

$$|u_m(z) - u_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |z|^k$$

$$= \frac{|z|^{n+1} - |z|^{m+1}}{1 - |z|} \leq \frac{|z|^{n+1}}{1 - |z|}$$



上の値は，n を大きくすればいくらでも小さくなる

このようなとき，$u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z)$ は収束する（コーシーの収束定理）

たとえば，$u(z)$ の値を誤差 10^{-10} 以下で決めるには，上の値が 10^{-10} 以下となるよう n を十分大きくとって，$u_n(z)$ を近似値とすればよい

このようにして，$u(z)$ は単位円 $D := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$ 上の複素関数を定める

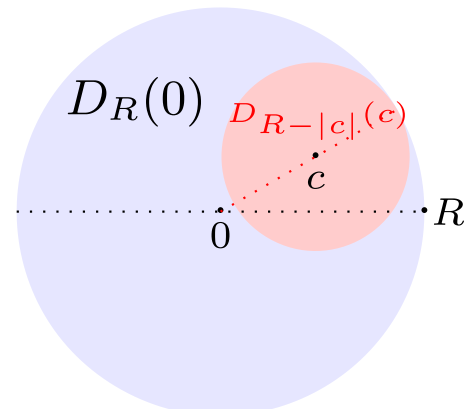
べき級数 $u(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$

収束半径 $R \in [0, \infty]$: $|z| < R$ なら $u(z)$ は収束し，$|z| > R$ なら収束しない

$\left(r = |z| < R \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n r^n| = 0, \quad r > R \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n r^n| \neq 0\right)$

$D_R(0) := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$: $u(z)$ の**収束円**という

a_n	1	n	2^n	$\frac{n}{2^n}$	$n!$	$\frac{1}{n!}$
収束半径	1	1	$\frac{1}{2}$	2	0	∞



定理. 収束べき級数 $u(z)$ の収束半径を R とするとき $|c| < R$ を満たす複素数 c に対し，$u(z)$ は $z = c$ を中心とする収束半径が $R - |c|$ 以上のべき級数で表せる

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big((z-c)+c\big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k c^{n-k} (z-c)^k$$

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad \left(b_0 = u(c),\ b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1},\ b_k = \sum_{n=k}^{\infty} {}_nC_k a_n c^{n-k}\right)$$

複素微分

$$u'(c) := \lim_{\mathbb{C}\ni h\to 0} \frac{u(c+h)-u(c)}{h}$$

定理．収束べき級数 $u(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots +$ は収束円の内部で**複素微分**可能で，導関数 $u'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots$ の収束半径は同じ

$c = 0$ のとき $\frac{u(h)-u(0)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h^{n-1}$ (収束べき級数) なので，$h \to 0$ が存在し $u'(0) = a_1$

収束円内の点 c を中心とするべき級数より $u'(c) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1}$.　$a_n = \frac{u^{(n)}(0)}{n!}$

正則関数．複素平面内の領域 U で定義された関数 $u(z)$ が，U 内の任意の点 c の近くで c を中心とするべき級数で表せるとき，$u(z)$ を U 上の正則関数という

正則関数の和，積，商，合成，導関数などは，定義された領域で正則になる

一致の定理．領域 U で定義された 2 つの正則関数と U 内の点 c に対し，c に収束する U 内の点列 $\{c_j\}$ $(c_j \neq c)$ で関数の値が一致していれば，両者は同じ関数

c を原点として差の関数を考えよう．一致していなければ，その差は

$a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \cdots = a_m z^m (1 + \frac{a_{m+1}}{a_m} z + \cdots)$ $(a_m \neq 0)$ と表せる．これは $z \neq 0$ で $|z|$ が小さいときは 0 にはならない (U 内の 2 点は何個かの収束円でつなげる)

正則関数

$$u'(z) = u(z)$$

$$u(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z_n + \cdots$$

$$u'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots\cdots\cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)} = \cdots = \frac{a_0}{n!} = \frac{u(0)}{n!}$$

$$e(z) := 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$ (**指数関数**) $\Rightarrow$ $u(z) = u(0)e(z)$

$$\{e(z+c)\}' = e(z+c) \;\Rightarrow\; e(z+c) = e(c)e(z)$$

$$e(z+w) = e(z)\cdot e(w)$$ (**和公式**)

$$\begin{aligned} e(iz) &= 1 + \frac{i}{1!}z + \frac{i^2}{2!}z^2 + \frac{i^3}{3!}z^3 + \frac{i^4}{4!}z^4 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) \end{aligned}$$

