# 超関数 – 関数概念の拡張
# 現代数学への誘い

大島利雄（城西大学）

NHK 文化センター町田教室

2020 年 9 月 19 日

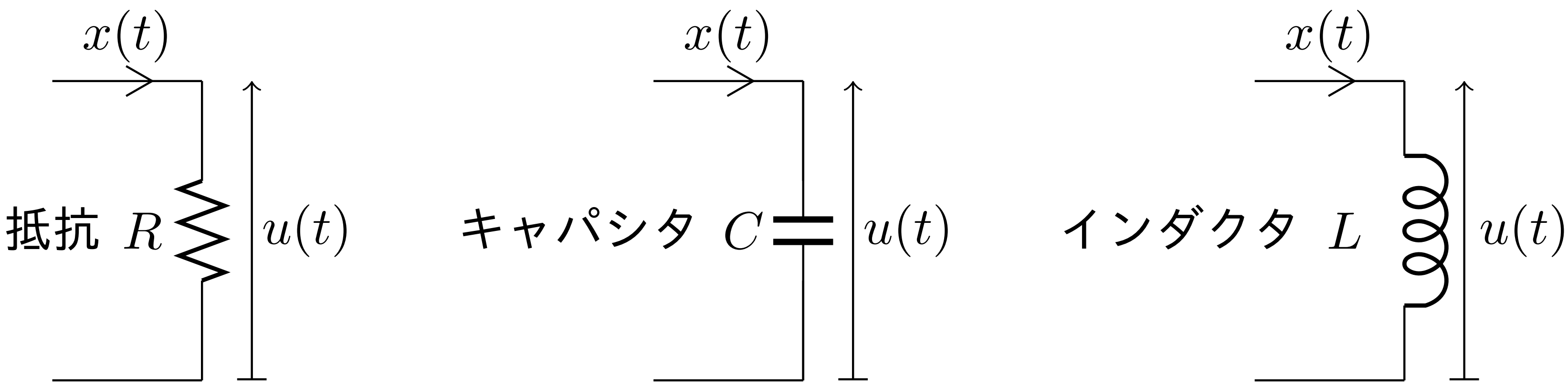
電気回路（RLC 回路）

シュワルツ超関数（双対空間）

ミクシンスキー演算子法（商体）

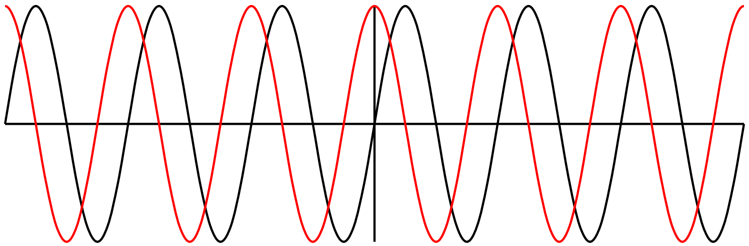
佐藤超函数（商空間，コホモロジー）

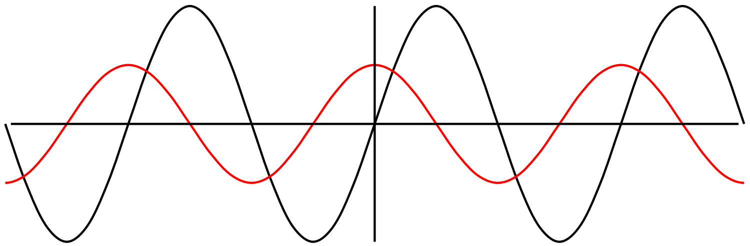
# $R$, $C$, $L$（抵抗，コンデンサ，コイル）を流れる電流 $x(t)$ と電圧 $u(t)$

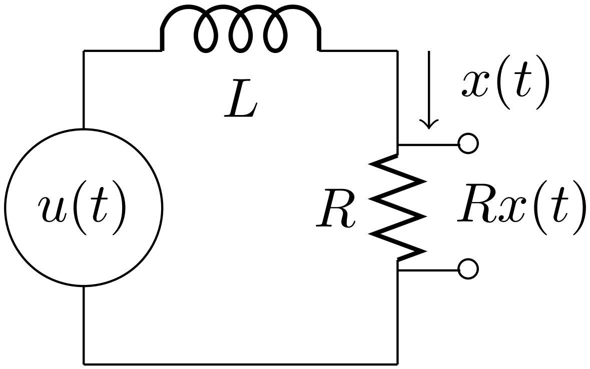



| 素子 | 電流 | 電圧 ($u(t)$) | 電流 | 電圧 | 電流 | 電圧 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R$ | $x(t)$ | $Rx(t)$ | $\sin\omega t$ | $R\sin\omega t$ | $e^{i\omega t}$ | $Re^{i\omega t}$ |
| $C$ | $x(t)$ | $\frac{1}{C}\int x(t)dt$ | $\sin\omega t$ | $-\frac{1}{C\omega}\cos\omega t$ | $e^{i\omega t}$ | $\frac{1}{C\omega i}e^{i\omega t}$ |
| $L$ | $x(t)$ | $Lx'(t)$ | $\sin\omega t$ | $L\omega\cos\omega t$ | $e^{i\omega t}$ | $L\omega i e^{i\omega t}$ |

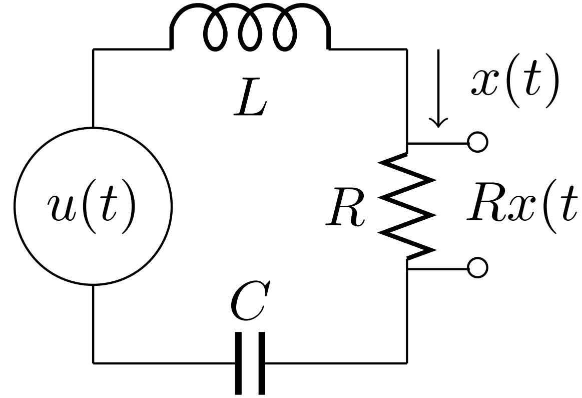
$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t \qquad \text{(Euler の公式)}$$





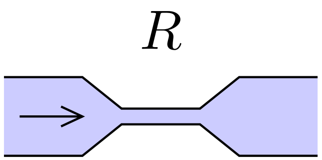


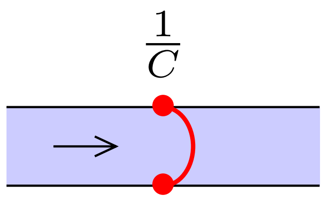

電圧：$u(t) \mapsto x(t)$ ?

