

ディンキン図形をめぐって 現代数学の楽しみ

大島利雄

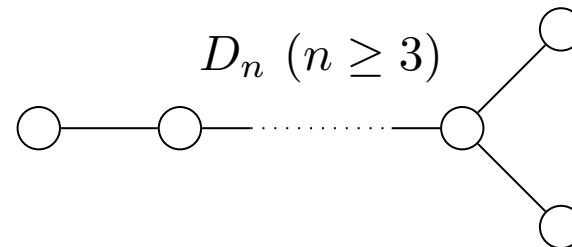
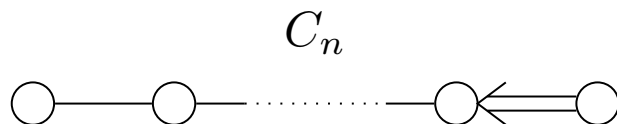
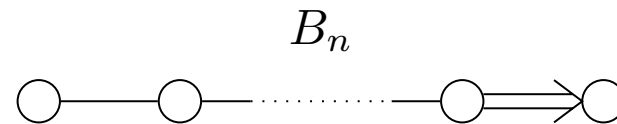
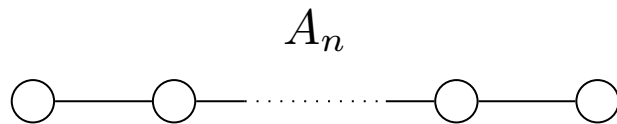
城西大学 数理・データサイエンスセンター

<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/index-j.html>

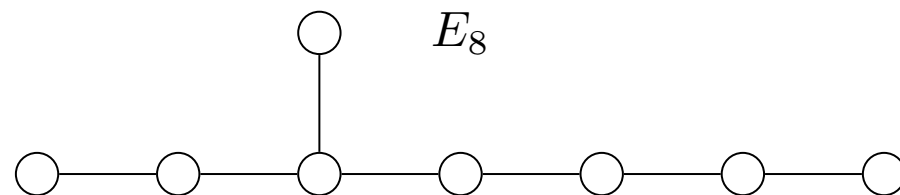
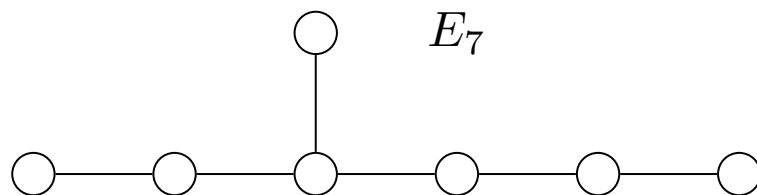
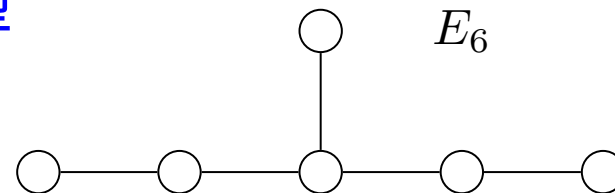
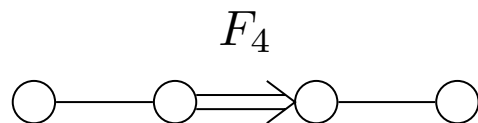
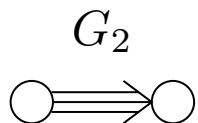
NHK 文化センター横浜ランドマーク教室

2021 年 8 月 28 日

古典型 ($A_1 = B_1 = C_1, B_2 = C_2, A_3 = D_3, D_2 = A_1 + A_1$)



例外型



○：空間の（線型独立な）ベクトル，線はベクトルの相互関係を表す

線で結ばれていない $\Leftrightarrow$ 互いに直交

Eugene Dynkin (1924~2014)

ユダヤ系ロシア人，モスクワ大学

目に問題があって兵役免除，ポジションには不遇

Gelfand (1903~2009) セミナーに参加（代数）

1947 「半単純リー群の構造」 Dynkin 図形

1952 「半単純リー環の半単純部分リー環」

その後は確率論の方が中心

Kolmogorov (1903~1987) の指導（確率論）

1952 「マルコフ過程論」

1962 国際数学会議（招待講演）

1977~ コーネル大（アメリカ）に移る

ロシアでは Dynkin diagram とは言わない

2009 年 9 月 Dynkin から mail を受け取った

「ルート系の部分ルート系」の研究と論文について



鏡映変換

平面の点は $x = (x_1, x_2)$ ，空間の点は $x = (x_1, x_2, x_3)$ と表せる

$x = (x_1, \dots, x_n)$: n 次元ユークリッド空間の座標

$O := (0, \dots, 0)$: 原点

$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$: 2 点 x, y の距離

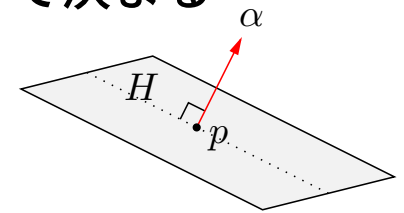
$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = |x| \cdot |y| \cdot \cos \angle xOy$: x と y の内積

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow (x, y) = 0$$

超平面 H : H に直交するベクトル α と H に含まれる点 p で決まる

$n = 2 \Rightarrow$ 直線 $n = 3 \Rightarrow$ 平面

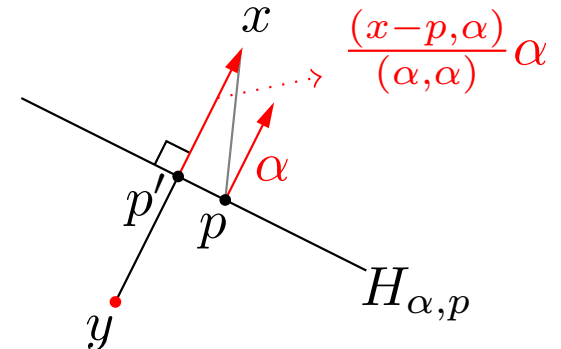
$$H_{\alpha, p} = \{x \mid (x - p, \alpha) = 0\}$$