$$\cos z := \frac{e(iz)+e(-iz)}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sin z := \frac{e(iz)-e(-iz)}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$e(iz) = \cos z + i\sin z$$

$$\cos 0 = 1,\ \cos(-z) = \cos z, \quad \sin 0 = 0,\ \sin(-z) = -\sin z$$

$$(\sin z)' = \cos z,\ (\cos z)' = -\sin z$$

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \sin^2 z &= \left(\tfrac{e(iz)+e(-iz)}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{e(iz)-e(-iz)}{2i}\right)^2 = \tfrac{4e(iz)e(-iz)}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e\big(\pm i(z+w)\big) &= e(\pm iz)\cdot e(\pm iw) \\ \cos(z+w) \pm i\sin(z+w) &= (\cos z \pm i \sin z)(\cos w \pm i \sin w) \\ &= (\cos z\cdot\cos w - \sin z\cdot\sin w) \pm i(\sin z\cdot\cos w + \cos z\cdot\sin w) \\ \cos(z+w) &= \cos z\cdot\cos w - \sin z\cdot\sin w \\ \sin(z+w) &= \sin z\cdot\cos w + \cos z\cdot\sin w\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e(\pm 3iz) &= e(\pm iz)^3 \\ \cos 3z \pm i\sin 3z &= (\cos z \pm i\sin z)^3 \\ &= \cos^3 z \pm 3i\cos^2 z\cdot\sin z - 3\cos z\cdot\sin^2 z \mp i\sin^3 z \\ \cos 3z &= \cos^3 z - 3\cos z\cdot\sin^2 z = 4\cos^3 z - 3\cos z \\ \sin 3z &= 3\cos^2 z\cdot\sin z - \sin^3 z = 3\sin z - 4\sin^3 z\end{aligned}$$

z が実数なら、$e(z)$, $\sin z$, $\cos z$ は実数

x を実数とする．$x \in [0,1]$ のとき

$$\sin x = (x - \frac{x^3}{3!}) + x^5(\frac{1}{5!} - \frac{x^2}{7!}) + \cdots \geq x(1 - \frac{x^2}{6}) \geq x(1 - \frac{1}{6})$$

$$\cos x = (1 - \frac{x^2}{2!}) + x^4(\frac{1}{4!} - \frac{x^2}{6!}) + \cdots \geq 1 - \frac{x^2}{2} \geq \frac{1}{2}$$

よって $x \in [0,1]$ で，$\cos x$ は単調減少，$\sin x$ は単調増加

$f(x) = \cos x - \sin x$ とおく．$\sin 1 \geq \frac{5}{6}$, $\cos 1 \leq \sqrt{1 - \frac{5^2}{6^2}} < \sin 1$

$f(x)$ は $[0,1]$ で単調減少で，$x=0$ で 1，$x=1$ で負であるから，$f(x)=0$ となる $x \in [0,1]$ がただ一つある．それを $\frac{\pi}{4}$ と定義する（$\pi \in (0,4)$）

x	0	$\cdots$	1
$f(x)$	1	$\searrow$	負

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) \geq 0 \quad (x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \text{単調減少})$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) \quad (x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \text{単調増加})$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x,\ \sin\pi = 0, \quad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x, \quad \cos\pi = -1.$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin x, \quad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \quad \cos(x+2\pi) = \cos x$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

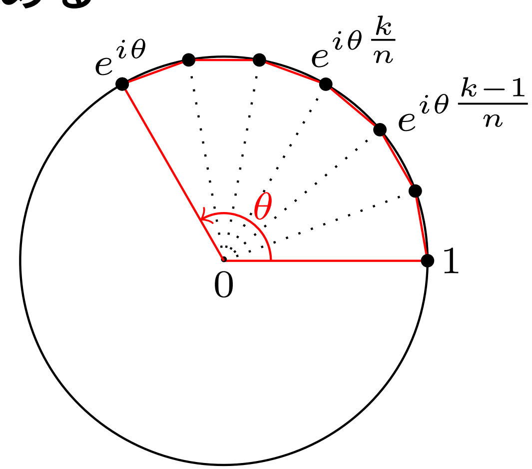
$e(ix) = \cos x + i\sin x$ は，$x \in [0, 2\pi]$ のとき，複素平面の単位円周上 1 を出発点として，反時計回りにちょうど一回まわる

