KZ 型方程式とトーナメント戦

大島利雄

Abstract. フックス型常微分方程式のスペクトル型や Riemann scheme の概念を KZ 型方程式に拡張する．それは KZ 方程式の特異点を解消したときの局所構造を与えている．それが middle convolution による変換によってどう変わるかを具体的に与える．これによって KZ 型方程式の留数行列の固有値やその重複度の変換が得られる．トーナメント戦の組み合わせ論的解釈で結果が説明される．

1. 序

N 個の未知関数の列ベクトル u に対するフックス型常微分方程式

$$\mathcal{N}:\frac{du}{dx}=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{A_{0\nu}}{x-x_\nu}u$$

は，n 個の点 $x_1,\dots,x_{n-1},\infty\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ に特異点を持ち，特異点 x_ν の複素近傍での解の局所的性質は $x=x_\nu$ での留数行列 $A_{0\nu}\in M(N,\mathbb{C})$ の同型類，すなわち，固有値とその重複度によって特徴づけられる．なお，∞ における留数行列は $A_{0\infty}=-(A_{01}+\cdots+A_{0,n-1})$ となる．各特異点の留数行列の固有値と重複度を集めたデータを（一般化）Riemann scheme と呼ぶ．既約な方程式 $\mathcal{N}$ が各特異点での局所データ，すなわち Riemann scheme から決まるときリジッドと呼ばれ，そうでないとき $\mathcal{N}$ は Riemann scheme で決まらないアクセサリー・パラメーターを持つ．たとえば，8 階以下のリジッドなフックス型常微分方程式は 188 個あり，そのリストが [6, §13.2.3] にある．

フックス型方程式 $\mathcal{N}$ がリジッドならば，addition と middle convolution と呼ばれる 2 種類の可逆変換を繰り返すことによって自明な方程式 $u'=0$ に変換できることが Katz [4] によって示された．また，原岡 [2] は常微分方程式 $\mathcal{N}$ がリジッドならば，$\mathcal{N}$ は適当な行列 A_{ij} によって，$x_0=x$ に加えて特異点 $x_1,\dots,x_n$ も変数に加えた Knizhnik-Zamolodchikov 型 (KZ 型) 方程式

$$\mathcal{M}:\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{\substack{0\le\nu<n\\ \nu\ne i}}\frac{A_{i\nu}}{x_i-x_\nu}u\quad(i=0,\dots,n-1)$$

に拡張できることを示した．これは常微分方程式 $\mathcal{N}$ の middle convolution は $A_{0\nu}$ から具体的に得られることが Dettweiler-Reiter [1] によって [4] の結果に基づいて示されていたことの拡張である．これらの変換に KZ 型方程式の変数 $x_0,\dots,x_{n-1}$ の置換，あるいは，他の変数 x_i による middle convolution を合わせた変換は，KZ 型を保つがリジッドという条件を一般には保たない．実際，リジッドな変数を持つ KZ 型方程式が変換後もリジッドな変数を持つとは限らない．

多くの知られた，あるいは未知の多変数超幾何関数が，自明な方程式からこれらの変換によって得られる KZ 型方程式の解になっている (cf. [13, 5])．それらの方程式を調べるには middle convolution の解析が役立つ．Fuchs 型常微分方程式の場合の [6] の結果は，そのような解析から得られた．middle convolution は超局所変換なので，特異点を記述する留数行列の基本的性質，すなわち，固有値やその重複度に対する変換の具体的記述が期待される．常微分方程式の場合は [1] で得られているが，KZ 型の場合は，特異点が複雑なためより難しくなる．2 変数の超幾何関数に対応する場

合，すなわち $n=4$ の場合は [9, Remark 3] で得られた．この論文では n が一般の場合を考察する．

特異点 $x_i = x_j$ における $\mathcal{M}$ の局所解の形は，$\mathcal{M}$ の留数行列 A_{ij} の固有値とその重複度から分かる．一方，特異点 $\{x_0 = x_1, x_2 = x_3\}$ における局所解の形は組 (A_{01}, A_{23}) の共役類から分かる．$\mathcal{M}$ の可積分条件から行列 A_{01} と A_{23} は互いに可換となることから，2 つの行列の同時固有値とその重複度とが共役類を決めるデータとなる．また，特異点 $\{x_0 = x_1 = x_2\}$ においては，$A_{012} = A_{01} + A_{02} + A_{12}$ の固有値とその重複度もその特異点での局所解の性質を与える重要なデータとなる．より一般に，$I \subset L_n$ に対して，一般化留数行列 A_I を $\{i,j\} \subset L_n := \{0,1,\ldots,n{-}1\}$ を満たす A_{ij} の和と定義する（定義 3.1）．このような $\{A_I \mid I \subset L_n,\ |I| > 1\}$ の中から互いに可換な行列を集めた極大なもの $\mathcal{I}$ を極大可換留数行列族と定義し（定義 3.8），それに含まれる行列の同時固有値とその重複度のデータを極大可換留数行列族のすべてに対して集めたものを $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ とおき（定義 3.11），方程式のスペクトルと定義する．極大可換留数行列族は $(2n{-}3)!!$ 個あって，1 つの極大可留数行列族は $n{-}1$ 個の互いに可換な留数行列の組となっていて（系 3.9）．それは $\mathcal{M}$ の特異点を正規交差特異点まで特異点解消したときの正規交差する超曲面における留数行列族に対応している（cf. §4）．

KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ に対する addition や middle convolution が，$\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ の変換を誘導することを示し，それの具体的記述を与えることがこの論文の目的である（定理 5.1）．たとえば，KZ 型方程式にこれらの変換を何度か施して得られた KZ 型方程式の留数行列 A_{12} の固有値とその重複度を知るためには，一般には元の KZ 型方程式の $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ のデータが必要となる（注意 5.12）．

Appell の超幾何級数 F_1 の満たす微分方程式を特異点解消すると 15 個の正規交差特異点が現れる．最も簡単な KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ は F_1 の満たす階数 3 の方程式で $n=4$ となり，$\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ は可換留数行列の組の同時固有値分解 $(2n-3)!! = 15$ 個に対応するが，同時固有値はすべて重複度 1 で 15 個の正規交差点における局所解の特性指数に一致する（cf. [9]）．$\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ は Fuchs 型常微分方程式 $\mathcal{N}$ における Riemann scheme を KZ 型方程式へ拡張したものと言える（cf. 例 7.5）．

$n=3$ の KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ は，$0, 1, \infty$ の 3 点に特異点を持つ一般の Fuchs 型常微分方程式と自然に対応する（cf. §7.4）．一方，$n{-}2$ 変数の多くの超幾何関数が KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ の解になっている（[5], [9]）．$n=4$ の場合は，留数行列 A_I で $|I|=3$ となるものは無限遠点を導入すると $|I|=2$ のもので表せるという特殊事情があり（cf. 例 3.10 (i)），$\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ は正規交差点における留数行列 2 つの組の同時固有値分解に帰着されて記述が簡単になる．このことを用いて，[9] では middle convolution が誘導する $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ の変換を記述した．$n>4$ ではより複雑な $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ の構造についての考察が必要になるが，それには n チームのトーナメント戦に関する組み合わせ論的考察が役立つ．

§2 では，トーナメント戦に関わる場合の数などについて知られている事実を $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ への応用を念頭に置いて解説する．特に極大可換留数行列族に対応して，有限集合の極大可換部分集合族を導入する．§2 で解説されている "場合の数" の作る数列については数列のデータベース [14] を参照するとよい．

§3 では KZ 型方程式の完全積分可能条件をもとに $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ を導入する．

§4 では，特異点を解消する局所座標系を具体的に与え，極大可換留数行列族が特異点解消で現れる正規交差特異点での留数行列系になっていることを示す．

§5 では留数行列による middle convolution の定義をもとに $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ の変換を考察し，主結果の定理 5.1 を示す．定理の記述にはトーナメント戦の変換に対応する極大可換部分集合族の変換が用いられる．

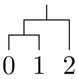
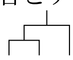
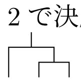
定理 5.1 は超幾何関数の解析への応用を目指しており，応用例については $n=4$ の場合の [9, §8], [13, §7], [5, §5] が参考となる．4 個以上の特異点を持つリジッドな Fuchs 型常微分方程式 $\mathcal{N}$ の解は，$\mathcal{N}$ を特異点も変数に拡張した KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ に拡張することにより，より深い解析が可能となる．たとえば Jordan-Pochhammer の超幾何函数の満たす常微分方程式は，拡張すると Appell の F_1 や Lauricella の F_D の

満たす方程式となる．また，普遍開折（cf. [11]）によって不確定特異点をもつ KZ 型方程式に対しても定理が応用ができることにも注意.

§6 では $n = 4$ の場合を例として定理 5.1 を具体的に説明する.

§7.2 では一次分数変換で無限遠点を有限点に移して，すべての特異点を有限点として同等に扱いやすくする定式化を述べる．§7.3 では変数以外の固定特異点を持つ KZ 型方程式を考察する．これは適当な制限をつけたトーナメント戦に対応することを示す．変数がただ 1 つのときは，[1] の結果に対応する．§7.4 では KZ 型方程式のアクセサリー・パラメーターや rigidity について，また Fuchs 型のホロノミック系の Sp $\mathcal{M}$ について考察する．§7.5 では [10] で扱った半局所モノドロミーに関わる留数行列の KZ 型方程式の場合への拡張を考察する.

2. トーナメント戦

n チームが参加するトーナメント戦について考察しよう．0, 1, 2 のラベルで区別された 3 チームのトーナメント戦は  のようなトーナメント図で表せる．この図は，チーム 0 とチーム 1 が最初に試合をし，その勝者とチーム 2 で決勝戦を行うトーナメント戦を表している．チームを区別しないと  と  の 2 つのトーナメント図が描ける．n チームのトーナメント戦の図は，根が 1 つで $n{-}1$ の節点と n 枚の葉を持つ 2 分木を平面上に描いた図ともみなせる．このようなトーナメント図の数はカタラン数 C_{n-1} に等しい．この場合，$n{-}1$ 試合が行われて各試合で勝者が決まり，その勝者はそれまで行われたいくつかのチームの（部分）トーナメント戦の最終勝者となる.