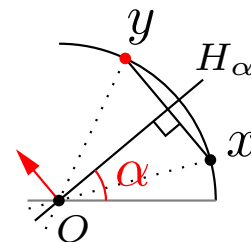
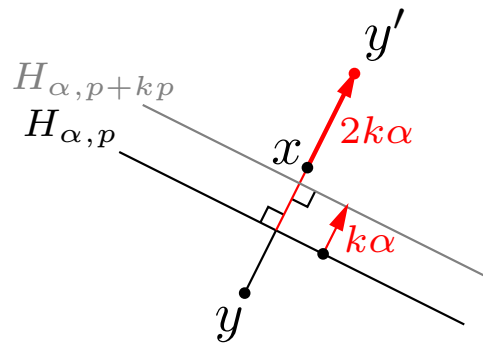
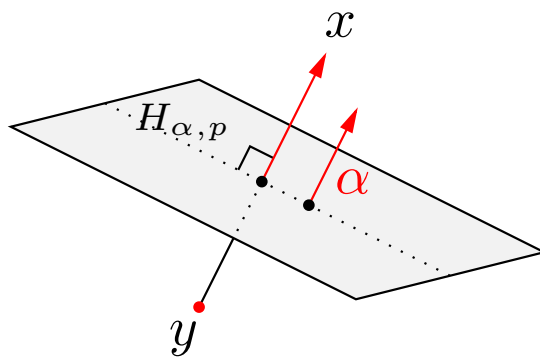
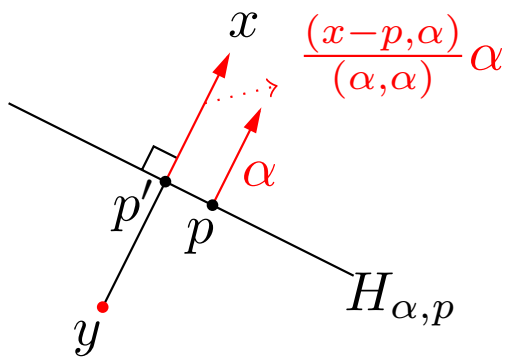
x と y が H に対して鏡映の位置 : $\frac{x+y}{2} \in H_{\alpha, p}$ かつ $(x - y) \perp H_{\alpha, p}$

$s_{H_{\alpha, p}}(x) := y$: $H_{\alpha, p}$ についての鏡映変換という

$$s_{H_{\alpha, p}}(x) = x - 2 \frac{(x - p, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$



$\therefore (x - p, \alpha) = (x - p', \alpha), \quad x - p' = c\alpha$ とおける



$$s_{H_{\alpha,p}} \circ s_{H_{\alpha,p}} = id \quad (= 1)$$

$$s_{H_{\alpha,p+k\alpha}} \circ s_{H_{\alpha,p}}(x) = x + 2k\alpha : \text{平行移動}$$

$$H_{\alpha} := H_{\alpha,0} : \text{原点 } O \text{ を通る超平面}, \quad s_{\alpha} := s_{H_{\alpha,0}}$$

$$s_{(-\sin \alpha, \cos \alpha)}(x) : x \text{ の偏角 } \theta \text{ を } 2\alpha - \theta \text{ に変える}$$

$$s_{(-\sin \alpha, \cos \alpha)} \circ s_{(-\sin \beta, \cos \beta)}(x) : \text{原点を中心とする角度 } 2(\alpha - \beta) \text{ 回転}$$

ユークリッド空間の合同変換：鏡映を組み合わせれば得られる

$$\text{有限鏡映群} : G = \langle s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_n} \rangle \quad \#G < \infty \quad (\Rightarrow \text{分類可})$$

$$S_3 := \langle g_1, g_2 \rangle : g_1^2 = g_2^2 = (g_1 g_2)^3 = 1 : 3 \text{ 次置換 (対称) 群}$$

$$1 = g_1 g_2 g_1 g_2 g_1 g_2 \Rightarrow g_1 g_2 g_1 = g_1 g_2 g_1 \cdot g_1 g_2 g_1 g_2 g_1 g_2 = g_2 g_1 g_2$$

$$S_3 = \{1, g_1, g_2, g_1 g_2, g_2 g_1, g_1 g_2 g_1\}, \quad \#S_3 = 6$$

$$: \{1, 2, 3\} \text{ の置換全体} \quad g_1 : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases} \quad g_2 : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases} \quad g_1 g_2 : \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \rightarrow 3 \end{matrix}$$

三角形の折り返しによる平面の敷き詰め

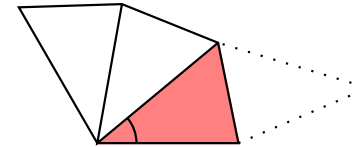
三角形を各辺に関して次々折り返していったら、平面を敷き詰める

三角形の1つの内角の周りで折り返していったら元に戻るのだから

$\Rightarrow$ 内角: $\frac{360^\circ}{p}$ p : 奇数 $\Rightarrow$ 二等辺三角形

三角形の内角: $\frac{360^\circ}{p}, \frac{360^\circ}{q}, \frac{360^\circ}{r}$ (和は 180°)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \quad (3 \leq p \leq q \leq r)$$



$$\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{3}{p} \text{ より, } p \leq 6$$

$p = 6$ $\Rightarrow q = r = 6 \Rightarrow$ 正三角形, $p = 5$ $\Rightarrow \frac{2}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \Rightarrow$ 不適, ...