円弧 $C_\theta := \{e(ix)\,;\, x \in [0, \theta]\} \quad (\theta \in (0, 2\pi])$ の長さは

$$\sum_{k=1}^{n} \left|e(i\theta\tfrac{k}{n}) - e(i\theta\tfrac{k-1}{n})\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|e(i\tfrac{\theta}{n}) - 1\right| = \left|\frac{e(i\frac{\theta}{n})-1}{\frac{1}{n}}\right| \xrightarrow{n\to\infty} |i\theta| = \theta$$

単位円の長さ θ の円弧に対する中心角の大きさを θ と定める

半径 1 の円周の長さは 2π となる



$e(x)$ は，$x \in (-\infty, \infty)$ で正で単調増加で

$$e(-x) = e(x)^{-1}, \quad \lim_{x\to\infty} e(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e(x) = 0$$

$y > 0$ のとき，$y = e(x)$ となる実数 x を $\log y$ と定める

x と θ が実数の時 $\quad e(x+i\theta) = e(x)e(i\theta) = e(x)(\cos\theta + i\sin\theta) = z$

z が 0 でない複素数の時 $\quad \log z := \log|z| + i\arg z$ (対数関数)

$$\log\bigl(e(x+i\theta)\bigr) = x + i\theta,$$

$$e(\log z) = e(\log|z| + i\arg z) = z \quad (z = |z|\cdot e(i\arg z))$$

$\Rightarrow$ $\log z$ は $e(z)$ の逆関数

$z \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ のとき $\quad z^\alpha := e(\alpha\log z)$ (べき関数)

$$\Rightarrow \log zw = \log\bigl(e(\log z)\cdot e(\log w)\bigr) = \log\bigl(e(\log z + \log w)\bigr) = \log z + \log w$$

$$\log z^\alpha = \alpha\log z, \quad (zw)^\alpha = e(\alpha\log zw) = z^\alpha w^\alpha, \quad (z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$$

$$z^{\alpha+\beta} = e\bigl((\alpha+\beta)\log z\bigr) = e(\alpha\log z)\cdot e(\beta\log z) = z^\alpha z^\beta$$

$$z^n = \overbrace{z\times\cdots\times z}^{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad z^0 = 1$$

$$e := e(1) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2.718282818\cdots$$

$$\log e = 1 \;\Rightarrow\; e^z = e(z\log e) = e(z)$$

$$-1 = (1-z)' = \bigl(e(\log(1-z))\bigr)' = e\bigl(\log(1-z)\bigr)\bigl(\log(1-z)\bigr)' = (1-z)\bigl(\log(1-z)\bigr)'$$

$$\left(\log\frac{1}{1-z}\right)' = \bigl(-\log(1-z)\bigr)' = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

$$\log\frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \cdots \qquad (|z|<1)$$

$$\log(1+z) = -\log\frac{1}{1-(-z)} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \qquad (|z|<1)$$

z が $c \neq 0$ に近い $\Rightarrow$ $\log z = \log c + \log(1 + \frac{z-c}{c}) = \log c + \frac{z-c}{c} - \frac{(\frac{z-c}{c})^2}{2} + \cdots$

$$\log\frac{1+z}{1-z} = \log\frac{1}{1-z} + \log(1+z) = 2(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \cdots)$$

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$$

$$= \log\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 9^2} + \frac{1}{7\cdot 9^3} + \cdots) = 0.693147\cdots$$

$$\big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big)^\alpha = r^\alpha(\cos\alpha\theta + i\sin\alpha\theta)$$

$$\sin nz = \sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]} {}_nC_{2k-1}(-1)^{k-1}\cos^{n-2k+1}z\cdot\sin^{2k-1}z = n\cos^{n-1}z\cdot\sin z - \cdots$$

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kz = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikz} = e^{-inz}\frac{e^{i(2n+1)z}-1}{e^{iz}-1} = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}$$

$$i^i = e^{i\log i} = e^{i\cdot i\arg i} = e^{i\cdot i(2m+\frac{1}{2})\pi} = e^{-(2m+\frac{1}{2})\pi} \qquad (m = 0,\ \pm 1, \ldots)$$

実変数の関数が複素変数の正則関数に拡張されるなら，拡張は一意的
実変数で成り立っていた関係式は，拡張した正則関数においても成り立つ

例：$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ は z が実数で成り立つから，複素変数でも OK

$$(e^x)' = e^x \;\Rightarrow e(z)' = e(z)$$

関数の近似

$$s_n(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \sin x$$

$$s_{2m+1}(x) < \sin x < s_{2m}(x) \quad (x > 0,\ m = 0, 1, \ldots)$$