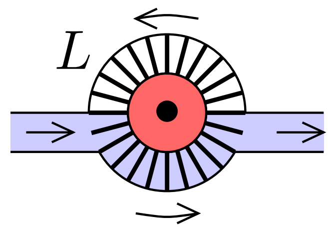


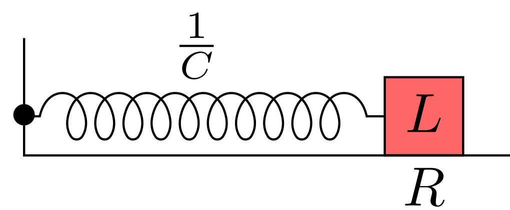

$$Lx'(t) + Rx(t) + \frac{1}{C}\int x(t)\,dt = u(t)$$

$$Lx''(t) + Rx'(t) + \frac{1}{C}x(t) = u'(t)$$



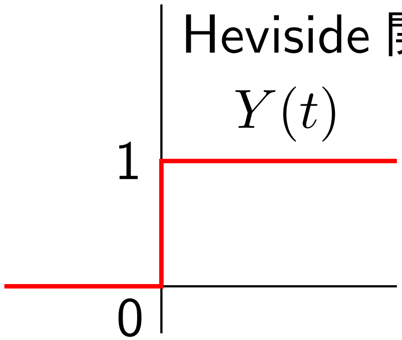




アナログ計算機は，このような原理で動き，$u(t)$ を与えて $x(t)$ が観測できる

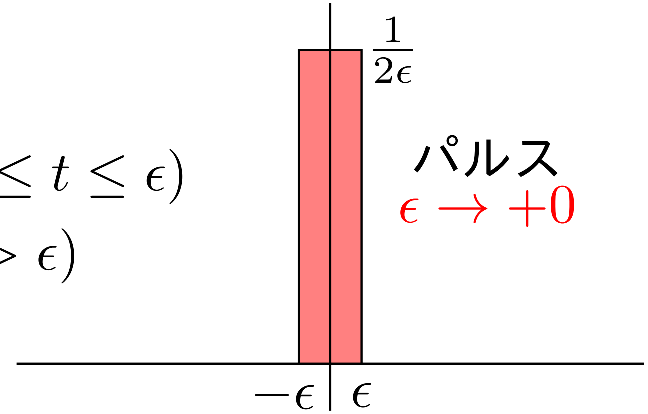
上の $L$, $R$ の直列回路では（$u(-\infty) = 0$ とする）　　↓ Heviside 関数

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} u(s)\frac{e^{-\frac{R}{L}(t-s)}}{L}ds = u * \left(\frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{L}Y(t)\right), \quad Y(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot g(t-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) \cdot g(s)ds \qquad \text{（合成積）}$$



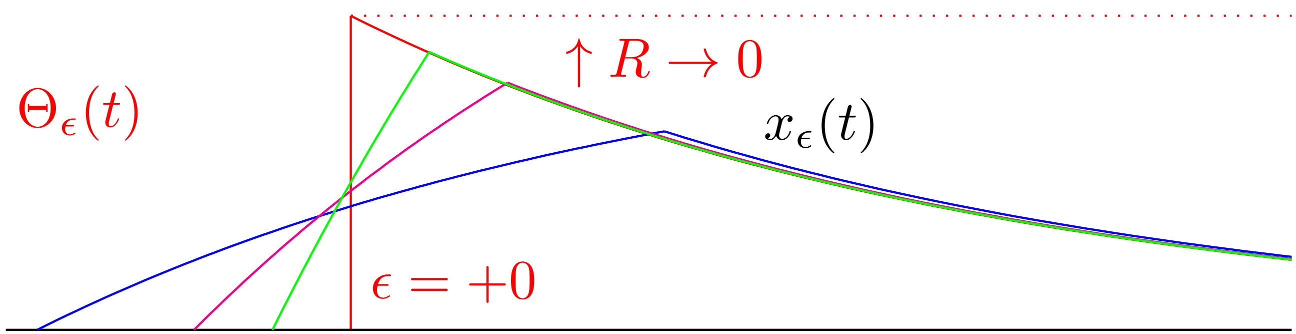

$$\Theta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & (-\epsilon \le t \le \epsilon) \\ 0 & (|t| > \epsilon) \end{cases}$$




$u(t) = \Theta_\epsilon(t)$, $x(-\infty) = 0$ の解を $x_\epsilon(t)$ とおくと $(e^{\frac{R}{L}\epsilon} \sim 1 + \frac{R}{L}\epsilon)$

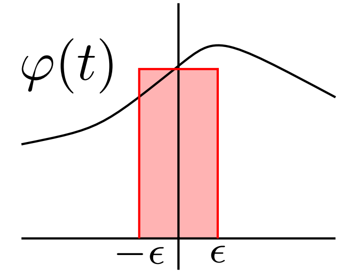
$$x_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & (t < -\epsilon) \\ \frac{1}{2\epsilon R}(e^{\frac{R}{L}t} - e^{-\frac{R}{L}\epsilon})e^{-\frac{R}{L}t} & (|t| \le \epsilon) \\ \frac{1}{2\epsilon R}(e^{\frac{R}{L}\epsilon} - e^{-\frac{R}{L}\epsilon})e^{-\frac{R}{L}t} & (t > \epsilon) \end{cases} \xrightarrow{\epsilon \to +0} x_{+0}(t) = \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{L} Y(t)$$

$$L x'_\epsilon(t) + R x_\epsilon(t) = \Theta_\epsilon(t)$$




$\delta(t) := \Theta_{+0}(t)$ : Dirac's（ディラックの）デルタ関数　$(\Rightarrow \ L x'_{+0} + R x_{+0} = \delta)$

$$\int \Theta_\epsilon(t)\varphi(t)dt = \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\varphi(t)dt \xrightarrow{\epsilon\to+0} \varphi(0)$$




$\delta(t)=\Theta_{+0}(t)$ という '関数' があると考えてみる ($\int \delta(t)\varphi(t)=\varphi(0)$)．すると

$$(\delta*\varphi)(t) = \int \delta(s)\varphi(t-s)\,ds = \int \varphi(s)\delta(t-s)\,ds = \varphi(t)$$

| |
|---|
| デルタ関数 $\delta(t-c)$ $\quad(c\in(-\infty,\infty))$ は関数の要素（質点）<br>一般の関数は，それのスカラー倍を集めたもの |