$\Rightarrow (p, q, r) : (6, 6, 6) \quad (4, 8, 8) \quad (4, 6, 12) \quad (3, 12, 12) \Rightarrow \text{OK}$

敷き詰めた図形は, “直線で区切られ”, その直線での鏡映で不変

最も直線の集まった点 (全ての方向の直線が交わった点) を原点にとる

直線は平面の有限個のベクトル $\alpha \in \Sigma$ (ルート系) で表せる:

$$L_{\alpha, k} := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = k \right\} \quad (k \in \mathbb{Z}, \alpha \in \Sigma)$$

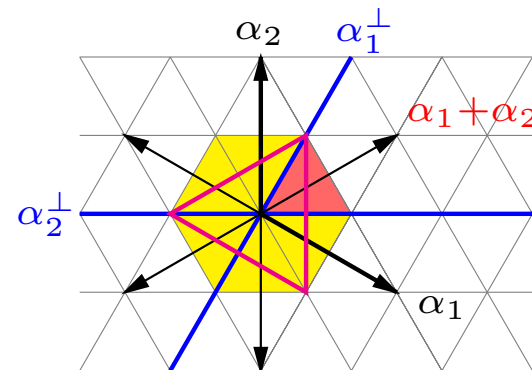
階数 2 のルート系と (拡大) ディンキン図形

A_2 型 $(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$ $I_2(3)$

$$\Sigma^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\} \quad : \text{正ルート全体}$$
$$\Sigma^- := -\Sigma^+ = \{-\alpha \mid \alpha \in \Sigma^+\} : \text{負ルート全体}$$

$\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$: ルートの全体

$\Psi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$: ルートの基本系


$$\angle \alpha_1 \alpha_2 = 120^\circ, |\alpha_1| = |\alpha_2| \quad (\Rightarrow \quad 2 \frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = -1) \quad \text{これのよい実現} \Rightarrow$$
$$\Psi = \{\alpha_1 = \textcolor{red}{e}_1 - \textcolor{red}{e}_2, \alpha_2 = \textcolor{red}{e}_2 - \textcolor{red}{e}_3\} \subset \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$
$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1), \alpha_1 = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$$
$$s_1(x) := s_{\alpha_1}((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2, x_3) - 2 \frac{(x, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1 = (x_2, x_1, x_3)$$
$$-2 \frac{(x, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1 = -2 \frac{x_1 - x_2}{2} (1, -1, 0) = (x_2 - x_1, x_1 - x_2, 0)$$
$$s_2(x) = (x_1, x_3, x_2), \quad s_1 s_2 : 120^\circ \text{ 回転} \Rightarrow (s_1 s_2)^3 = 1$$
$$-(\alpha_1 + \alpha_2)$$

ディンキン図形： $\overset{\alpha_1}{\bigcirc} - \overset{\alpha_2}{\bigcirc}$

拡大ディンキン図形：

$$\{\text{鏡映面}\} = \bigcup_{\alpha \in \Sigma^+} \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid 2 \frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}\}$$

$W := \langle s_1, s_2 \rangle$: **ワイル群** (3 次置換群 ($:= \{1, 2, 3\}$ の並べ替え)), $\#W = 6$

$B_2 = C_2$ 型 $(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ $I_2(4)$

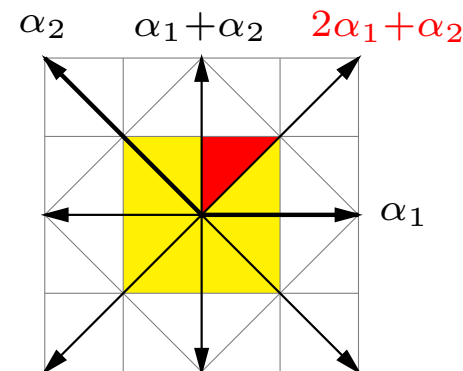
$$\Psi = \{\alpha_1, \alpha_2\} = \{e_1, e_2 - e_1\}$$

$$\Sigma^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2\}$$

$$\angle \alpha_1 \alpha_2 = 135^\circ, \alpha_2 = \sqrt{2} \alpha_1, (s_1 s_2)^4 = 1$$

$$s_1(x_1, x_2) = (-x_1, x_2), s_2(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

$\#W = 8$ 拡大ディンキン図形: $\textcircled{1} \xrightarrow{-(2\alpha_1 + \alpha_2)} \textcircled{2} \xleftarrow{\alpha_1} \textcircled{1}$



G_2 型 $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ), (30^\circ, 30^\circ, 120^\circ)$ $I_2(6)$

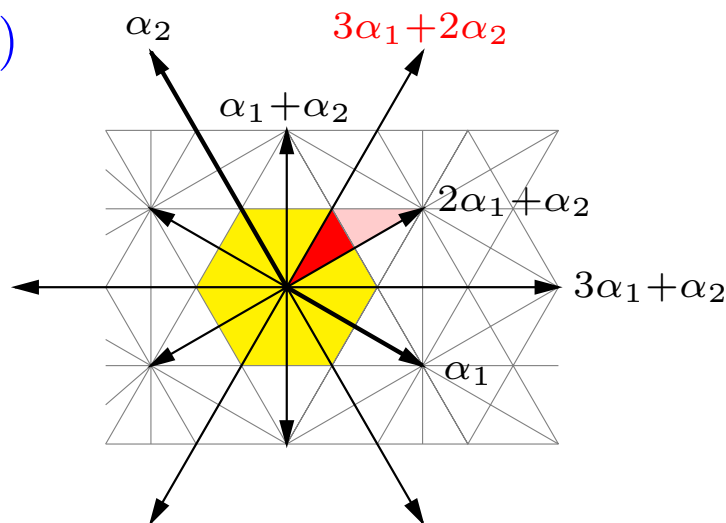
$$\Psi = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = -2e_1 + e_2 + e_3\}$$

$$\Sigma^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2,$$

$$3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$$

$$\angle \alpha_1 \alpha_2 = 135^\circ, \alpha_2 = \sqrt{3} \alpha_1, (s_1 s_2)^6 = 1$$