3 チームのトーナメント戦は最初の試合に参加するチームで定まるので，3 つの場合があり，それらは

$$\big\{\{0,1\},\{0,1,2\}\big\},\ \big\{\{1,2\},\{0,1,2\}\big\},\ \big\{\{0,2\},\{0,1,2\}\big\} \tag{2.1}$$

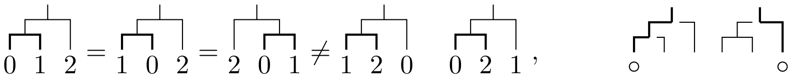
と表せる．トーナメント戦の各試合で，いくつかのチームの最終勝者が決まるが，それらのチーム（すなわちどのグループの勝者が決まるか）は全チームの部分集合となる．チームの部分集合をチームのラベルの集合で表すと，各トーナメント戦の全試合についてそれらを集めた集合でトーナメント戦を表すことが出来る．優勝決定戦は全チームに対応するので，それを省いた表記でも十分となる．それを短表記と呼ぶことにすると，短表記では 3 チームのトーナメント戦の 3 種類は

$$\big\{\{0,1\}\big\},\ \big\{\{1,2\}\big\},\ \big\{\{0,2\}\big\} \tag{2.2}$$

となる.

トーナメント戦に参加するチームを区別しない場合，すなわちチームの入れ替えで移り合うトーナメント戦を同一視したものをトーナメント戦の型と呼ぶことにする．n チームのトーナメント戦の型の数は n 番目の Wedderburn-Etherington 数と呼ばれる．トーナメント戦はチームの集合の $n{-}1$ 個の部分集合または $n{-}2$ 個の真部分集合で表せる.

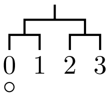
最終勝者のみを区別したトーナメント戦の型を優勝型と呼ぶことにする．3 チームのトーナメント戦は，型は 1 つで優勝型は 2 つある：



上の左側は 3 チームのトーナメント戦を表し，太線に対応する試合は，その試合で対戦する 2 チームが勝ち抜いてきた部分トーナメント戦が同型であることを示している．右側は優勝者を ◦ で表した優勝型を示す図となっている.

3 チームのトーナメント戦は，1 つの型と 2 つのパターン（図）と 2 つの優勝型（1 type, 2 patterns, 2 win types）がある．4 チームや 5 チームのトーナメント戦では短表記を用いると以下のようになる.

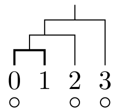
4 チーム



: 1 pattern

: $\frac{4!}{2^3} = 3$ cases

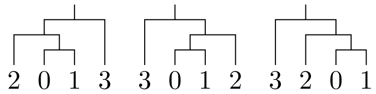
$\{\{0,1\},\{2,3\}\}$



: 4 patterns

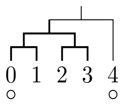
: $\frac{4!}{2} = 12$ cases

$\{\{0,1,2\},\{0,1\}\}$



2 types, 5 (=1+4) patterns, 15 (=3+12) tournaments, 4 (=1+3) win types

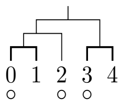
5 チーム



: 2 patterns

: $\frac{5!}{2^3} = 15$ cases

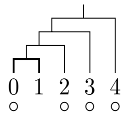
$\{\{0,1\},\{0,1,2,3\},\{2,3\}\}$



: 4 patterns

: $\frac{5!}{2^2} = 30$ cases

$\{\{0,1,2\},\{0,1\},\{3,4\}\}$



: 8 patterns

: $\frac{5!}{2} = 60$ cases

$\{\{0,1,2\},\{0,1\},\{0,1,2,3\}\}$

3 types, 14 patterns, 105 (=15+30+60) tournaments, 9 (=2+3+4) win types

より一般には，これらの場合の数は以下のようになる：

トーナメント戦に関わる場合の数

teams	2	3	4	5	6	7	8	9	n
patterns	1	2	5	14	42	132	429	1430	$T_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$
win types	1	2	4	9	20	46	106	248	W_n
types	1	1	2	3	6	11	23	46	U_n
tournaments	1	3	15	105	945	10395	135135	2027025	$K_n = (2n-3)!!$

n チームのトーナメント戦，その型，優勝型,（チームは区別しない）トーナメント図の数をそれぞれ K_n, U_n, W_n, T_n とすると，以下の漸化式が成り立つ.

$$\text{(patterns)} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n-1} T_k \cdot T_{n-k}, \quad T_1 = 1,$$

$$\text{(win types)} \qquad W_n = \sum_{k=1}^{n-1} W_k \cdot U_{n-k}, \quad W_1 = 1,$$

$$\text{(types)} \qquad U_n = \frac{1}{2}\Bigl(\sum_{k=1}^{n-1} U_k \cdot U_{n-k} \ \bigl(+U_{\frac{n}{2}} \text{ if } n \text{ is even}\bigr)\Bigr), \quad U_1 = 1,$$

$$\text{(tournaments)} \qquad K_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k \cdot K_k \cdot K_{n-k}, \quad K_1 = 1.$$

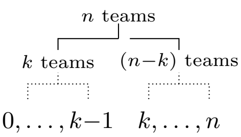
n チームのトーナメント戦を考えてみよう．決勝戦は，k チームの勝者と残りの $n-k$ チームの勝者が戦うとすると（$k = 1, \ldots, n-1$），k チームのトーナメント戦と $n-k$ チームのトーナメント戦の場合の数から n チームの場合の数への寄与は，2 つの部分トーナメント戦から分かるが，対称性を考慮すると，次のようになる．

$$T_n \leftarrow T_k \cdot T_{n-k} \qquad (1 \le k < n),$$

$$W_n \leftarrow W_k \cdot U_{n-k} \qquad (1 \le k < n),$$

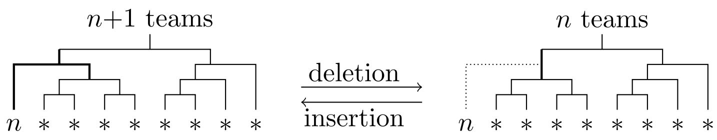
$$U_n \leftarrow \begin{cases} U_k \cdot U_{n-k} & (1 \le k < n-k), \\ \frac{1}{2}U_k(U_k - 1) + U_k & (k = n-k), \end{cases}$$

$$K_n \leftarrow \begin{cases} {}_nC_k \cdot K_k \cdot K_{n-k} & (1 \le k < n-k), \\ {}_nC_k\bigl(\frac{1}{2}K_k(K_k-1)\bigr) + \bigl(\frac{1}{2}{}_nC_k\bigr)K_k & (k = n-k), \end{cases}$$



T_n の場合は，k チームの代表を左側に描くことにすると漸化式が得られ，W_n の場合は優勝者が k チームの方の勝者とすればよい．U_n と K_n の場合は，対称性から $k \le n-k$ としてよいが，$k=n-k$ における対称性に注意すれば漸化式が分かる．

$0,1,\ldots,n$ のラベルがついた $n+1$ チームのあるトーナメント戦を考えよう．チーム n がそのトーナメントに参加しなくなると，そのチームの最初の試合を削除することによって次の図のように n チームのトーナメント戦が得られる．



逆に，$0,1,\ldots,n{-}1$ のラベルがついたチームのトーナメント戦にチーム n を加えるには，チーム n の最初の試合をトーナメント図の縦線の部分に挿入すればよい．それは，いずれかの試合の勝者，あるいは $0,\cdots,n{-}1$ のいずれかのチームとの最初の試合となるので，$(n{-}1)+n=2n-1$ 通りある．n チームのトーナメント図とその縦線の 1 つとの組と $n+1$ チームのトーナメント戦の図とは，この操作で全単射に対応する．このチーム n を削る操作と加える操作をそれぞれ deletion，insertion と呼ぶことにする．この考察から

$$K_{n+1} = (2n-1)K_n \tag{2.3}$$

を得る．さらに以下のような関係が成り立つことが漸化式から分かる．

$$K_n = (2n-3)!! = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k \cdot (2k-1)!! \cdot (2n-2k-1)!!,$$

$$T_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} = \sum_{k=1}^{n-k} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!}\frac{(2(n-k)-2)!}{(n-k-1)!(n-k)!},$$

$$1 = \Bigl(1-\sum_{k=1}^{\infty} U_n x^k\Bigr)\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} W_{k+1}x^k\Bigr).$$

注意 2.1. (i) あるチームの deletion で削除される試合が，相手チームにとっても最初の試合であるとき，basic deletion と呼ぶことにする．同様に新たなチームの insertion で加わる試合が相手チームにとっても最初の試合となる場合を，basic insertion と呼ぶ．

両者は互いに逆操作となっており，どのトーナメント戦にも basic deletion が 1 つ以上可能なことから，どのトーナメント戦も，2 チームのトーナメント戦に適当な basic insertion を何度か施すことによって得られることが分かる．また，この構成で加わっていくチームを別のトーナメント戦から順に deletion と basic insertion で組み立てていくことができるので（組み立て途中では，insertion されたゲーム以外を無視），2 つのトーナメント戦は deletion と basic insertion を繰り返して行うことで移り合うことが分かる．

(ii) n チームのトーナメント戦を $n{+}1$ チームのトーナメント戦に埋め込むには，n チームのトーナメント戦の勝者と加えるチームとで最後決定戦をすればよい．このような埋め込みを top insertion と呼ぶことにする．参加 $n{+}1$ チームにチャンピオンがいて，それ以外のチームでトーナメント戦を行ってチャンピオンへの挑戦チームを選び，チャンピオン戦で新チャンピオンを決める，というトーナメント戦である．

2 チームの試合から top insertion を続けていくと，参加チームにあらかじめ順位が決まっていて，最下位のチームから順に勝ち抜き戦を行っていく，というようなトーナメント戦になる．これを行って，各チームに新しい順位をつける，というようなトーナメント戦である．

(iii) 注意 5.12 の直前の 4 つの図式は，deletion と insertion の組によってトーナメント戦が変換される例を示している．最後の 2 例は basic insertion と top insertion に対応する．

L を $|L|>1$ となる有限集合とする（$|L|$ は L の元の個数を表す）．

定義 2.2. $\mathcal{I}=\{I_\nu \mid \nu=1,\dots r\}$ が L の**可換部分集合族**とは $|I_\nu|>1$, $I_\nu \subset L$ $(\nu=1,\dots,r)$ であって，I_ν が互いに可換，すなわち

$$I_\nu \cap I_{\nu'}=\emptyset \text{ or } I_\nu \subsetneqq I_{\nu'} \text{ or } I_\nu \supsetneqq I_{\nu'} \quad \text{for} \quad 1\le \nu<\nu'\le r. \tag{2.4}$$

となることとする．さらに $\mathcal{I}$ を真に含む L の可換部分集合族が存在しないとき，$\mathcal{I}$ を L の**極大可換部分集合族**という．