$\mathcal{T} := L\frac{d}{dt}+R$ とおく（微分作用素）．すなわち $(\mathcal{T}\varphi)(t)=L\varphi'(t)+R\varphi(t)$

$$(\mathcal{T}\Psi)(t)=\delta(t) \quad (\mathcal{T}\text{ の基本解}),\ \Psi(t) := \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{L}Y(t)$$

$$\big(\mathcal{T}(\Psi*u)\big)(t) = \mathcal{T}_t\int \Psi(t-s)\cdot u(s)ds = \int (\mathcal{T}_t\Psi(t-s))\cdot u(s)ds$$

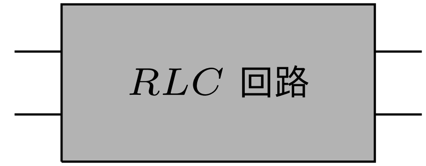
$$= \int \delta(t-s)u(s)ds = (\delta*u)(t) = u(t)$$

なお，キルヒホッフの法則を使うことにより一般の $RLC$ 回路が解ける

## 電流 $x(t)$ を制御し，その結果の電位差 $u(t)$ が出力と考えてみる (逆も可)

$\mathcal{T} : x(t) \to u(t) = (\mathcal{T}x)(t)$

入力 $x(t)$



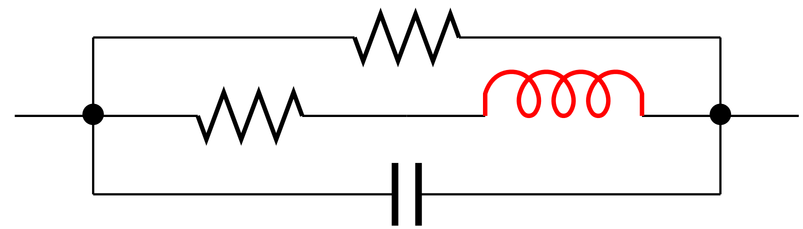

出力 $u(t)$

$\mathcal{T}\delta$ : パルス応答 $\Rightarrow \mathcal{T}u = (\mathcal{T}\delta) * u$ （一般の入力の結果がわかる）

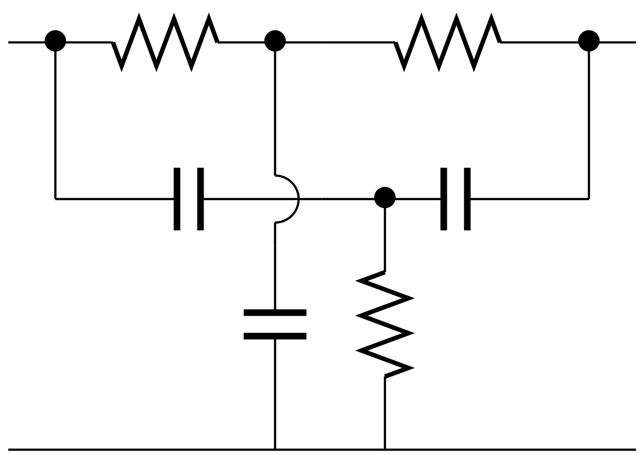
$\mathcal{T}\Psi = \delta$ : 基本解 $\Rightarrow \mathcal{T}(\Psi * u) = u$ （求める出力のための入力が得られる）

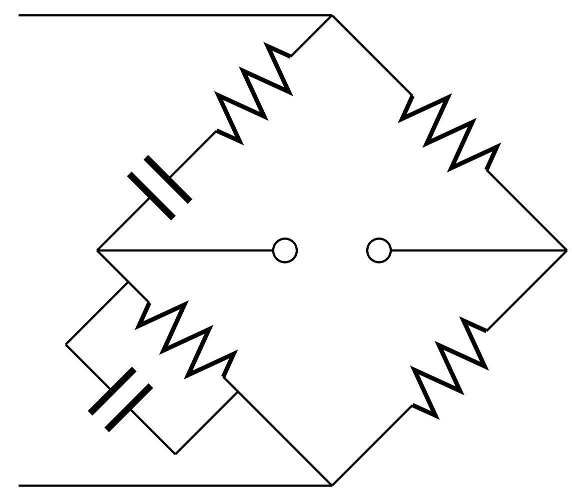
注意. $\mathcal{T}$ が時間に依るときは $\delta(t)$ を $\delta(t-s)$ とする. $\mathcal{T}$ の線形性を用いている

実際のコイルのモデル（純粋でない）:

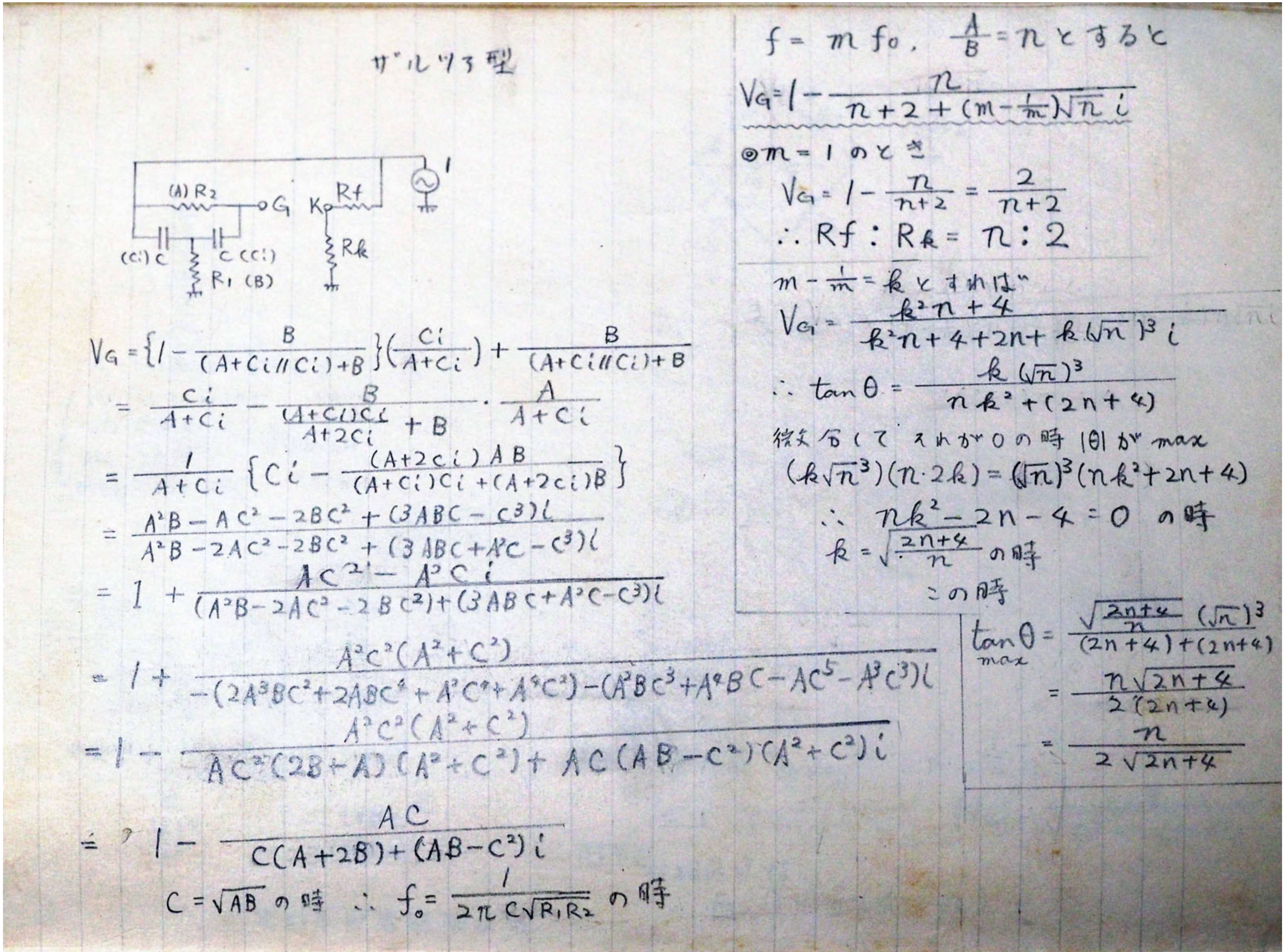


回路例:





高校 2 年のときのノート（1964 年）



ザルツァ型



$$V_G = \left\{1 - \frac{B}{(A+Ci /\!/ Ci)+B}\right\}\left(\frac{Ci}{A+Ci}\right) + \frac{B}{(A+Ci /\!/ Ci)+B}$$

$$= \frac{Ci}{A+Ci} - \frac{B}{\frac{(A+Ci)Ci}{A+2Ci} + B} \cdot \frac{A}{A+Ci}$$

$$= \frac{1}{A+Ci}\left\{Ci - \frac{(A+2Ci)AB}{(A+Ci)Ci + (A+2Ci)B}\right\}$$

$$= \frac{A^2B - AC^2 - 2BC^2 + (3ABC - C^3)i}{A^2B - 2AC^2 - 2BC^2 + (3ABC + A^2C - C^3)i}$$

$$= 1 + \frac{AC^2 - A^2Ci}{(A^2B - 2AC^2 - 2BC^2) + (3ABC + A^2C - C^3)i}$$

$$= 1 + \frac{A^2C^2(A^2+C^2)}{-(2A^3BC^2 + 2ABC^4 + A^2C^4 + A^4C^2) - (A^3BC^3 + A^4BC - AC^5 - A^3C^3)i}$$

$$= 1 - \frac{A^2C^2(A^2+C^2)}{AC^2(2B+A)(A^2+C^2) + AC(AB - C^2)(A^2+C^2)i}$$

$$= 1 - \frac{AC}{C(A+2B) + (AB - C^2)i}$$

$C = \sqrt{AB}$ の時 $\therefore f_0 = \frac{1}{2\pi C\sqrt{R_1R_2}}$ の時

$f = mf_0$, $\frac{A}{B} = n$ とすると

$$V_G = 1 - \frac{n}{n+2+(m - \frac{1}{m})\sqrt{n}\, i}$$

◎ $m = 1$ のとき

$$V_G = 1 - \frac{n}{n+2} = \frac{2}{n+2}$$

$\therefore R_f : R_k = n : 2$

$m - \frac{1}{m} = k$ とすれば

$$V_G = \frac{k^2n + 4}{k^2n + 4 + 2n + k(\sqrt{n})^3 i}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{k(\sqrt{n})^3}{nk^2 + (2n+4)}$$