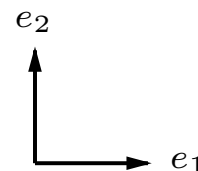
$\#W = 12$ $\textcircled{1} \xrightarrow{-(3\alpha_1 + 2\alpha_2)} \textcircled{2} \xRightarrow{\alpha_1} \textcircled{3}$



$A_1 + A_1$ 型

$\textcircled{1} \xrightarrow{-e_1} \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \xrightarrow{\alpha_1 = e_1} \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \xrightarrow{\alpha_2 = e_2} \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \xrightarrow{-e_2} \textcircled{1}$

$$(s_1 s_2)^2 = 1$$



ルート系の分類 (ディンキン図形)

Σ : ルート系 (階数 n) ($\#\Sigma < \infty$)

- (1) $\mathbb{R}^n$ を張る (部分空間 $\mathbb{R}^{n-1}$ には入らない)
- (2) $\alpha \in \Sigma, k\alpha \in \Sigma \Rightarrow k = \pm 1$
- (3) $s_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \in \Sigma \quad (\forall \alpha, \beta \in \Sigma)$
- (4) $2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \quad (\forall \alpha, \beta \in \Sigma) \Rightarrow \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \cdot \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (\alpha \neq \pm\beta)$

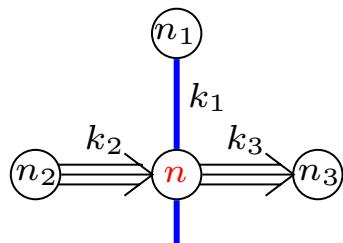
$\Sigma \supset \Psi$: 基本形とは (1), $\#\Psi = n$, $\Psi \supset \forall \{\alpha, \beta\} : (\mathbb{R}\alpha + \mathbb{R}\beta) \cap \Sigma$ の基本形

ディンキン図形 : Ψ の元を $\circ$ で, 2 個の $\circ$ 間をディンキン図形で表したもの

拡大ディンキン図形 : Ψ に最大のルートの -1 倍を加えたディンキン図形

さらに Ψ の元の係数を書き入れる (付加した $\circ$ には 1 を入れる)

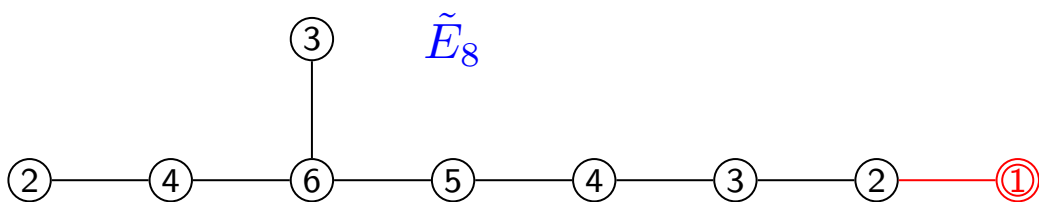
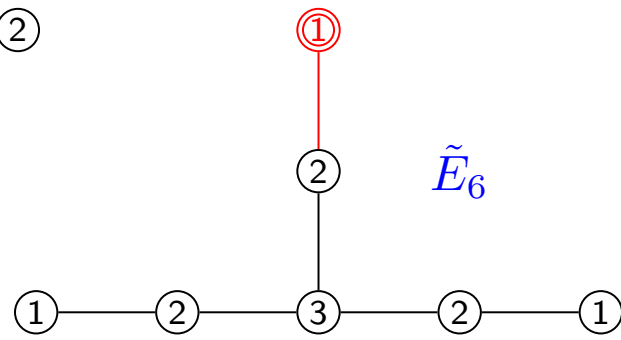
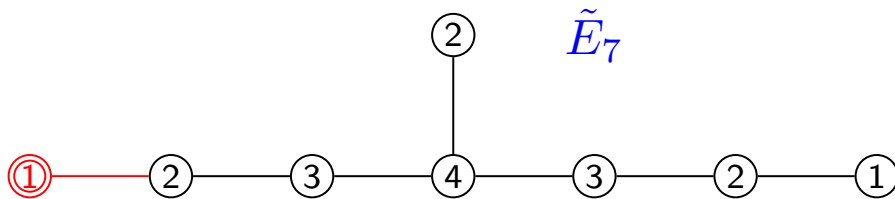
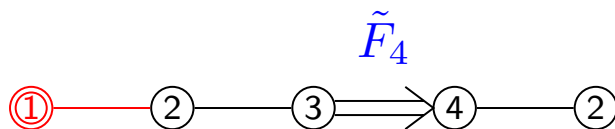
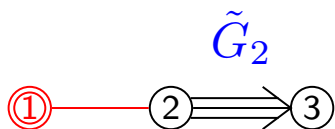
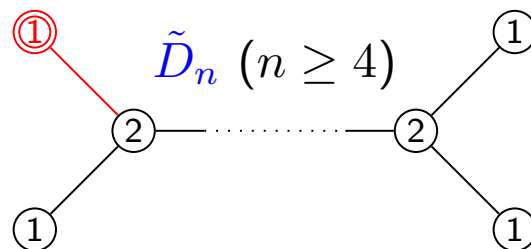
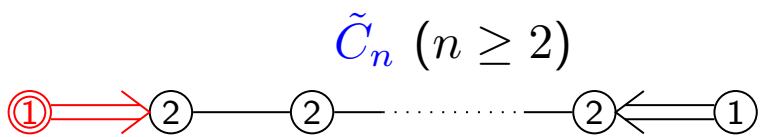
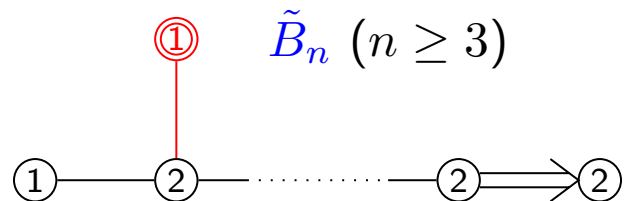
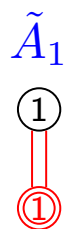
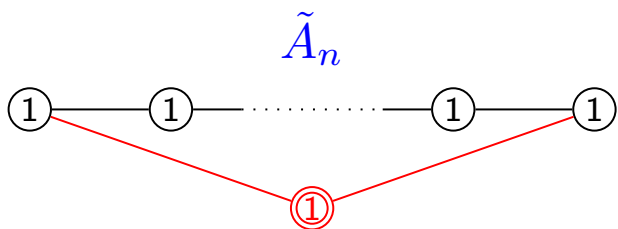
$$\text{---} \circ p \text{---} \circ q \text{---} \circ r \text{---} \Rightarrow 2q = p + r \qquad \left(2\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} : \text{カルタン行列}$$