$\mathcal{I}$ を L $(|L|>2)$ の極大可換部分集合族とする．$\mathcal{I}$ の元 I_0 で $|I_0|=|L|-1$ となるものがあるとき，$\mathcal{I}\setminus\{L\}$ は I_0 の極大可換部分集合族となる．そのような I_0 が存在しないときは，$\mathcal{I}$ には $I_1\cap I_2=\emptyset$ および以下の条件を満たす元 I_1, I_2 が存在することが，極大性から容易に分かる．

$$\mathcal{I}\setminus\{L\}=\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2,\ \mathcal{I}_i:=\{I\in\mathcal{I}\mid I\subset I_i\}\quad (i=1,\,2).$$

このとき $\mathcal{I}_i$ は I_i の極大可換部分集合族となる．よって次の結果が成り立つ．

定理 2.1. 有限集合 L の極大可換部分集合族の全体は，L でラベルづけられたチームのトーナメント戦の全体と *bijective* に対応する．

実際，L の極大可換部分集合族は，L でラベルづけられたチームのトーナメント戦を試合に対応するチームの部分集合で表す表記と対応している．特に以下に注意

$$|\mathcal{I}|=|L|-1. \tag{2.5}$$

定義 2.3. L の極大可換部分集合族 $\mathcal{I}$ に対し

$$\widetilde{\mathcal{I}}:=\mathcal{I}\cup\bigcup_{\nu\in L}\{\{\nu\}\} \tag{2.6}$$

とおき，さらに

$$b(I)=\{\bar b(I),\bar b'(I)\}\qquad (I\in\mathcal{I},\ \bar b(I),\,\bar b'(I)\in\widetilde{\mathcal{I}}) \tag{2.7}$$

を，$I=\bar b(I)\sqcup \bar b'(I)$, すなわち

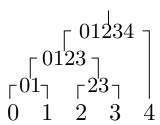
$$\bar b(I)\cap\bar b'(I)=\emptyset,\ \ \bar b(I)\cup\bar b'(I)=I$$

となるように定義する．$\bar b(I)$ は試合 I の対戦で負けた側に対応すると考える．さらに $i\in L$ に対して i を優勝チームと考えて $i\notin\bar b(I)$ という条件を満たしている $\bar b$ を b^i とおく（一意とは限らない）．

たとえば $L=\{0,1,2,3,4\}$ で

$$\mathcal{I}=\bigl\{\{0,1\},\{0,1,2,3\},\{2,3\},\{0,1,2,3,4\}\bigr\}$$

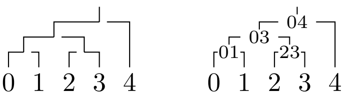
さらに



$$\begin{aligned}
b(\{0,1,2,3\})&=\bigl\{\{2,3\},\{0,1\}\bigr\}, & b^0(\{0,1,2,3\})&=\{2,3\},\\
b(\{0,1,2,3,4\})&=\bigl\{\{4\},\{0,1,2,3\}\bigr\}, & b^0(\{0,1,2,3,4\})&=\{4\},\\
b(\{2,3\})&=\bigl\{\{2\},\{3\}\bigr\}, & b^0(\{2,3\})&=\{2\}.
\end{aligned}$$

負けた側を横線の切れで示すと次左図のようなトーナメント図になる．$\bar b$ を定めると，各試合での対戦チームが中央の図のように定まる．$I\in\mathcal{I}$ に対応する試合で対戦するチームを $I_{\bar b}$ と表すと以下のようになる．具体的には

$$I_{\bar b}:=I\setminus\bigcup_{I\supsetneqq J\in\mathcal{I}}\bar b(J), \tag{2.8}$$



$$\begin{cases} \{0,1\}_{\bar{b}} = \{0,1\}, \\ \{2,3\}_{\bar{b}} = \{2,3\}, \\ \{0,1,2,3\}_{\bar{b}} = \{0,3\}, \\ \{0,1,2,3,4\}_{\bar{b}} = \{0,4\}. \end{cases}$$

3. KZ 型方程式のスペクトル

正整数 N に対し $M(N,\mathbb{C})$ は N 次の複素正方行列の空間とする．ベクトル $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ に対し $A_{ij} = A_{ji} \in M(N,\mathbb{C})$ で定まる微分方程式系

$$\mathcal{M} : \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{\substack{0 \le \nu \le n-1 \\ \nu \ne i}} \frac{A_{i\nu}}{x_i - x_\nu} u \quad (i = 0, \dots, n-1) \tag{3.1}$$

を階数 N の KZ 型 (Knizhnik-Zamolodchikov type）方程式という．また行列 A_{ij} を $x_i = x_j$ における留数行列という．この方程式では，**完全積分可能条件**

$$[A_{ij}, A_{k\ell}] = 0 \qquad \bigl(\forall\{i,j,k,\ell\} \subset \{0,\dots,n-1\}\bigr), \tag{3.2}$$

$$[A_{ij}, A_{ik} + A_{jk}] = 0 \qquad \bigl(\forall\{i,j,k\} \subset \{0,\dots,n-1\}\bigr) \tag{3.3}$$

を常に仮定する．ただし，i,j,k,ℓ は互いに相異なる添え字とする．また A_{ij} は $A_{i,j}$ や $A_{\{i,j\}}$ などと書いてもよいことにする．なおこの論文では，以下の記号を用いる．

$$L_n := \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad \tilde{L}_n := L_n \cup \{\infty\}, \quad L_n^i := L_n \setminus \{i\}. \tag{3.4}$$

定義 3.1. 一般の留数行列を以下のように定義する，

$$\begin{aligned} A_{i\infty} &= -(A_{i0} + A_{i1} + \cdots + A_{i,n-1}) \quad (i \in L_n), \\ A_{ii} &= A_\emptyset = A_i = 0, \\ A_{i_1 i_2 \cdots i_k} &:= \sum_{1 \le p < q \le k} A_{i_p i_q} \quad \bigl(\{i_1, \dots, i_k\} \subset \tilde{L}_n\bigr). \end{aligned}$$

行列 $A_{i\infty}$ を $x_i = \infty$ における $\mathcal{M}$ の留数行列という．

上の定義と積分可能条件から，容易に次の補題が得られる．

補題 3.2 ([9, §2])**.** (i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_{i\infty} = -2A_{L_n}$,

(ii) I, J を $\tilde{L}_n$ の部分集合とするとき

$$A_I - A_{\tilde{L}_n \setminus I} = A_{L_n} \qquad \bigl(I \subset L_n\bigr), \tag{3.5}$$

$$[A_I, A_J] = 0 \qquad \bigl(I \cap J = \emptyset \text{ or } I \subset J \text{ or } I \supset J\bigr), \tag{3.6}$$

$$[A_{L_n}, A_I] = 0. \tag{3.7}$$

よって次のことが分かる．

系 3.3. *KZ* 型方程式 $\mathcal{M}$ が既約なら，すなわち A_{ij} （$0 \le i < j < n$）が共通の自明でない $\mathbb{C}^N$ の不変真部分空間をもたないなら

$$A_{L_n} = \kappa I_N \tag{3.8}$$

となる複素数 $\kappa \in \mathbb{C}$ が存在する．

定義 3.4. 変換 $u \mapsto (x_p - x_q)^\lambda u$ が引き起こす微分方程式 $\mathcal{M}$ の変換を $\mathrm{Ad}\bigl((x_p - x_q)^\lambda\bigr)$ と表す．変換 $\mathrm{Ad}\bigl((x_p - x_q)^\lambda\bigr)$ は，$\mathcal{M}$ の留数行列 A_{pq} を $A_{pq} + \lambda$ に変え，それ以外の A_{ij} $(0 \le i < j \le n)$ は変えない．また，積分可能条件は保たれる．

$\mathcal{M}$ が既約なら，$\mathrm{Ad}\bigl((x_p - x_q)^{-\tau}\bigr)$ を $\mathcal{M}$ に施すことによって $\mathcal{M}$ は $A_{L_n} = 0$ を満たす方程式に変わる．

定義 3.5. $A_{L_n} = 0$ のとき $\mathcal{M}$ が**斉次**であるという．このとき

$$
\begin{aligned}
A_I &= A_{L_n \setminus I} \quad (I \subset L_n),\\
A_{i\infty} &= A_{L_n \setminus \{i\}} \quad (i \in L_n).
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

注意 3.6. $\mathcal{I}$ を $\tilde{\mathcal{L}}_n$ の可換部分集合族とするとき

$$\{I \in \mathcal{I} \mid \infty \notin I\} \cup \{\tilde{L}_n \setminus I \mid \infty \in I \in \mathcal{I}\}$$

は $\mathcal{L}_n$ の可換集合族となる．

注意 3.7. KZ 型方程式の留数行列は座標変換 $x_0 \mapsto ax_0 + b$ で不変なので，$(x_1, x_2) = (0, 1)$ と特殊化しても一般性を失わない．この特殊化で変数の数は $n{-}2$ 個となる．Appell の F_1 や F_2 などは 2 変数の超幾何函数であるが，それらは $n = 4$ の KZ 型方程式の解として実現される（cf. [5]）．

定義 3.8. L_n の極大可換部分集合族 $\mathcal{I}$ によって $\bigl\{A_I \mid I \in \mathcal{I}\bigr\}$ と表せる互いに可換な留数行列の集合を $\mathcal{M}$ の**極大可換留数行列属**という．

前節の考察より

系 3.9. (i) $|\mathcal{I}| = |L| - 1$.

(ii) $\mathcal{M}$ は $(2n-3)!!$ 個の極大可換留数行列属をもつ．

例 3.10. 極大可換留数行列属は以下のようになる．ここでは，i, j, k, ℓ, m はすべて異なる添え字とし，極大可換留数行列属は A_{L_n} を必ず含むので，それを除いた集合で表した．

(i) $n = 4$ のとき

$$\{A_{ij}, A_{k\ell}\},\ \{A_{ij}, A_{ijk}\} \qquad \bigl(\{i,j,k,\ell\} = \{0,1,2,3\}\bigr).$$

$\mathcal{M}$ が斉次ならば $A_{0\infty} = A_{123}$ などとなるので，これら $W_4 = 15$ 個は

$$\{A_{ij}, A_{k\ell}\} \qquad \bigl(\{i,j,k,\ell\} \subset \{0,1,2,3,\infty\}\bigr)$$

に等しい（cf. [9]）．

(ii) $n = 5$ のときは $W_5 = 105$ 個あって（cf. [7, p.94]），それらは

$$\{A_{ij}, A_{k\ell}, A_{ijk\ell}\},\ \{A_{ij}, A_{ijk}, A_{\ell m}\},\ \{A_{ij}, A_{ijk}, A_{ijk\ell}\}$$
$$\bigl(\{i,j,k,\ell,m\} = \{0,1,2,3,4\}\bigr).$$

$\mathcal{M}$ が斉次ならば以下でも同じ．

$$\{A_{ij}, A_{k\ell}, A_{pq}\},\ \{A_{ij}, A_{ijk}, A_{pq}\} \qquad (\{i,j,k,\ell,p,q\} = \{0,1,2,3,4,5,\infty\}).$$

以下，[9] で導入した記号を用いる．行列 $A \in M(N, \mathbb{C})$ の（一般）固有値とその重複度を

$$[A] = \{[\lambda_1]_{m_1}, \ldots, [\lambda_r]_{m_r}\} \qquad (m_1 + \cdots + m_r = N)$$

と表す $\bigl(\prod_{i=1}^r (A - \lambda_i) = 0\bigr)$.