微分して それが 0 の時 $|\theta|$ が max

$$(k\sqrt{n}^3)(n \cdot 2k) = (\sqrt{n})^3(nk^2 + 2n + 4)$$

$\therefore nk^2 - 2n - 4 = 0$ の時

$k = \sqrt{\frac{2n+4}{n}}$ の時

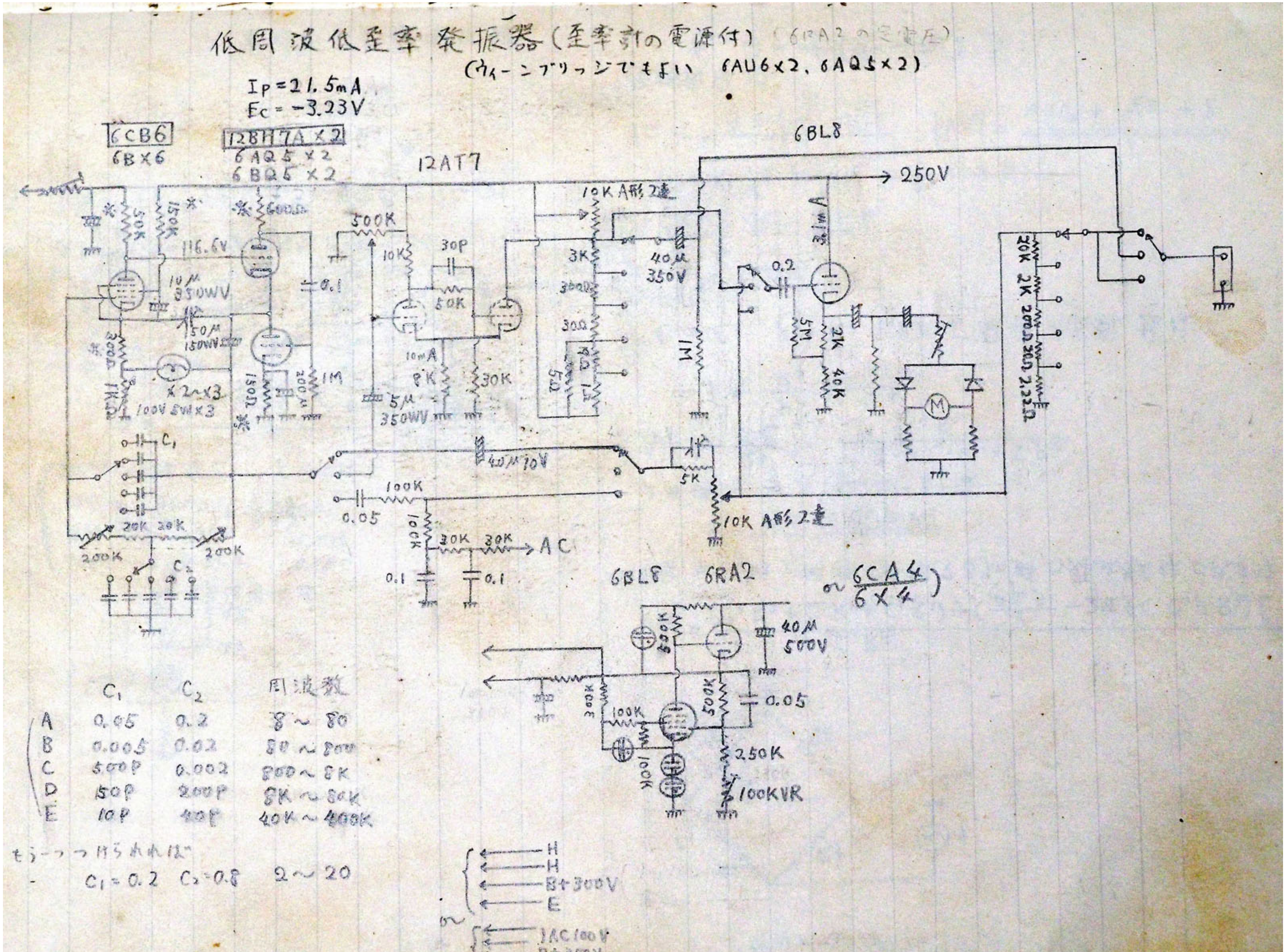
この時

$$\tan\theta_{max} = \frac{\sqrt{\frac{2n+4}{n}}(\sqrt{n})^3}{(2n+4)+(2n+4)}$$

$$= \frac{n\sqrt{2n+4}}{2(2n+4)}$$

$$= \frac{n}{2\sqrt{2n+4}}$$

# 高校 2 年のときのノート（1964 年）



# シュワルツ（Laurent-Schwartz 1915-2002, フランス）超関数（distribution）

$\mathcal{D}$：何回でも微分可能で台が有界な関数（コンパクト台の関数という）の空間

（$\varphi \in \mathcal{D}$ は十分大きな $R$ に対して，$|x| > R \Rightarrow \varphi(x) = 0$）

$$\psi(x) := \frac{Y(x)}{e^{\frac{1}{x}}} \;\Rightarrow\; \tilde{\psi}(x) := \psi(1-x)\psi(1+x) \in \mathcal{D} \quad (\tilde{\psi} \text{ の台は } [-1,1])$$

$\mathcal{D}'$：（シュワルツ）超関数の空間とは $\mathcal{D}$ 上の連続線形汎関数の空間

$\mathcal{D}$ の元 $\phi(t)$ のことを試験関数（テスト関数）という

| | |
|---|---|
| $T : \mathcal{D} \ni \phi \mapsto T(\phi) \in \mathbb{C}$ | (汎関数：関数を変数とする関数) |
| $T(\phi_1 + \phi_2) = T(\phi_1) + T(\phi_2)$ | (線形性 1) |
| $T(c\phi) = cT(\phi) \quad (c \in \mathbb{C})$ | (線形性 2) |
| $\phi_j \xrightarrow{j\to\infty} 0 \in \mathcal{D} \;\Rightarrow\; T(\phi_j) \to 0$ | (連続性) |

（通常の）関数は数に対して数を対応させる（$x^2$ ： $2 \mapsto 4$）が，汎関数とは関数に対して数を対応させる写像（例：積分 $\phi \mapsto \int \phi\, dt$）をいう

$$T_f(\phi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx \quad (f \text{ ： 連続関数}) \;\Rightarrow\; T_f \in \mathcal{D}'$$

- 連続関数や可積分関数 $f$ は $T_f$ を考えることにより，超関数とみなせる
- $T(\phi)$ を $\langle T,\phi\rangle$ と書く．よって $\langle T_f,\phi\rangle = \int f(x)\phi(x)\,dx$
- 変数が $x$ のとき，$T\in\mathcal{D}'$ を普通の関数のように $T(x)$ と表記

$$\langle a(x)T(x),\phi(x)\rangle = \langle T(x), a(x)\phi(x)\rangle \quad (a(x)\text{：滑らかな関数})$$
$$\langle T(x+b),\phi(x)\rangle = \langle T(x),\phi(x-b)\rangle$$
$$\langle T(cx),\phi(x)\rangle = \frac{1}{|c|}\langle T(x),\phi(\tfrac{x}{c})\rangle \quad (c\neq 0)$$

$T(x)=T_f \;\Rightarrow\; \langle T(x+b),\phi\rangle = \int f(x+b)\phi(x)dx = \int f(y)\phi(y-b)dy$ など

- 超関数は (何回でも) 微分できる　$\boxed{\langle T',\phi\rangle = -\langle T,\phi'\rangle}$

$$\langle T_{f'},\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)\,dx = \Big[f(x)\phi(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\,dx = -\langle T_f,\phi'\rangle$$

- ディラックの $\delta$ 関数：　$\langle\delta,\phi\rangle := \phi(0)$
- Heviside 関数 $Y$ とその微分：　$\langle Y,\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} Y(x)\phi(x)\,dx = \int_0^{\infty}\phi(x)\,dx$

$$Y' = \delta \;:\; \langle Y',\phi\rangle = -\langle Y,\phi'\rangle = -\int_0^{\infty}\phi'(x)dx = -\Big[\phi(x)\Big]_0^{\infty} = \phi(0)$$