$$\Psi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

$$\Rightarrow 2n = k_1 n_1 + k_2 n_2 + n_3 + \dots$$

拡大ディンキン図形



$$\Psi = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \dots, \alpha_n = e_n - e_{n+1}\}$$

$$\Sigma = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n+1\}$$

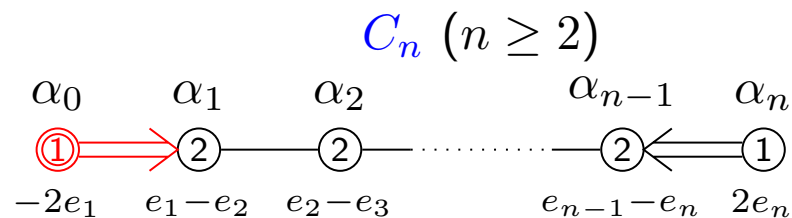
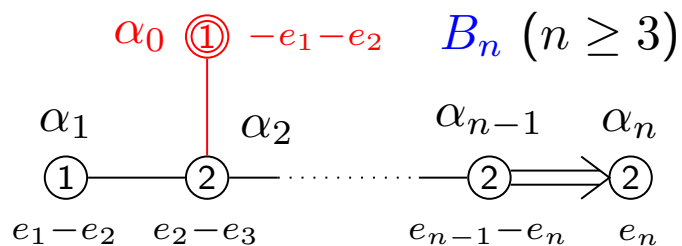
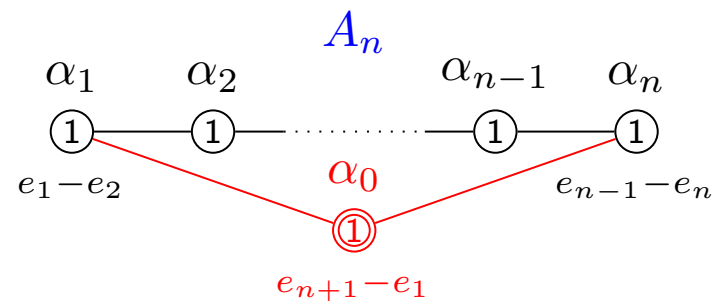
$$s_j := s_{e_j - e_{j+1}} : x_j \leftrightarrow x_{j+1} \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$(s_i s_j)^{n_{i,j}} = 1 \quad : \quad n_{i,j} = 1 \quad (i = j), \quad 2 \quad (|i - j| > 1), \quad 3 \quad (|i - j| = 1)$$

$W : \{1, 2, \dots, n+1\}$ の並び替え ($n+1$ 次置換群)

$$\#W = (n+1)!, \quad \#\Sigma = n(n+1)$$

W -不変式 : 対称式, 基本対称式, ...

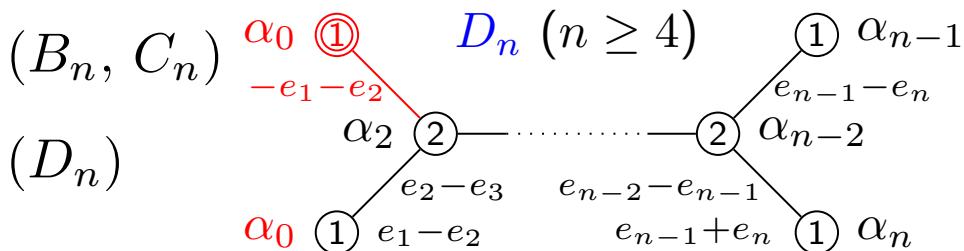


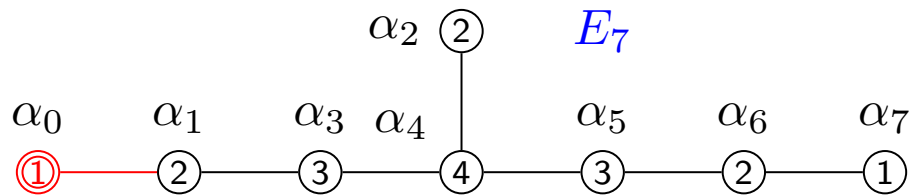
$$s_j : x_j \leftrightarrow x_{j+1}$$

$$s_n : \begin{cases} x_n \mapsto -x_n \\ (x_{n-1}, x_n) \mapsto (-x_{n-1}, -x_n) \end{cases} \quad (D_n)$$