より正確には $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r$ として

$$\operatorname{rank} \prod_{\nu=1}^{k} (A - \lambda_\nu) = N - (m_1 + \cdots + m_k) \quad (k = 1, \ldots, r)$$

とする,（さらにそのような行列の極限も含める）とよいが，ここではそれは仮定しない．

2 つの行列 A, $B \in M(N, \mathbb{C})$ が可換なときは，同時固有値とその重複度が考えられ，それを次の例のように表す．すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

ならば

$$[A]=\{[0]_3,[-1]_1\}=\{[0]_3,-1\},\ [B]=\{[1]_1,[2]_2,[3]_1\}=\{1,[2]_2,3\}$$

となり，同時固有値とその重複度は

$$[A:B]=\big\{[0:1]_1,[0:2]_2,[-1:3]_1\big\}=\big\{[0:1],[0:1]_2,[-1:3]\big\}$$

と表される．

より一般に $[A_i,A_j]=0\ \ (i,j=1,..,k)$ のときは

$$[A_1:\cdots:A_k]=\big\{[\lambda_{1,1}:\cdots:\lambda_{k,1}]_{m_1},\cdots,[\lambda_{1,r}:\cdots:\lambda_{k,r}]_{m_r}\big\}$$

のように表わし，正整数 p に対し以下のように置く．

$$[B_1:\cdots:B_k]_p=\big\{[\lambda_{1,1}:\cdots:\lambda_{k,1}]_{pm_1},\cdots,[\lambda_{1,r}:\cdots:\lambda_{k,r}]_{pm_r}\big\}.$$

互いに可換な行列は，基底変換で同時に上三角行列にでき，それらの対角成分から同時固有値とその重複度が分かる．

定義 3.11. $\mathcal{L}_n$ を L_n の極大可換部分集合族の全体とする．$\mathcal{M}$ の**スペクトル**を

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}&:=\big\{[A_{I_1}:\cdots:A_{I_{n-1}}]\mid\mathcal{I}=\{I_1,\ldots,I_{n-1}\}\big\}_{\mathcal{I}\in\mathcal{L}_n},\\ \mathrm{Sp}'\,\mathcal{M}&:=\big\{[A_{I_1}:\cdots:A_{I_{n-2}}]\mid\mathcal{I}=\{I_1,\ldots,I_{n-2},L_n\}\big\}_{\mathcal{I}\in\mathcal{L}_n}\end{aligned}$$

と定義する．通常 A_{L_n} はスカラー行列（斉次 KZ 型なら零行列）なので，$\mathrm{Sp}'\,\mathcal{M}$ で十分なことが多い．たとえば [5, §5] で使われた変換は斉次性を保つので $A_{L_n}=0$ として．

注意 3.12. $\{I_1,\ldots,I_k\}$ が L_n の可換部分集合族のとき，$[\sum_i c_iA_{I_i}]$ $(c_i\in\mathbb{C})$ は $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ から分かる．たとえば $A_{01}+\cdots+A_{0k}=A_{01\cdots k}-A_{1\cdots k}$ であるから，$[A_{01}+\cdots+A_{0k}]$ は $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ から得られる（cf. [10], §7.5）．

4. 特異点解消

KZ 型方程式 (3.1) をパッフ系で表すと

$$du=\Omega u,\quad \Omega=\sum_{0\le i<j<n}A_{ij}d\log(x_i-x_j) \tag{4.1}$$

$\mathcal{I}=\{I_1,\ldots,I_{n-2},I_{n-1}=L_n\}\in\mathcal{L}$ を $L_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$ の極大可換部分集合族とする．定義 2.3 と (2.8) を用いて

$$b(L_n)=\{J,J'\},\quad J=\{j_0,\ldots,j_k\},\quad J'=\{j'_0,\ldots,j'_{k'}\}, \tag{4.2}$$

$$I_{\bar b}=\{n_i,n'_i\},\quad n_i,\,n'_i\in L_n. \tag{4.3}$$

とおくと，$k+k'=n-2$, $k\ge 0$, $k'\ge 0$ で J と J' はトーナメント戦 $\mathcal{I}$ の準決勝戦に対応する．また n_i と n'_i は試合 I_i での対戦チームに対応するが，それはトーナメント戦の結果で決まる．また，$b(L_n)$ は KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ の特異点

$$x_{j_0}=\cdots=x_{j_k}\text{ and }x_{j'_0}=\cdots=x_{j'_{k'}} \tag{4.4}$$

に対応する．その近傍での局所座標系 $(x_{j_1},\ldots,x_{j_k},x_{j'_1},\ldots,x_{j'_{k'}})$ は，$x_{j_0}=0$ および $x_{j'_0}=1$ と置いて得られる．この特異点を解消するために以下の座標系を定義する．

定義 4.1. 以下で定まる局所座標系 $(X_1,\ldots,X_{n-2})$ を考えよう．

$$x_{n_i}-x_{n'_i}=\prod_{I_i\subset I_j\neq L_n}X_j. \tag{4.5}$$

注意 4.2. $n_i \in \bar{b}(I_i)$, $n'_i \in \bar{b}'(I_i)$ と仮定してよい．このとき, $0 < \epsilon \ll 1$ に対し

$$|x_{n_i} - x_\nu| \le \epsilon |x_{n_i} - x_{n'_i}|,\ |x_{n'_i} - x_{\nu'}| \le \epsilon |x_{n_i} - x_{n'_i}| \qquad (\nu \in \bar{b}(I_i),\ \nu' \in \bar{b}'(I_i),\ i \in L_n) \tag{4.6}$$

が X の原点の近傍と対応している．条件 (4.2) を満たす $\mathcal{I} \in \mathcal{L}$ で決まる局所座標系を考えると，次の定理から (4.4) で定義される特異点が正規交差特異点に変換されることが分かる．

定理 4.1. $\Omega - \sum_{i=1}^{n-2} A_{I_i} d\log X_i$ は $(X_1, \dots, X_{n-2})$ の原点の近傍で特異点を持たない．

補題 4.3. $L = \{0, \dots, n-1\}$ を $\mathcal{I}$ の極大可換部分集合族とし,. $\bar{b}$ を定義 *2.3* にある写像とする．$I \in \mathcal{I}$ に対し

$$x_I := x_{n_I} - x_{n'_I} \quad \textit{with} \quad I_{\bar{b}} = \{n_I, n'_I\} \subset L \tag{4.7}$$

とおく．さらに $i, j \in L$ （$i \ne j$）に対して，, *we define* $I_{i,j}$ を i と j を共に含む $\mathcal{I}$ の元で極小なものとする．このとき X_I（$I \in \mathcal{I}$）は $\mathbb{C}$ 上一次独立で以下が成り立つ．

$$x_i - x_j = \sum_{I \in \mathcal{I}} \epsilon_I x_I \quad \textit{with} \quad \begin{cases} \epsilon_I = 0 & (I \supsetneqq I_{i,j}\ \textit{or}\ I \cap I_{i,j} = \emptyset), \\ \epsilon_I \in \{1, -1\} & (I = I_{i,j}), \\ \epsilon_I \in \mathbb{Z} & (I \subsetneqq I_{i,j}). \end{cases} \tag{4.8}$$

Proof. $(I_{i,j})_{\bar{b}} = \{i_0, j_0\}$ とおく．$|I_{i,j}| = 2$ のときは補題は自明なことに注意．まず (4.8) を $I_{i,j}$ の元の個数についての帰納法で示そう．必要なら i と j を入れ替えることによって，$i \in \bar{b}(I_{i,j})$，$j \in \bar{b}'(I_{i,j})$ と仮定してよい．同様に，$i_0 \in \bar{b}(I_{i,j})$，$j_0 \in \bar{b}'(I_{i,j})$ と仮定してよい．このとき，$i = i_0$ または $I_{i,i_0} \subsetneqq I_{i,j}$ が成り立つ．$j = j_0$ または $I_{j,j_0} \subsetneqq I_{i,j}$ も成り立つ．このとき $x_i - x_j = (x_{i_0} - x_{j_0}) + (x_i - x_{i_0}) - (x_j - x_{j_0})$ に注意すると，帰納法の仮定から (4.8) が分かる．また $\sum_{i,j \in L} \mathbb{C}(x_i - x_j)$ の次元は $n-1$ で，$|\mathcal{I}| = n-1$ であるから，x_I $(I \in \mathcal{I})$ は一次独立となることが分かる． □

注意 4.4. [13, 5] において局所座標 $(X, Y) = (\frac{y}{x}, y)$ を用い，(X, Y) を $(\infty, 0)$ の近傍とした．この座標変換は原点を特異点解消しているが，KZ 型方程式を保ち，$(\infty, 0)$ の正規交差特異点に移している．

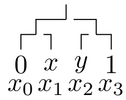
例

定理の記述を用いて $\Omega' := \sum_{i=1}^{n-2} A_{I_i} \frac{d(X_i)}{X_i}$ とおく．

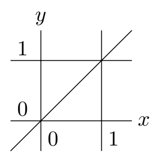
$\mathbf{n = 4}$

$$\Omega = A_{x0}\frac{dx}{x} + A_{y0}\frac{dy}{y} + A_{x1}\frac{d(x-1)}{x-1} + A_{y1}\frac{d(y-1)}{y-1} + A_{xy}\frac{d(x-y)}{x-y}.$$

$(x, y) = (0, 1)$:



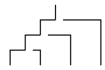
$$\begin{cases} x_1 - x_0 = x = X, \\ x_3 - x_2 = 1 - y = Y, \end{cases}$$



$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dX}{X}, \\ \frac{dy}{y} = \frac{dY}{Y}(X, Y) = (\frac{x}{y}, y), \end{cases}$$

$$\Omega' = A_{x0}\frac{dX}{X} + A_{y1}\frac{dY}{Y} \qquad (|x|,\ |y-1| \ll 1)$$

$(x,y)=(0,0):$



$0\ \ x\ \ y\ \ 1$
$x_0\,x_1\,x_2\,x_3$

$$\begin{cases} x_2-x_0=y=Y, \\ x_1-x_0=x=XY, \\ x_2-x_1=y-x=(1-X)Y, \end{cases}$$