## 関数を超関数まで拡張することにより，より自由な解析が可能になる

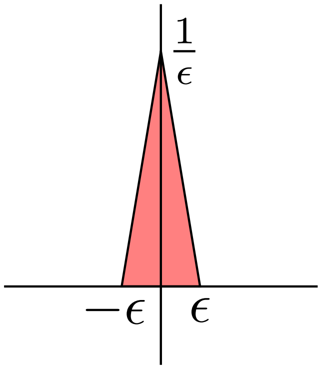
- 連続でない関数でも微分できる（$Y' = \delta$）
- RLC 回路での $\delta$ 関数を使っての議論が正当化される
- 計算例：

$$\langle x\delta(x), \phi(x)\rangle = \langle \delta(x), x\phi(x)\rangle = 0, \quad x\delta(x) = 0,$$
$$\langle \delta', \phi\rangle = -\langle \delta, \phi'\rangle = -\phi'(0)$$
$$\langle \delta^{(n)}, \phi\rangle = (-1)^n \langle \delta, \phi^{(n)}\rangle = (-1)^n \phi^{(n)}(0)$$
$$(\Phi(x)Y(x))' = \Phi'(x)Y(x) + \Phi(0)\delta$$

$$\langle (\Phi(x)Y(x))', \phi\rangle = -\langle \Phi(x)Y(x), \phi'(x)\rangle = -\int_0^x \Phi(x)\phi'(x)dx$$
$$= -[\Phi(x)\phi(x)]_{x=0}^{x=\infty} + \int \Phi'(x)Y(x)\phi(x)\,dx = \langle \Phi(0)\delta + \Phi'(x)Y(x), \phi\rangle$$

- $xT(x) = 0$ を満たす $T \in \mathcal{D}'$ は $\delta(x)$ のスカラー倍のみ（易しい）
- $\langle x\delta', \phi\rangle = \langle \delta', x\phi\rangle = -\langle \delta, (x\phi)'\rangle = -\langle \delta, \phi + x\phi'\rangle = -\phi(0)$ あるいは $0 = (x\delta)' = \delta + x\delta'$ より　$x\delta' = -\delta$
- 超関数 $T \in \mathcal{D}'$ は，連続関数を何回か微分したものの和で表せる（定理）

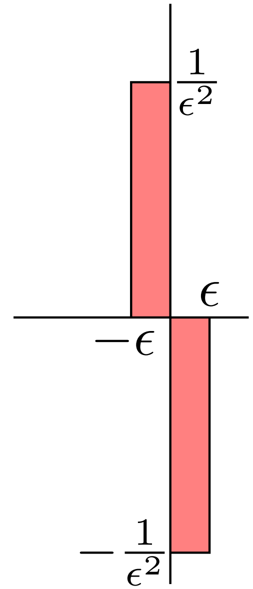
- 超関数 $T_\epsilon \quad (\epsilon \to +0)$ の収束は $\langle T_\epsilon, \phi \rangle \quad (\forall \phi \in \mathcal{D})$ の $\epsilon \to +0$ 収束と考える




パルス，質点

$$F_\epsilon(x) \xrightarrow{\epsilon \to +0} \delta(x)$$

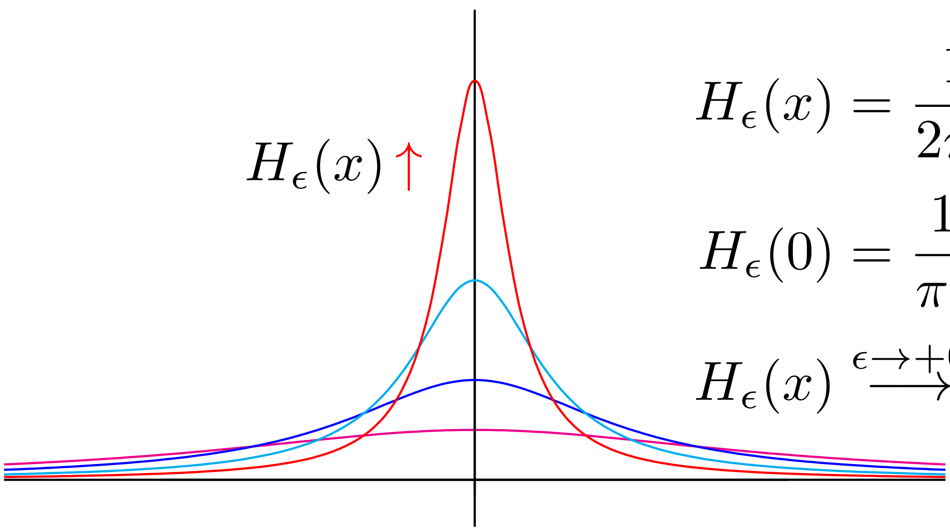
$$\overset{\text{微分}}{\Longrightarrow}$$




双極子 (dipole)

$$G_\epsilon(x) \xrightarrow{\epsilon \to +0} \delta'(x)$$

$$\int G_\epsilon(x)\phi(x)\,dx \xrightarrow{\epsilon \to +0} -\phi'(0)$$




$$H_\epsilon(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2},$$

$$H_\epsilon(0) = \frac{1}{\pi\epsilon}, \qquad \int H_\epsilon(x)\,dx = 1$$

$$H_\epsilon(x) \xrightarrow{\epsilon \to +0} \delta(x).$$

- 連続関数 $\Theta_\epsilon(x)$ が，$\Theta_\epsilon(x) \geq 0$ を満たし，$R > 0$ に対して，$\epsilon \to +0$ のとき $\int_{|x|>R} \Theta_\epsilon(x)\,dx \to 0$, $\int_{|x|<R} \Theta_\epsilon(x)\,dx \to 1$ となるなら，$\Theta_\epsilon \to \delta \in \mathcal{D}'$

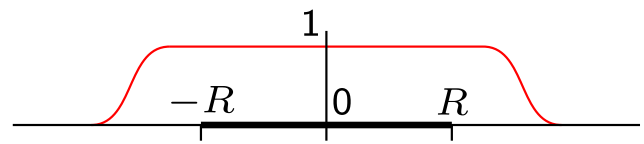
- $T \in \mathcal{D}'$ が $x = x_0$ の近くで 0 とは，$\epsilon > 0$ が十分小さいならば

$$\phi \in \mathcal{D},\ \phi(x) = 0 \quad (|x - x_0| > \epsilon) \ \Rightarrow\ \langle T, \phi \rangle = 0$$

$\operatorname{supp} T$ : $T \in \mathcal{D}'$ の台（上のような $x_0$ を除いた集合）

$\operatorname{supp} T \subset [-R, R]$ のとき，台がコンパクトとは限らないテスト関数 $\phi$ に対して $\Phi(x) = 1 \ \ (|x| \le R)$ を満たす $\Phi \in \mathcal{D}$ を用いて

$$\langle T, \phi \rangle := \langle T, \Phi\phi \rangle$$




とおく（値は $\Phi$ の取り方によらない）．コンパクト台の超関数の全体は $\mathcal{E}'$ と書かれ，$\mathcal{E}$（滑らかな関数の空間）の元をテスト関数として値が定まる

- $T \in \mathcal{E}'$ に対しては，積分やフーリエ変換や合成積などが定義される

$$\int_{-\infty}^{\infty} T\,dx = \langle T, 1 \rangle,$$

$$\mathcal{F}(T)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle T, e^{-i\xi x} \rangle \quad \text{(Fourier 変換)}$$

- 超関数の Fourier 変換などの解析にはテスト関数の空間として急減少関数の空間 $\mathcal{S}$ が用いられる（ $\Rightarrow$ $\mathcal{S}'$ : 緩増加超関数の空間）

# ミクシンスキー（Mikusiński：ポーランドの数学者:1913–1987）の演算子法

$\mathcal{C}_+$：$[0,\infty)$ 上の連続関数の空間とする（$(-\infty,0)$ では 0 と定める）.