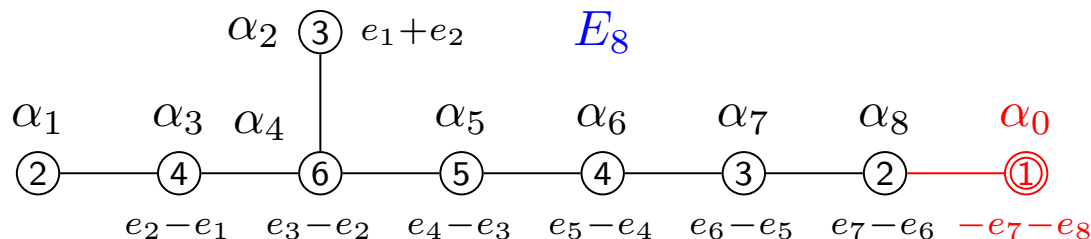
$$B_n, C_n : \#\Sigma = 2n^2, \quad \#W = 2^n n!$$

$$D_n : \#\Sigma = 2n(n-1), \quad \#W = 2^{n-1} n!$$





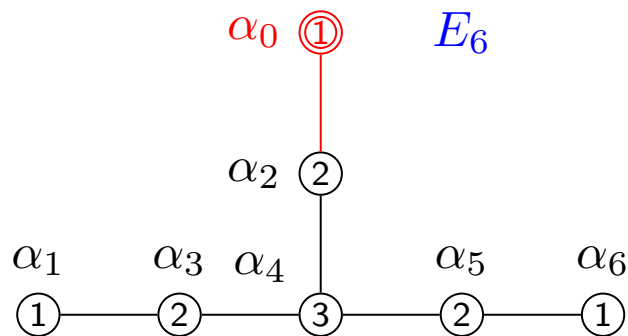
$$\#\Sigma = 126, \#W = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 72903040$$



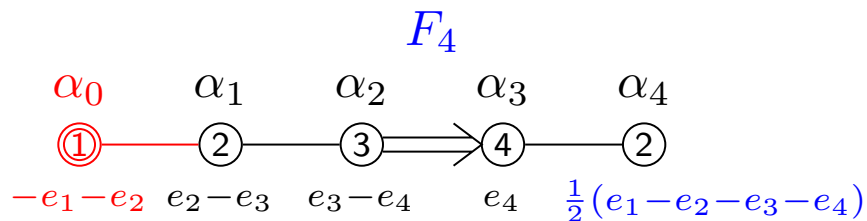
$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_8) - \frac{1}{2}(e_2 + e_3 + \cdots + e_7)$$

$$\Sigma = \{\pm(e_i - e_j), \pm(e_i + e_j), \pm e_1 \pm \cdots \pm e_8 \text{ (- は偶数個)} \mid 1 \leq i < j \leq 8\}$$

$$\#\Sigma = 240, \#W = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 = 696729600$$

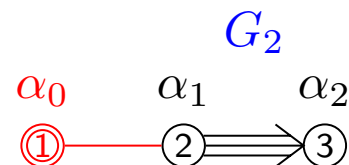


$$\#\Sigma = 72, \#W = 51840$$



$$\Sigma = \{\pm e_i \pm e_j, \pm e_k, \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \mid 1 \leq i < j \leq 4, 1 \leq k \leq 4\}$$

$$\#\Sigma = 48, \#W = 2^7 \cdot 3^2 = 1152 \quad \text{正 24 胞体群}$$



有限鏡映群

ルート系に対応する Weyl 群以外は

$$\bigcirc \overset{p}{\text{---}} \bigcirc \quad I_2(p) : p \text{ 面体群 (正 } p \text{ 角形)}, p = 5, 7, 8, \dots$$

$$\#G = 2p \quad s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^p = 1$$

$$\bigcirc \overset{5}{\text{---}} \bigcirc \text{---} \bigcirc \quad H_3 : \text{正 12 (20) 面体群} \quad \#G = 120$$

$$\bigcirc \overset{5}{\text{---}} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \quad H_4 : \text{正 120 (600) 胞群 (4 次元の正多胞体)} \quad \#G = 14400$$

$$W_{A_3} : \text{正四面体}$$

$$W_{B_3} = W_{C_3} : \text{立方体, 正八面体}$$

- $SO(n) \supset G$ は有限群で G -不変多項式全体が多項式環と同型 $\Leftrightarrow G$ は有限鏡映群

コクセター系, カッツ・ムーディー ルート系

$$\text{コクセター群} : \langle s_i \mid s_i^2 = 1, (s_i s_j)^{m_{i,j}} = 1 \rangle$$

$$\text{有限コクセター群} = (\text{有限}) \text{ 鏡映群}$$

$$\text{カッツ・ムーディー ルート系} : s_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha_j - m_{i,j} \alpha_i \quad (m_{i,j} : \text{整数})$$

$$(m_{i,j}) : \text{カルタン行列} \quad A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_2 = C_2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{---} \bigcirc \overset{\alpha_i - m_{i,j} \alpha_j}{\text{---}} \bigcirc \overset{\alpha_j}{\text{---}} \quad m_{i,j} = m_{j,i} : \text{対称}$$

単純リー環，単純リー群の分類

G : (連結) 複素単純リー群 $\subset M(N, \mathbb{C})$: 複素数成分の $N \times N$ 行列全体

$$g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1^{-1} g_2 \in G, {}^t g_1 \in G$$