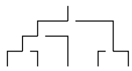
$$\begin{cases} X=\frac{x}{y}, \\ Y=y \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{x}=\frac{dX}{X}+\frac{dY}{Y}, \\ \frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{dY}{Y}+\frac{d(X-1)}{X-1}, \end{cases}$$

$$\Omega'=A_{x0}\frac{dX}{X}+A_{xy0}\frac{dY}{Y}, \qquad A_{xy0}:=A_{x0}+A_{y0}+A_{xy} \quad (|x|\ll|y|\ll 1).$$

$\mathbf{n=5}$

$$\Omega=A_{x0}\frac{dx}{x}+A_{y0}\frac{dy}{y}+A_{z0}\frac{dz}{z}+A_{x1}\frac{d(x-1)}{x-1}+A_{y1}\frac{d(y-1)}{y-1}+A_{z1}\frac{d(z-1)}{z-1}$$
$$+A_{xy}\frac{d(x-y)}{x-y}+A_{yz}\frac{d(y-z)}{y-z}+A_{xz}\frac{d(x-z)}{x-z}.$$

$(x,y,z)=(0,0,1):$



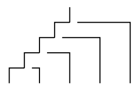
$0\ \ x\ \ y\ \ z\ \ 1$
$x_0\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4$

$$\begin{cases} x_2-x_0=y=Y, \\ x_1-x_0=x=XY, \\ x_3-x_4=z-1=Z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X=\frac{x}{y} \\ Y=y, \\ Z=z-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=(X-1)Y, \\ z=Z+1, \end{cases}$$

$$\Omega'=A_{x0}\frac{dX}{X}+A_{xy0}\frac{dY}{Y}+A_{z1}\frac{dZ}{Z} \qquad (|x|\ll|y|\ll 1,\ |z-1|\ll 1)$$

$(x,y,z)=(0,0,0):$



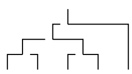
$0\ \ x\ \ y\ \ z\ \ 1$
$x_0\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4$

$$\begin{cases} x_3-x_0=z=Z, \\ x_2-x_0=y=YZ, \\ x_1-x_0=x=XYZ, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X=\frac{x}{y}, \\ Y=\frac{y}{z}, \\ Z=z, \end{cases} \qquad \begin{cases} y-z=(Y-1)Z, \\ x-y=(X-1)YZ, \\ x-z=(XY-1)Z, \end{cases}$$

$$\Omega'=A_{x0}\frac{dX}{X}+A_{xy0}\frac{dY}{Y}+A_{xyz0}\frac{dZ}{Z} \qquad (|x|\ll|y|\ll|z|\ll 1)$$

$(x,y,z)=(0,0,0):$



$0\ \ x\ \ y\ \ z\ \ 1$
$x_0\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4$

$$\begin{cases} x_3-x_0=z=Z, \\ x_1-x_0=x=XZ, \\ x_3-x_2=z-y=YZ, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X=\frac{x}{z}, \\ Y=\frac{z-y}{z}, \\ Z=z, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=(1-Y)Z, \\ x-y=(X+Y-1)Z, \\ x-z=(X-1)Z, \end{cases}$$

$$\Omega'=A_{x0}\frac{dX}{X}+A_{yz}\frac{dY}{Y}+A_{xyz0}\frac{dZ}{Z} \qquad (|x|,\ |y-z|\ll|z|\ll 1).$$

5. KZ 型方程式の MIDDLE CONVOLUTION

KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ と $\mu \in \mathbb{C}$ に対し，以下の留数行列 $\tilde{A}_{ij}$ で定まる KZ 型方程式

$$\widetilde{\mathcal{M}} : \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} = \sum_{0 \le \nu < n} \frac{\tilde{A}_{i\nu}}{x_i - x_\nu} \tilde{u} \quad (0 \le i < n) \tag{5.1}$$

を $\mathcal{M}$ の **convolution** $\widetilde{\mathrm{mc}}_{x_0,\mu}\,\mathcal{M}$ という．すなわち

$$\tilde{A}_{0k} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{A_{01}} & & k & & \phantom{A_{0n-1}} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{01} & \cdots & A_{0k}+\mu & \cdots & A_{0n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in M\big((n-1)N,\mathbb{C}\big)$$

(Dettweiler-Reiter [1]),

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \phantom{A_{ij}} & & i & & j & & \phantom{A_{ij}} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} A_{ij} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & A_{ij}+A_{0j} & & -A_{0j} & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -A_{0i} & & A_{ij}+A_{0i} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & A_{ij} \end{pmatrix} \end{array} \in M\big((n-1)N,\mathbb{C}\big)$$

(Haraoka [2]).

特に A_{ij} が積分可能条件を満たすことから，$\widetilde{A}_{ij}$ も積分可能条件を満たすことが従う．

middle convolution の定義とその解析のための記号を用意しよう．

定義 5.1. 2 以上の整数 n と正整数 N に対して以下のように定める．

$$L_n^0 = \{1,2,\dots,n-1\}, \quad L_n = \{0,1,2,\dots,n-1\},$$

$$\iota_j(v) := (v)_j := \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-1)N}, \quad \iota_j : \mathbb{C}^N \hookrightarrow \mathbb{C}^{(n-1)N} \quad (v \in \mathbb{C}^N,\ j \in L_n^0),$$

$$\iota_I := \sum_{i \in I} \iota_i : \mathbb{C}^N \hookrightarrow \mathbb{C}^{(n-1)N},\ (v)_I := \iota_I(v) \in \mathbb{C}^{(n-1)N} \quad (v \in \mathbb{C}^N,\ I \subset L_n^0),$$

$$V_I := \iota_I(\mathbb{C}^N) \simeq \mathbb{C}^N.$$

さらに，KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ に対し，$\mathbb{C}^{(n-1)N}$ の部分空間を考える:

$$\mathcal{K}_i := \iota_i(\ker\, A_{0i}) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \ker A_{0i} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \subset \mathbb{C}^{(n-1)N},$$

$$\mathcal{K}_\infty := \ker \tilde{A}_{0\infty} \overset{\mu \ne 0}{=} \iota_{L_n^0}\big(\ker(A_{0\infty} - \mu)\big) = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{pmatrix} \mid A_{0\infty} v = \mu v \right\} \subset \mathbb{C}^{(n-1)N},$$

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}_\infty + \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i.$$

ここで，$\mu \ne 0$ ならば $\ker \tilde{A}_{0\infty} = \iota_{L_n^0}\big(\ker(A_{0\infty} - \mu)\big)$ で $\mathcal{K}$ は $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{n-1}, \mathcal{K}_\infty$ の直和となることに注意.

容易に分かるように $\tilde{A}_I\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$ となるので，$\widetilde{A}_I$ は商空間 $\mathbb{C}^{(n-1)N}/\mathcal{K}$ 上の線形写像を引き起こす．それらの線形写像を，商空間の適当な基底を用いて行列

$$\bar{A}_I\in M\bigl((n-1)N-\dim\mathcal{K},\mathbb{C}\bigr) \tag{5.2}$$

で表す．

定義 5.2 ([1], [2])**.** $\mathcal{M}$ の **middle convolution** $\overline{\mathcal{M}}=\mathrm{mc}_{x_0,\mu}\mathcal{M}$ を

$$\overline{\mathcal{M}}:\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}=\sum_{\nu\in L_n\setminus\{i\}}\frac{\bar{A}_{i\nu}}{x_i-x_\nu}\bar{u}\quad(i\in L_n)$$

と定義する．

$\mathcal{M}$ が定義する変数 x_0 の常微分方程式が既約で μ が一般ならば，$\mathcal{M}$ や $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}\mathcal{M}$ は既約となって

$$\mathrm{mc}_{x_0,\mu'}\circ\mathrm{mc}_{x_0,\mu}=\mathrm{mc}_{x_0,\mu+\mu'},\ \mathrm{mc}_{x_0,0}=\mathrm{id} \tag{5.3}$$

が成り立つ（cf. [1]）．多くの場合，この常微分方程式の既約性と $\mathcal{M}$ の既約性とは一致する（cf. [8]).

$n=4$ のときの $A_{123}=A_{12}+A_{13}+A_{23}$ の convolution は

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{123}&=\begin{pmatrix}A_{12}+A_{02}&-A_{02}&0\\-A_{01}&A_{12}+A_{01}&0\\0&0&A_{12}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A_{13}+A_{03}&0&-A_{03}\\0&A_{13}&0\\-A_{01}&0&A_{13}+A_{01}\end{pmatrix}\\&\quad+\begin{pmatrix}A_{23}&0&0\\0&A_{23}+A_{03}&-A_{03}\\0&-A_{02}&A_{23}+A_{02}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_{0123}-A_{01}&-A_{02}&-A_{03}\\-A_{01}&A_{0123}-A_{02}&-A_{03}\\-A_{01}&-A_{02}&A_{0123}-A_{03}\end{pmatrix}\in M(3N,\mathbb{C})\end{aligned}$$

となる．m を $n{-}1$ 以下の正整数とすると

$$\tilde{A}_{1\cdots m}=\begin{pmatrix}A_{0\cdots m}-A_{01}&\cdots&-A_{0m}&&&\\\vdots&\ddots&\vdots&&&\\-A_{01}&\cdots&A_{0\cdots m}-A_{0m}&&&\\&&&A_{1\cdots m}&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&A_{1\cdots m}\end{pmatrix}\in M((n-1)N)$$

である．

補題 5.3. 定義 *5.1* の記号のもとで $I\subset L_n\quad(|I|>1)$ と $j,\,k\in L_n^0,\,v\in\mathbb{C}^N$ に対し

$$\begin{aligned}\tilde{A}_I(v)_J&=(A_Iv)_J\in V_J&&(I\subset J\subset L_n^0),\\\tilde{A}_I(v)_j&=(A_{0I}v)_j-(A_{0i}v)_I&&(I\ni j),\\\tilde{A}_I(v)_k&=(A_Iv)_k\in V_{\{j\}}&&(I\not\ni k),\\[\tilde{A}_I]&=[A_I]_{n-|I|}\cup[A_{0I}]_{|I|-1},&&\\\tilde{A}_I(v)_j&=(A_{0I}v)_j\in\mathcal{K}_j&&(v\in\ker A_{0j},\ I\ni j),\\\tilde{A}_I(v)_k&=(A_Iv)_k\in\mathcal{K}_k&&(v\in\ker A_{0k},\ I\not\ni k),\\\tilde{A}_I(v)_{L_n^0}&=(A_Iv)_{L_n^0}\in\mathcal{K}_\infty&&(v\in\ker(A_{0\infty}-\mu)).\end{aligned}$$