$\mathcal{C}_+ \ni \phi$，$\phi_1$，$\phi_2$ に対して，和とスカラー倍は通常どおり

$$(\phi_1+\phi_2)(t) := \phi_1(t)+\phi_2(t),$$
$$(c\phi)(t) = c\phi(t) \quad (c\in\mathbb{C})$$

一方，積は通常の積でなくて合成積（convolution）とする.

$$(\phi_1 * \phi_2)(t) := \int \phi_1(s)\phi_2(t-s)\,dt = \int_0^t \phi_1(s)\phi_2(t-s)\,dt$$

$$\phi_1 * \phi_2 = \phi_2 * \phi_1$$

$\mathbf{1}(t)=1 \quad (t\geq 0)$ という $\mathcal{C}_+$ の元がある（Heviside 関数 $Y(t)$）．このとき

$$\phi(t) * \mathbf{1} = \int \phi(s)\cdot \mathbf{1}(t-s)ds = \int_0^t \phi(s)ds$$

となるので，$\mathbf{1}$ は積分作用素と言われる（$\mathbf{1}$：Heviside 関数）.

**Titchmarsh の定理**. $\phi_1 * \phi_2 = 0 \ \Rightarrow \ \phi_1 = 0$ または $\phi_2 = 0$

整数から分数が得られるように，零因子を持たない可換環 $\mathcal{C}_+$ から商体 $\overline{\mathcal{C}}_+$ が構成できる（偶数の全体も可換環）：

$$\overline{\mathcal{C}}_+ \ni \frac{\phi}{\psi} \quad (\phi,\, \psi \in \mathcal{C}_+,\ \psi \neq 0),$$

$$\frac{\phi_1}{\psi_1} = \frac{\phi_2}{\psi_2} \overset{\text{def}}{\iff} \phi_1 * \psi_2 = \phi_2 * \psi_1 \qquad (\tfrac{8}{12} = \tfrac{12}{18} : 8 \cdot 18 = 12 \cdot 12),$$

$$\frac{\phi_1}{\psi_1} * \frac{\phi_2}{\psi_2} = \frac{\phi_1 * \phi_2}{\psi_1 * \psi_2}, \qquad \frac{\phi_1}{\psi_1} * \phi_2 = \frac{\phi_1 * \phi_2}{\psi_1}$$

$\delta := \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = \dfrac{\psi}{\psi} = \dfrac{\delta}{\delta}$ : 合成積の単位元（1 と書くこともある，$\delta * \phi = \phi$）

$D := \dfrac{1}{\mathbf{1}} = \dfrac{\delta}{\mathbf{1}}$ : 微分作用素: 積分作用素 $\mathbf{1}$ の逆作用素 ($\delta'$ とも書く)

$$D * \mathbf{1} = \frac{\delta}{\mathbf{1}} * \mathbf{1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = \delta \qquad (Y' = \delta \in \mathcal{D}' \text{にあたる})$$

$$D * \phi = \phi(0)\delta + \phi' \qquad (\phi \in \mathcal{C}_+),$$

$$\because \ \mathbf{1} * (\phi(0)\delta + \phi') = \phi(0)\mathbf{1} + \int_0^t \phi'(s)ds = \phi(t)$$

$$D^2 * \phi = D * D * \phi = D * (\phi(0)\delta + \phi') = \phi(0)\delta' + \phi'(0)\delta + \phi'',$$

$$\frac{\delta}{D - \alpha\delta} = e^{\alpha t}, \quad \Big(\Leftarrow \ (D - \alpha\delta) * e^{\alpha t} = \delta\Big),$$

$$\frac{\delta}{(D - \alpha\delta) * (D - \beta\delta)} = e^{\alpha t} * e^{\beta t} = \int_0^t e^{\alpha s} e^{\beta(t-s)} ds$$

$$= \begin{cases} \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta} & (\alpha \neq \beta) \\ t e^{\alpha t} & (\alpha = \beta), \end{cases}$$

$$(D^2 - (\alpha + \beta)D + \alpha\beta\delta) * u = u(0)D + (u'(0) - (\alpha + \beta))\delta$$
$$+ (u'' - (\alpha + \beta)u' + \alpha\beta u)$$

2 階線形常微分方程式

$$\begin{cases} u'' - (\alpha + \beta)u' + \alpha\beta u = f, \\ u(0) = C_0, \ u'(0) = C_1 \quad \text{(初期条件)} \end{cases}$$

の解 $u \in \mathcal{C}+$ は：

$$u(t) = \Big(C_0 D + (C_1 - (\alpha + \beta))\delta + f\Big) * e^{\alpha t} * e^{\beta t}$$

一般の高階線形常微分方程式も同様の方法で解ける（演算子法）

## 佐藤超函数（佐藤幹夫：1928〜 hyperfunction)

$$F_f(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}\,dt \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$$

実軸以外で正則な $z = x + iy$ の正則函数となる.