単純：それ以上小さなリー群から組み立てられない

$$A_n : SL(n+1, \mathbb{C}) := \{g \in M(n+1, \mathbb{C}) \mid |g| = 1\}$$

$$B_n : SO(2n+1, \mathbb{C}) := \{g \in SL(2n+1, \mathbb{C}) \mid {}^t g g = I_{2n+1} : \text{単位行列}\}$$

$$C_n : Sp(2n, \mathbb{C}) := \{g \in SL(2n, \mathbb{C}) \mid {}^t g J_n g = J_n\}, \quad J_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_n : SO(2n, \mathbb{C}) := \{g \in SL(2n, \mathbb{C}) \mid {}^t g g = I_{2n}\}$$

有限群は，生成元と基本関係で決まる

(連結) リー群は，そのリー環（その生成元と関係式）から“決まる”

$\text{Lie}(G) := \{X \in M(N, \mathbb{C}) \mid e^{tX} \in G \ (|t| < 1)\}$: 線形空間

$$e^X = I_n + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{tX} e^{tY} e^{-tX} e^{-tY} = (I_n + tX + \frac{t^2}{2} X^2 + \cdots) \cdots (I_n - tY + \frac{t^2}{2} Y^2 + \cdots)$$

$$= I_n + \frac{t^2}{2} (XY - YX) + o(t^2)$$

$[X, Y] := XY - YX$ (Lie 環の構造：Lie 群の非可換性を表す)

$G = SL(n+1, \mathbb{C})$ とすると, $\text{Lie}(G) = \{X \in M(n+1, \mathbb{C}) \mid \text{trace } X = 0\}$

$E_{i,j} : (i,j)\text{-成分のみ } 1 \text{ で他の成分が } 0 \text{ の行列} \in M(n+1, \mathbb{C})$

$D(e_1, \dots, e_{n+1}) := e_1 E_{11} + e_2 E_{22} + \dots + e_{n+1} E_{n+1, n+1} : \text{対角行列}$

$\mathfrak{a} := \{D(e_1, \dots, e_{n+1}) \mid e_1 + \dots + e_{n+1} = 0\} \in \text{Lie}(G) \quad (\text{極大可換})$

$[D(e_1, \dots, e_{n+1}), E_{i,j}] = (e_i - e_j)E_{i,j}, \quad \{e_i - e_j\} : A_n \text{ 型ルート系}$

$D(e_1, \dots, e_{n+1})E_{i,j} = e_i E_{i,j}, \quad E_{i,j}D(e_1, \dots, e_{n+1}) = e_j E_{i,j}$

ディンキン図形はリー群の構造を与える (骨格)

ディンキン図形の同型: リー群 (環) の同型で内部同型で表せないものを表す

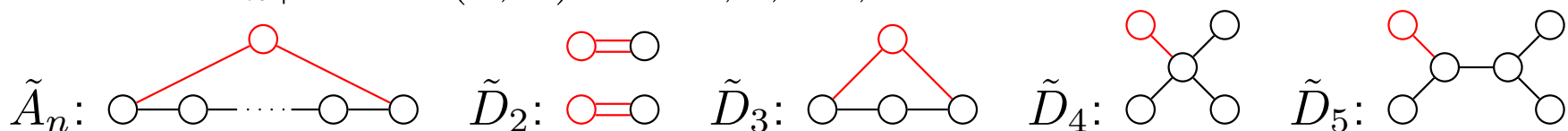
($n > 2$ のとき 1 つある ($g \mapsto {}^t g^{-1}, n = 2 \Rightarrow {}^t g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1}$))

拡張ディンキン図形の同型: 大域的リー群の種類 (= 最小なものの基本群)

$Spin(m, \mathbb{C}) : \text{単連結} \quad B_n, D_n \quad SO(n, \mathbb{C}) \simeq Spin(n, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$

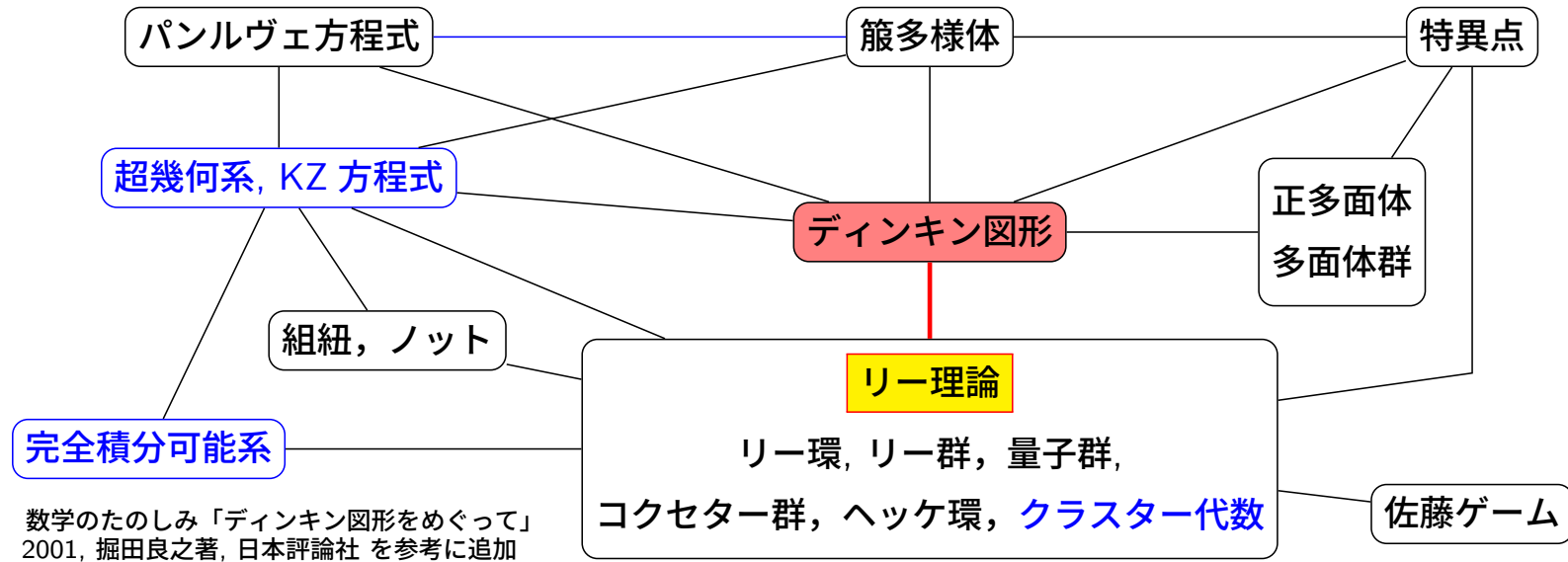
$PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\} \simeq SO(3, \mathbb{C}), \quad SU(2)/\{\pm 1\} \simeq SO(3)$