対称性から補題は，$I=\{1,\dots,m\}$ のときに示せばよいが，それは $A_{\{1\cdots m\}}$ の表示から容易に分かる．なお $[A_{0I},A_{0j}]=[A_I,A_{0k}]=[A_I,A_{0\infty}]=0\ \ (j\in I,\ k\notin I)$ から最後の 3 式が分かる．

また $\tilde A_{0\cdots m}=\tilde A_{1\cdots k}+\tilde A_{01}+\cdots+\tilde A_{0m}$ であるから

$$\tilde A_{0\cdots m-1}=\begin{pmatrix}A_{01\cdots m}+\mu & & & A_{0,m+1} & \cdots & A_{0,n-1}\\ & \ddots & & \vdots & \cdots & \vdots\\ & & A_{01\cdots m}+\mu & A_{0,m+1} & \cdots & A_{0,n-1}\\ & & & A_{1\cdots m} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_{1\cdots m}\end{pmatrix}$$

となる．特に $\widetilde A_{0\dots n-1}$ は対角成分が $A_{0\dots n-1}+\mu$ のブロック対角行列となる．

補題 5.4. (i) 一般に $I\subset L_n^0,\ j,k\in L_n^0,\ v\in\mathbb{C}^N$ に対して

$$\begin{aligned}\tilde A_{0I}(v)_j&=((A_{0I}+\mu)v)_j\in V_{\{j\}} && (I\ni j),\\ \tilde A_{0I}(v)_k&=(A_Iv)_k+(A_{0k}v)_I && (I\not\ni k),\\ [\tilde A_{0I}]&=[A_{0I}+\mu]_{n-1-|I|}\cup[A_I]_{|I|},\\ \tilde A_{0I}(v)_j&=((A_{0I}+\mu)v)_j\in\mathcal{K}_j && (v\in\ker A_{0j},\ I\ni j),\\ \tilde A_{0I}(v)_k&=(A_Iv)_k\in\mathcal{K}_k && (v\in\ker A_{0k},\ I\not\ni k),\\ \tilde A_{0I}(v)_{L_n^0}&=(A_Iv)_{L_n^0}\in\mathcal{K}_\infty && (v\in\ker(A_{0\infty}-\mu)).\end{aligned}$$

なお最後の式は

$$(A_{0I}+\mu)v+\sum_{\nu\in L_n^0\setminus I}A_{0\nu}v=A_Iv+\Bigl(\sum_{\nu=1}^{n-1}A_{0\nu}+\mu\Bigr)v=A_Iv-(A_{0\infty}-\mu)v \tag{5.4}$$

から分かる．

$\mathcal{I}$ を L_n の極大可換部分集合族とする．$\mathcal{I}$ の元で 0 を含むものからなる集合を $\mathcal{I}_0$ とおく．$\mathcal{I}_0$ の元は可換性から包含関係があり，それで順序づけられる．それを $I_{1,0}\subset I_{2,0}\subset\cdots\subset I_{m,0}=L_n$ とする．

さらに $\mathcal{I}_k=\{I\in\mathcal{I}\mid I\subset I_{k,0}\setminus I_{k-1,0}\}$ とおいて，$\mathcal{I}_k$ の元を，包含関係があれば大きい方がより前になるように逆順に並べる（$I_{0,0}=\{0\}$ とする）．すなわち

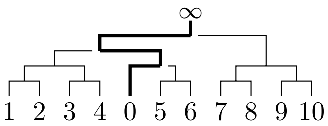
定義 5.5. $L_n=\{0,\dots,n-1\}$ の極大可換部分集合族 $\mathcal{I}$ の元に番号をつける．

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_0&:=\{I\in\mathcal{I}\mid 0\in I\}\\ &=\bigl\{I_{k,0}\mid 1\le k\le m,\ I_{1,0}\subset I_{2,0}\subset\cdots\subset I_{m,0}\bigr\},\\ \mathcal{I}_k&:=\{I\in\mathcal{I}\mid I\subset I_{k,0}\setminus I_{k-1,0}\},\\ &=\{I_{k,\nu}\mid\nu=1,\dots,m_k,\ I_{k,\nu}\supset I_{k,\nu'}\text{ or }I_{k,\nu}\cap I_{k,\nu'}=\emptyset\quad(\nu\le\nu')\},\\ I_{k,\nu}&\le I_{k',\nu'}\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}k<k'\text{ or }(k=k'\text{ and }\nu\le\nu'),\\ I^{(\ell)}&:=I_{k,\nu}\ \text{ただし}\ \ell=|\{I\in\mathcal{I}\mid I\le I_{k,\nu}\}|\quad(1\le\ell<n).\end{aligned}$$

$I^{(\ell)}$ は $\mathcal{I}$ の元を小さい順に番号づけたものとなっている．すなわち

$$\mathcal{I}=\{I^{(\ell)}\mid\ell=1,\dots,n-1\},\quad I^{(1)}<I^{(2)}<\cdots<I^{(n-1)}.$$

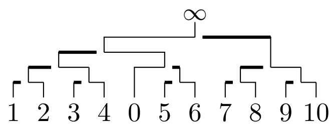
これにより極大可換集合族 $\mathcal{I}$ に辞書式順序が入るが（一意とは限らない），それには L_n の要素でラベルがついたチームのトーナメント図で $\mathcal{I}$ を表すと分かり易い．チーム 0 が優勝したチームと考えて特別視するとよい．

例 5.6. トーナメント図  の場合は

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_0 = \big\{I_{1,0} = \{0,5,6\},\ I_{2,0} = \{0,1,2,3,4,5,6\},\ I_{3,0} = \{0,1,2,\dots,9,10\}\big\},\\
&\mathcal{I}_1 = \big\{I_{1,1} = \{5,6\}\big\},\\
&\mathcal{I}_2 = \big\{I_{2,1} = \{1,2,3,4\},\ I_{2,2} = \{1,2\},\ I_{2,3} = \{3,4\}\big\},\\
&\mathcal{I}_3 = \big\{I_{3,1} = \{7,8,9,10\},\ I_{3,2} = \{7,8\},\ I_{3,3} = \{9,10\}\big\},
\end{aligned}$$

$I_{1,0} < I_{1,1} < I_{2,0} < I_{2,1} < I_{2,2} < I_{2,3} < I_{3,0} < I_{3,1} < I_{3,2} < I_{3,3}$.

ここで定義 2.3 にある写像 b^0 をみてみよう．$b^0(I)$ は一意的に定まらないが，I に対応する試合で負けたチームは $b^0(I)$ で定まるグループの勝者であったと考えると，すべての試合の勝敗を定めた次のようなトーナメント図と b^0 とが対応する．

(5.5) 

上の場合は $n = 11$ で，図に対応する $b^0(I^{(1)}), b^0(I^{(2)}), \dots, b^0(I^{(n-1)})$ は

$$\underset{6}{\overset{\{0,5,6\}}{\{5,6\}}},\ \underset{5}{\overset{\{5,6\}}{\{5\}}},\ \underset{4}{\overset{\{0,1,2,3,4,5,6\}}{\{1,2,3,4\}}},\ \underset{2}{\overset{\{1,2,3,4\}}{\{1,2\}}},\ \underset{1}{\overset{\{1,2\}}{\{1\}}},\ \underset{3}{\overset{\{3,4\}}{\{3\}}},\ \underset{10}{\overset{\{0,1,\dots,10\}}{\{7,8,9,10\}}},\ \underset{8}{\overset{\{7,8,9,10\}}{\{7,8\}}},\ \underset{7}{\overset{\{7,8\}}{\{7\}}},\ \underset{9}{\overset{\{9,10\}}{\{9\}}}$$

となる．試合を表す $b^0(I^{(i)})$ の下の数字は，そのラベルのチームが負けた試合が $I^{(i)}$ であったことを示す．

定義 5.7. $\mathbb{C}^{(n-1)N}$ の部分空間を次のように定義する（cf. 定義 2.3）．

$$W^{(\ell)} := W_I := \sum_{\nu=1}^{\ell} V_{b^0(I^{(\nu)})} \quad (I = I^{(\ell)} \in \mathcal{I}),$$

$$U_{b^0(\mathcal{I})} := \big(U_{ij}\big)_{\substack{1\le i<n-1\\ 1\le j\le n-1}} \in GL((n-1)N, \mathbb{C}) \quad \text{with}$$

$$U_{ij} = \begin{cases} E_N & (j \in b^0(I^{(i)})),\\ O_N & (j \notin b^0(I^{(i)})). \end{cases}$$

ここで，E_N はサイズ N の単位行列，O_N はサイズ $N \times N$ の零行列．

補題 5.8. (i) $0 \notin I \in \mathcal{I}$ に対し

$$V_I \subset W_I. \tag{5.6}$$

$$V_{\bar{b}(I)}, V_{\bar{b}'(I)} \subset W_I. \tag{5.7}$$

(ii) $\dim W^{(\ell)} = \ell N \quad (\ell = 1, \dots, n-1)$

(iii) $I, K \in \mathcal{I}$ とし，$J = b^0(K)$ とおく．$v \in \mathbb{C}^N$ に対し

$0 \in I$ ならば

$$\tilde{A}_I(v)_J = \begin{cases} \big((A_I + \mu)v\big)_J & (I \supset K),\\ (A_{I\setminus\{0\}}v)_J + \big(\sum_{\nu\in J} A_{0\nu}v\big)_{I\setminus\{0\}} & (I \not\supset K). \end{cases}$$

$0 \notin I$ ならば

$$\tilde{A}_I(v)_J = \begin{cases} (A_I v)_J & (I \not\supset K),\\ (A_{0I}v)_J - \big(\sum_{\nu\in J} A_{0\nu}v\big)_I & (I \supset K). \end{cases}$$

iv) $\tilde{A}_I W^{(\ell)} \subset W^{(\ell)} \quad (I \in \mathcal{I},\ 1 \le \ell < n)$.

証明. まず, $I = I_{k,i}$ として i について帰納的に (5.6), (5.7) を示す. $I = \bar{b}(I) \sqcup \bar{b}'(I)$ なので, (5.7) は (5.6) から分かることに注意. $i = 1$ のときは $b^0(I_{k,0}) = I_{k,1}$ なので (5.6) は明らか. $i > 1$ のとき $I \in b(J)$ となる $I \subset J \in \mathcal{I}_k$ がある. このとき帰納法の仮定から I を J に御個変えた (5.7) より $V_I \subset W_J \subset W_I$ を得る.

よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{m_k} V_{b^0(I_{k,\nu})} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{m_k} W_{I_{k,\nu}} = \sum_{k=1}^{m}\Bigl(V_{b^0(I_{k,0})} + \sum_{\nu=1}^{m_k}(V_{\bar{b}(I_{k,i})} + V_{\bar{b}'(I_{k,i})})\Bigr)\\ &\supset \sum_{\nu=1}^{n-1} V_\nu \simeq \mathbb{C}^{(n-1)N}\end{aligned}$$

となるが, $\sum_{k=1}^{m}(m_k+1) = n-1$ であるから $\sum_{k=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{m_k} V_{b^0(I_{k,\nu})}$ は $\mathbb{C}^{(n-1)N}$ の直和分解となっていることが分かる. 特に (ii) が分かる.

補題 5.3, 5.4 から (iii) が分かり, よって iv) も分かる.

定義 5.9. L を有限集合とするとき, $i \in L$, および空でない集合 $I,\ J \subset L$ に対し

$$\mathrm{md}_{i,J}(I) := \begin{cases} I \cup \{i\} & (I \supset J),\\ I \setminus \{i\} & (I \not\supset J),\end{cases} \quad \mathrm{me}_{i,J}(I) := \begin{cases} 1 & (i \in I \supset J),\\ 0 & (i \notin I \text{ or } I \not\supset J).\end{cases}$$

注意 5.10. (i) $i \in I \supset J$ または $i \notin I \not\supset J$ ならば $\mathrm{md}_{i,J}(I) = I$.

(ii) $K = I^{(\ell)} \in \mathcal{I}$ とすると, $\widetilde{A}_I$ が商空間 $W^{(\ell)}/W^{(\ell-1)} \simeq V_{b^0(J)} \simeq C^N$ に引き起こす線形変換は, (5.8) で与えられる A_I^K とみなせる.

(iii) L の空でない部分集合族 $\{I_\nu \mid \nu = 0,1,\ldots,r\}$ が互いに可換（cf. (2.2)）で, $|I_\nu| > 1$ $(\nu = 1,\ldots,r)$ ならば $\{I_0 \cup \{i\}\} \cup \{\mathrm{md}_{i,I_0}(I_\nu) \mid \nu = 1,\ldots,r\}$ も同様.

補題 5.3, 5.4, 5.8 から次の定理 5.1 が得られる.

定理 5.1. (i) $\mathcal{I}$ を $L_n = \{0,1,\ldots,n-1\}$ の任意の極大可換部分集合族とする. $\mathcal{I} = \{I^{(1)},\ldots,I^{(n-1)}\}$ とおき, $I \in \mathcal{I}$ とする. 定義 *5.9* の記号のもとで

$$\begin{aligned}[\tilde{A}_I] &= [A_{I\cup\{0\}} + \mu]_{|I|-1} \sqcup [A_{I\setminus\{0\}}]_{n-|I|},\\ [\tilde{A}_{I^{(1)}} : \cdots : \tilde{A}_{I^{(n-1)}}] &= \bigsqcup_{J\in\mathcal{I}} [A_{I^{(1)}}^J : \cdots : A_{I^{(n-1)}}^J],\\ [\tilde{A}_{I^{(1)}} : \cdots : \tilde{A}_{I^{(n-1)}}]|_{\mathcal{K}_j} &= [A_{I^{(1)}}^{\{j\}} : \cdots : A_{I^{(n-1)}}^{\{j\}}]|_{\ker A_{0j}} \quad (j \in L_n^0),\\ [\tilde{A}_{I^{(1)}} : \cdots : \tilde{A}_{I^{(n-1)}}]|_{\mathcal{K}_\infty} &= [A_{I^{(1)}}^{L_n} : \cdots : A_{I^{(n-1)}}^{L_n}]|_{\ker(A_{0\infty}-\mu)}.\end{aligned}$$

ここで

$$A_I^K := A_{\mathrm{md}_{0,K}(I)} + \mathrm{me}_{0,K}(I)\cdot\mu. \tag{5.8}$$

(ii) $\widetilde{A}_{I^{(i)}}$ は $U_{b^0(\mathcal{I})}^{-1}\widetilde{A}_{I^{(i)}}U_{b^0(\mathcal{I})}$ によって同時ブロック上三角化される.

注意 5.11. (i) 上の定理において

$$A_{L_n}^J = A_{0\cdots n-1}^j = \mu + A_{0\cdots n-1} \quad \text{and} \quad A_{L_n}^{L_n} = A_{L_n^0} \tag{5.9}$$

であるので, $[\tilde{A}_{I^{(1)}} : \cdots : \tilde{A}_{I^{(n-1)}}]$ の中の $\tilde{A}_{L_n}$ の項を省略することが多い.

また $A_{0\infty} = A_{L_n^0} - A_{L_n}$ である. さらにここで系 3.3 と次に注意.

$$\mathrm{mc}_{x_0,\mu} = \mathrm{Ad}\bigl((x_p - x_q)^{-\lambda}\bigr) \circ \mathrm{mc}_{x_0,\mu} \circ \mathrm{Ad}\bigl((x_p - x_q)^{\lambda}\bigr) \quad (1 \le p < q \le n-1). \tag{5.10}$$

(ii) $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}\mathcal{M}$ の留数行列の一般化 Riemann scheme, すなわち

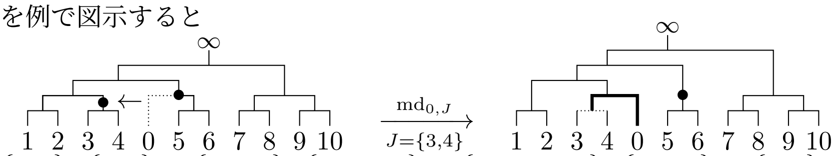
$$\bigl\{[\bar{A}_{ij}] \mid \{i,j\} \subset \tilde{L}_n\bigr\} \tag{5.11}$$

は定理 5.1 と $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ から分かる.

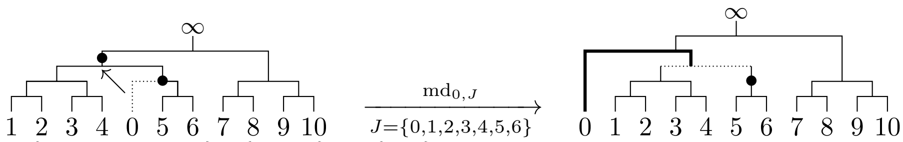
以下トーナメント図との対応を考察しよう．$\mathcal{I}$ をトーナメント戦の図で表し，チーム i を (i) と書くと（cf. 注意 2.1）

- $(A_I^J)_{I\in\mathcal{I}}$：(0) を deletion し，$J$ の勝者と (0) との試合を insertion することに対応．最初の (0) の試合は，相手の前試合に置き換え（不戦勝），insertion により加わった試合の対戦相手の前試合を新たに加わった試合に置き換える．
- $(A_I^j|_{\ker A_{0j}})_{I\in\mathcal{I}}$：(0) を deletion して (j) との basic insertion の試合を行う
- $(A_I^\infty|_{\ker(A_{0\infty}-\mu)})_{I\in\mathcal{I}}$：(0) を deletion して優勝者との最終決定戦を行う（top insertion）．ここで，$A_I^\infty = A_I^{L_n}$ とおいた．

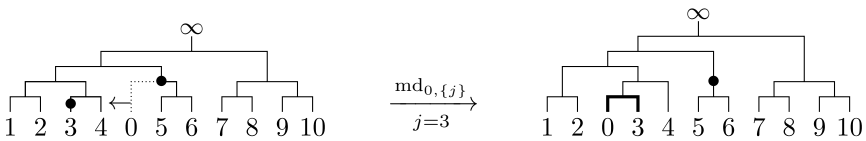
これを例で図示すると



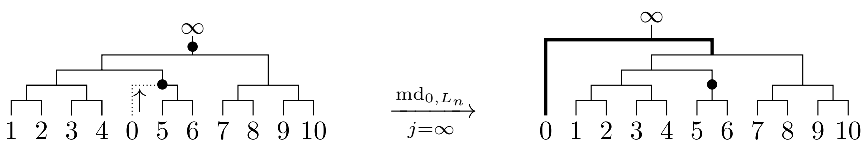
$J=\{3,4\}:\{3,4\}\to\{0,3,4\},\ \{1,2,3,4\}\to\{0,1,2,3,4\},\ \{0,5,6\}\to\{5,6\}$



$J=\{0,1,2,3,4,5,6\}:\{0,5,6\}\to\{5,6\}$



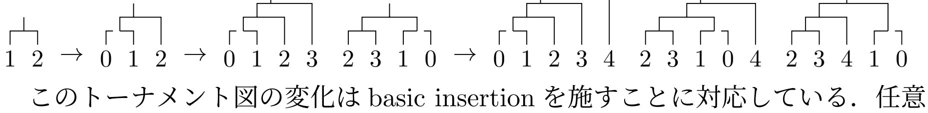
$j=3:\{3,4\}\to\{0,3,4\},\ \{1,2,3,4\}\to\{0,1,2,3,4\},\ \{0,5,6\}\to\{5,6\},\ +\{0,3\}$



$j=\infty:\{0,5,6\}\to\{5,6\},\ \{0,1,\dots,6\}\to\{1,\dots,6\},\ \{0,1,\dots,10\}\to\{1,\dots,10\}$

注意 5.12. Middle convolution $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}$ と additions $\mathrm{Ad}\big((x_i-x_j)^\lambda\big)$ と添え字集合 $\{0,1,\dots,n-1\}$ の元の置換は KZ 型方程式の変換を定義する．この変換でスペクトル $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ がどう移るかは，定理 5.1 などから分かる．

このような変換を何度か施して得られた KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ の留数行列 A_{12} のスペクトル $[A_{12}]$ を得るには，もとの KZ 方程式のどのようなスペクトルのデータが必要か考察しよう．$[\tilde{A}_{12}|_{\mathcal{K}_1}]=[A_{012}|_{\ker A_{01}}]$ であるから，添え字の置換と addition を考慮すると，元の方程式の $[A_{01}:A_{012}]$ が必要となる．添え字の置換より $[A_{12}:A_{123}]$ や $[A_{23}:A_{123}]$ も必要である．再度 x_0 変数の middle convolution を考えれば，$[A_{01}:A_{012}:A_{0123}]$ や $[A_{01}:A_{23}:A_{0123}]$ も必要となる．以上の考察は，次のような図式に対応している．



このトーナメント図の変化は basic insertion を施すことに対応している．任意のトーナメント図が 2 チームのトーナメント図に basic insertion を何度か施して得られるので（cf. 注意 2.1），一般には $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ が必要である．

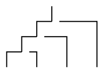
なお，convolution や addition のみを施していく場合は, 同時固有空間分解を含まない $\{[A_I]\mid I\subset L_n\}$ のデータで閉じている．middle convolution や addition を何度か施して得られる KZ 型方程式の留数行列や可換留数行列族の同時固有値分解の情報

を元の KZ 型方程式から得るには，middle convolution の定義で使われる $\ker A_j$ が自明であるかどうかなどに依存して，$\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ に含まれる部分的情報，たとえば極大とは限らないいくつかの可換留数行列族の同時固有値分解の情報で十分なことが多いので，問題に応じて考察するのがよい．たとえば、middle convolution がいくつかの変数のみに制限される場合については [9, Theorem 4.1] や §7.3 を参照のこと．

6. 例

前節の主定理から middle convolution $\mathrm{mc}_{x_0,\mu}$ で $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ がどう変わるかが分かる．n 変数 $(x_0,\dots,x_{n-1})$ の場合，結果は添え字 $\{1,\dots,n-1\}$ について対称なので，$\mathrm{Sp}(\mathrm{mc}_{x_0,\mu}\mathcal{M})$ のうちの x_0 のみを区別した優勝型の個数だけ調べればよい．$n=3,4,5,6,7,\dots$ のときその個数 W_n は 2, 4, 9, 20, 46, . . . である．

この節では，$n=4$ の $W_4=4$ つの場合を具体的に与える．なお，$\{1,2,3\}$ の添え字の置換を行った結果（全部で $K_4=15$ 個となる）も成立する．簡単のため，斉次性を仮定している．このときは $A_{0123}=0$, $\tilde A_{01234}=\mu$.