$\mathcal{O}(U)$：$U$ 上の正則函数の空間

$\mathbb{C}$ $\quad F_+(z)$

$\downarrow F_+(x+i0)$

$\uparrow F_-(x-i0)$ $\quad$ 実軸 $\mathbb{R}$

$F_-(z)$

$$\begin{aligned}
F_f(x+i\epsilon) - F_f(x-i\epsilon) &= \frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{1}{t-x-i\epsilon} - \frac{1}{t-x+i\epsilon}\right) f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x-i\epsilon} - \frac{1}{x+i\epsilon}\right) * f(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\int\frac{\epsilon}{(x-t)^2+\epsilon^2} f(x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\frac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2} f(x+t)\,dt \\
&\to f(x) \quad (\epsilon \to +0).
\end{aligned}$$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ 上の hyperfunctions の空間)：$H^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}) = \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})/\mathcal{O}(\mathbb{C})$

$F(z) = \big(F_+(z), F_-(z)\big) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ の定める超函数を

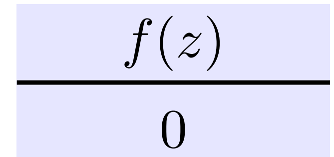
$[F(z)]$ または $F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$ と書く（$F(z)$ を定義函数という）

$[F(z)] = [G(z)]$ とは $F(z) - G(z)$ が $\mathbb{C}$ 上の正則函数（整函数）に拡張できること

- 超函数の定義と微積分 $\Leftarrow$ 複素函数論（正則函数の複素微分と複素積分）

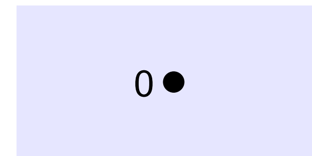
  多変数の佐藤超函数 $\Leftarrow$ 多変数函数論 $\Leftarrow$ 岡潔

$$f(x) = [F(z)] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ \Rightarrow \ f'(x) = [F'(z)]$$



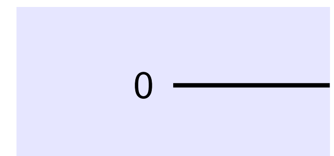

$$f(x) = [(f(z), 0)] = [(0, -f(z))] \qquad (f(x): \text{多項式など})$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x - i0} - \frac{1}{x + i0}\right) = \left[\frac{-1}{2\pi i z}\right]$$



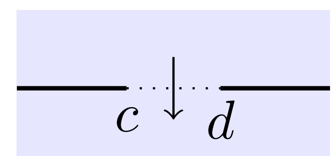

$$Y(x) = \left[-\frac{1}{2\pi i}\log(-z)\right] \qquad (\log(-z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus (0, \infty]))$$

$$\log w = \log|w| + i\mathrm{Arg}(w), \qquad (-\pi < \mathrm{Arg}(w) \le \pi)$$



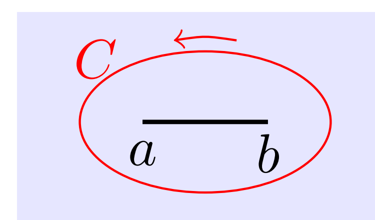

- $x \in (c, d)$ のとき $F_+(x + i0) = F_-(x - i0)$ となるなら，

$(c, d)$ を超えて $F_+(z)$ と $F_-(z)$ は正則函数としてつながる




$\color{red}{\mathcal{B}[a, b] := \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [a, b])/\mathcal{O}(\mathcal{C})}$: 台 $\subset [a, b]$ の $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の部分空間

$$f = [F(z)], \ F(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [a, b]) \ \Rightarrow \int f\, dx = -\int_{C} f(z) dz$$




- $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supsetneqq \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \supsetneqq \mathcal{C}(\mathbb{R})$

$$\left[e^{-\frac{1}{z}}\right] = \left[-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{z}\right)^n\right] = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\delta^{(n)} \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

# フーリエ変換

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-i\xi x}\varphi(x)dt \ \Rightarrow\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int (\mathcal{F}\varphi)(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

周期関数 $e^{i\xi t}$ $\quad (\xi \in (-\infty, \infty))$ は関数の要素（波動）
一般の関数は，それのスカラー倍を集めたもの

$$\int e^{i\xi x}d\xi = \lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{i(x-i\epsilon)\xi}d\xi + \int_{0}^{\infty} e^{i(x+i\epsilon)\xi}d\xi\right)$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0}\left(\left[\frac{e^{i(x-i\epsilon)\xi}}{i(x-i\epsilon)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{i(x+i\epsilon)\xi}}{i(x+i\epsilon)}\right]_{0}^{\infty}\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{x-i0} - \frac{1}{x+i0}\right)$$

$$= 2\pi\delta(x) \quad \left(x<0 \Rightarrow |e^{i(x-i\epsilon)x}| = |e^{ix+\epsilon x}| = e^{\epsilon x} = e^{-\epsilon|x|}\right),$$

$$\varphi(x) = \delta(x) * \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\iint e^{i(x-t)\xi}d\xi\cdot\varphi(t)\,dt$$

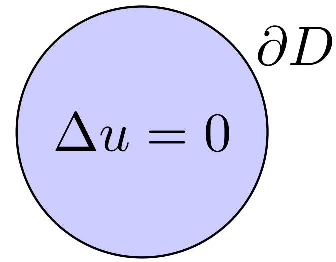
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-i\xi t}\varphi(t)dt\right)e^{i\xi x}d\xi$$

- フーリエ変換：粒子 $\Leftrightarrow$ 波動，　微分 $\Leftrightarrow$ 掛け算，　合成積 $\Leftrightarrow$ 積

$$\mathcal{F}(f') = i\xi\mathcal{F}(f), \quad \mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f\cdot\mathcal{F}g, \quad \mathcal{F}(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \text{（定数）}$$

- $D=\{x^2+y^2<1\}$ 内の調和関数の境界値問題（$\partial D=\{x^2+y^2=1\}$）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & = 0 \text{ in } D, \\ u|_{\partial D} & = f(\theta) \quad (\partial D \text{ への境界値}) \end{cases}$$




$$u(r\cos\theta, r\cos\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)f(\varphi)d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} \quad (\text{Poisson 積分表示})$$

$$\{D \text{ 内の調和関数 }\} \underset{\leftarrow\text{Poisson 変換}}{\overset{\text{境界値}\rightarrow}{\simeq}} \mathcal{B}(\partial D)$$ ：佐藤超函数の空間でのみ成立

- Helgason 予想（非コンパクト型対称空間の一般調和関数への拡張）の解決

mirolocal analysis（超局所解析）を用いた（“粒子” と “波動” を “同時” に考える）

- $x_+^\lambda := x^\lambda Y(x)$, $(x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1}$, $(x_+^0)' = \delta(x)$

これを切り返すと，超函数 $x_+^\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{-1,-2,\ldots\}$) が定義される

$$\int t_+^{\alpha-1}(1-t)_+^{\beta-1}dt=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (\text{ベータ関数})$$

$$\int t_+^{\alpha-1}(1-t)_+^{\beta-1}(1-xt)_+^{\gamma-1}dt=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot(\text{Gauss の超幾何関数})$$