$e^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n+1}} I_{n+1} \in SL(n, \mathbb{C}), \quad k = 0, 1, \dots, n$



$SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \simeq Spin(4, \mathbb{C}) \quad SL(4, \mathbb{C}) \simeq Spin(6, \mathbb{C})$

ディンキン図形，ルート系との関わり



実単純リー群：佐武図形（ディンキン図形＋位数 2 の同型）

完全積分可能量子系： $P_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - V(x)$ が完全積分可能

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P_i P_j = P_j P_i$ となる独立な線型微分作用素 P_i が存在 ($1 \leq i < j \leq n$)

$P_i u = \lambda_i u$ ($i = 1, \dots, n$) という同時固有値問題が意味を持つ

$\Rightarrow$ 直交多項式，球関数展開，調和解析，表現論，など

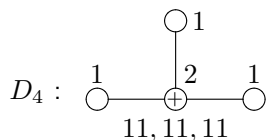
$V(x) = C \sum_{\alpha \in \Sigma} u((\alpha, x))$ で， $u(t) = \frac{1}{t^2}$, $\frac{1}{\sin^2 t}$, $\wp(t)$ などは OK

$V(x)$ に $x_1 = 0$ に特異性 $\Rightarrow$ 特異部分は $\frac{C}{(e_1, x)^2}$ の形で，鏡映 s_{e_1} で不変

$x_1 = c_j$ にも特異性 $\Rightarrow$ 周期性：三角関数，楕円関数 $\frac{1}{\sin^2 t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(t - n\pi)^2}$

微分方程式（超幾何系，パnulヴェ方程式）

Gauss の超幾何微分方程式 $\Rightarrow$ リジッド：実ルート $(\alpha, \alpha) = 2$



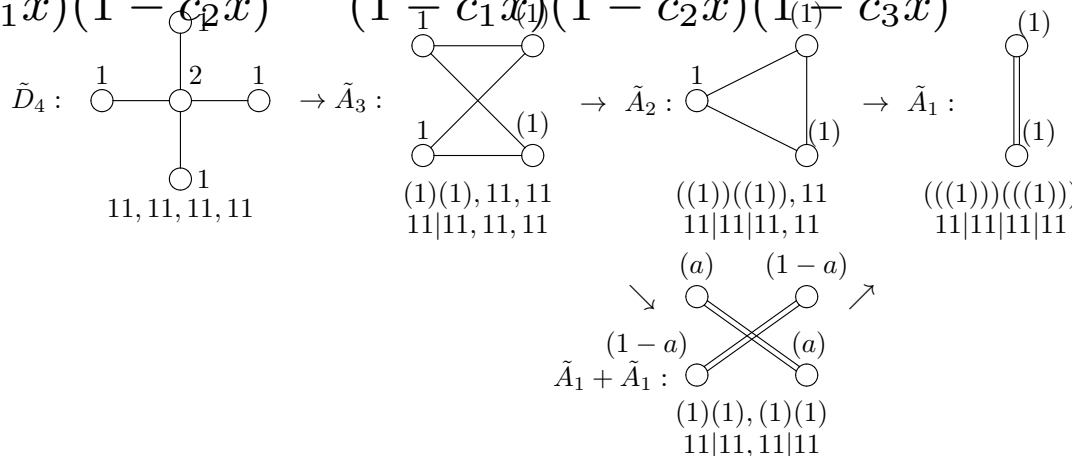
$$x(1-x)u'' - (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)u' + \alpha\beta u = 0$$

Versal Huen $\Rightarrow$ アフィンルート： $(\alpha, \alpha) = 0$

2 個のアクセサリー・パラメータ $\Rightarrow$ モノドロミー保存変形 $\Rightarrow$ パnulヴェ方程式

$$\frac{d\vec{u}}{dx} = \frac{A_1 u}{1 - c_1 x} + \frac{A_2 x \vec{u}}{(1 - c_1 x)(1 - c_2 x)} + \frac{A_3 x^2 \vec{u}}{(1 - c_1 x)(1 - c_2 x)(1 - c_3 x)} \quad (A_i \in M(2, \mathbb{C}))$$

合流 $\rightarrow$



{ パnulヴェ方程式の解 } $\simeq$ (岡本) 初期値空間：代数曲面 (分類)

対称性	$\tilde{E}_8$	$\tilde{E}_7$	$\tilde{E}_6$	$\tilde{D}_4$	$\tilde{A}_3$	$2\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_2$	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_0$	$\tilde{A}_0$
初期値空間	$\tilde{A}_0$	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_2$	$\tilde{D}_4$	$\tilde{D}_5$	$\tilde{D}_6$	$\tilde{E}_6$	$\tilde{D}_7$	$\tilde{E}_7$	$\tilde{D}_8$	$\tilde{E}_8$

ご清聴ありがとうございました