1. 0 1 2 3 $\qquad \mathcal{I}=\bigl\{\{0,1\},\{0,1,2\},\{0,1,2,3\}\bigr\}\xrightarrow{b^0}\bigl\{\{1\},\{2\},\{3\}\bigr\}$

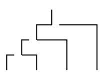
$$U=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad V=U^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \tilde A_*\to V\tilde A_*U$$

$$\tilde A_{01}=\begin{pmatrix}A_{01}{+}\mu&A_{02}&A_{03}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A_{01}{+}\mu&A_{02}&A_{03}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\tilde A_{012}=\begin{pmatrix}A_{012}{+}\mu&0&A_{03}\\0&A_{012}{+}\mu&A_{03}\\0&0&A_{12}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A_{012}{+}\mu&0&A_{03}\\0&A_{012}{+}\mu&A_{03}\\0&0&A_{12}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde A_{01}:\tilde A_{012}]&=\{[A_{01}+\mu:A_{012}+\mu],[0:A_{012}+\mu],[0:A_{12}]\}\\
[\tilde A_{01}:\tilde A_{012}]|_{\mathcal{K}_1}&=[A_{01}+\mu:A_{012}+\mu]|_{\ker A_{01}}\\
[\tilde A_{01}:\tilde A_{012}]|_{\mathcal{K}_2}&=[0:A_{012}+\mu]|_{\ker A_{02}}\\
[\tilde A_{01}:\tilde A_{012}]|_{\mathcal{K}_3}&=[0:A_{12}]|_{\ker A_{03}}\\
[\tilde A_{01}:\tilde A_{012}]|_{\mathcal{K}_\infty}&=[0:A_{12}]|_{\ker(A_{0\infty}-\mu)}
\end{aligned}$$

$\tilde A_{ij}$, U, V はブロック行列で，U, V の成分の 1 は単位行列を表す．



2. 1 2 0 3 $\qquad \mathcal{I}=\bigl\{\{0,1,2\},\{1,2\},\{0,1,2,3\}\bigr\}\xrightarrow{b^0}\bigl\{\{1,2\},\{1\},\{3\}\bigr\}$

$$U=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad V=U^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \tilde A_*\to V\tilde A_*U$$

$$\tilde A_{012}=\begin{pmatrix}A_{012}{+}\mu&0&A_{03}\\0&A_{012}{+}\mu&A_{03}\\0&0&A_{12}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A_{012}{+}\mu&0&A_{03}\\0&A_{012}{+}\mu&0\\0&0&A_{12}\end{pmatrix}$$

$$\tilde A_{12}=\begin{pmatrix}A_{012}{-}A_{01}&-A_{02}&0\\-A_{01}&A_{012}{-}A_{02}&0\\0&0&A_{12}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}A_{12}&-A_{01}&0\\0&A_{012}&0\\0&0&A_{12}\end{pmatrix}$$

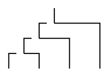
$$
\begin{aligned}
[\tilde{A}_{012} : \tilde{A}_{12}] &= \{[A_{012} + \mu : A_{12}], [A_{012} + \mu : A_{012}], [A_{12} : A_{12}]\} \\
[\tilde{A}_{012} : \tilde{A}_{12}]|_{\mathcal{K}_1} &= [A_{012} + \mu : A_{012}]|_{\ker A_{01}} \\
[\tilde{A}_{012} : \tilde{A}_{12}]|_{\mathcal{K}_2} &= [A_{012} + \mu : A_{012}]|_{\ker A_{02}} \\
[\tilde{A}_{012} : \tilde{A}_{12}]|_{\mathcal{K}_3} &= [A_{12} : A_{12}]|_{\ker A_{03}} \\
[\tilde{A}_{012} : \tilde{A}_{12}]|_{\mathcal{K}_\infty} &= [A_{12} : A_{12}]|_{\ker (A_{0\infty} - \mu)}
\end{aligned}
$$

A_I^J (cf. 定理 5.1)

$J\backslash I$	$\widetilde{012}$	$\widetilde{12}$	$\widetilde{0123}$
012	012+μ	12	μ
12	012+μ	012	μ
0123	12	12	μ

$j\backslash I$	$\widetilde{012}$	$\widetilde{12}$	$\widetilde{0123}$
1	012+μ	012	μ
2	012+μ	012	μ
3	12	12	μ
∞	12	12	μ

注意 6.1. $\big(\tilde{A}_I\big)_{I\in\mathcal{I}}$ の同時固有値分解は定理 5.1 の A_I^J で分かる．$\mathcal{I}$ の要素を添え字とする $(n{-}1)\times(n{-}1)$ 行列をこの例の場合に示したのが上の左の表で, 行列の (J,I) 成分 $A_K = A_I^J$ に対応する添え字 K を示している．なお，表の $012+\mu$ は，$A_{012}+\mu$ を意味している．添え字に 0 を含むかどうかは $I\supset J$ かどうかで決まり，$+\,\mu$ の項があるのは $0\in I\supset J$ のときのみ．例では $\tilde{A}_{0123}$ を省略しているので，行列の最後の列は例では省略されている．同様に，右の表は $\big(\tilde{A}_I|_{\mathcal{K}_j}\big)_{I\in\mathcal{I}}$ を記述する $A_I^{\{j\}}$ を表している（$j=\infty$ のときは，$A_I^{L_n}$）．



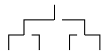
3. 1 2 3 0 $\quad \mathcal{I} = \big\{\{0,1,2,3\},\{1,2,3\},\{1,2\}\big\} \xrightarrow{b^0} \big\{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1\}\big\}$

$$
U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_* \to V\tilde{A}_*U
$$

$$
\tilde{A}_{123} = \begin{pmatrix} -A_{01} & -A_{02} & -A_{03} \\ -A_{01} & -A_{02} & -A_{03} \\ -A_{01} & -A_{02} & -A_{03} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_{123} & -A_{01}-A_{02} & -A_{01} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} A_{012}{-}A_{01} & -A_{02} & 0 \\ -A_{01} & A_{012}{-}A_{02} & 0 \\ 0 & 0 & A_{12} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{01} \\ 0 & 0 & A_{012} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
[\tilde{A}_{123} : \tilde{A}_{12}] &= \{[A_{123} : A_{12}], [0 : A_{12}], [0 : A_{012}]\} \\
[\tilde{A}_{123} : \tilde{A}_{12}]|_{\mathcal{K}_1} &= [0 : A_{012}]|_{\ker A_{01}} \\
[\tilde{A}_{123} : \tilde{A}_{12}]|_{\mathcal{K}_2} &= [0 : A_{012}]|_{\ker A_{02}} \\
[\tilde{A}_{123} : \tilde{A}_{12}]|_{\mathcal{K}_3} &= [0 : A_{12}]|_{\ker A_{03}} \\
[\tilde{A}_{123} : \tilde{A}_{12}]|_{\mathcal{K}_\infty} &= [A_{123} : A_{12}]|_{\ker (A_{0\infty} - \mu)}
\end{aligned}
$$



4. 0 1 2 3 $\quad \mathcal{I} = \big\{\{0,1\},\{0,1,2,3\},\{2,3\}\big\} \xrightarrow{b^0} \big\{\{1\},\{2,3\},\{2\}\big\}$

$$
U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_* \to V\tilde{A}_*U
$$

$$
\tilde{A}_{01} = \begin{pmatrix} A_{01}{+}\mu & A_{02} & A_{03} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_{01}{+}\mu & A_{03}+A_{02} & A_{02} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{23} &= \begin{pmatrix} A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & A_{023}-A_{02} & -A_{03} \\ 0 & -A_{02} & A_{023}-A_{03} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_{23} & 0 & 0 \\ 0 & A_{23} & -A_{02} \\ 0 & 0 & A_{023} \end{pmatrix} \\
[\tilde{A}_{01} : \tilde{A}_{23}] &= \{[A_{01}+\mu : A_{23}], [0 : A_{23}], [0 : A_{023}]\} \\
[\tilde{A}_{01} : \tilde{A}_{23}]|_{\mathcal{K}_1} &= [A_{01}+\mu : A_{23}]|_{\ker A_{01}} \\
[\tilde{A}_{01} : \tilde{A}_{23}]|_{\mathcal{K}_2} &= [0 : A_{023}]|_{\ker A_{02}} \\
[\tilde{A}_{01} : \tilde{A}_{23}]|_{\mathcal{K}_3} &= [0 : A_{023}]|_{\ker A_{03}} \\
[\tilde{A}_{01} : \tilde{A}_{23}]|_{\mathcal{K}_\infty} &= [0 : A_{23}]|_{\ker (A_{0\infty}-\mu)}
\end{aligned}
$$

1 の場合

$\widetilde{A}$	$\widetilde{01}$	$\widetilde{012}$
01	01+μ	012+μ
012	0	012+μ
0123	0	12
1	01+μ	012+μ
2	0	012+μ
3	0	12
∞	0	12

3 の場合

$\widetilde{A}$	$\widetilde{123}$	$\widetilde{12}$
0123	123	12
123	0	12
12	0	012
1	0	012
2	0	012
3	0	12
∞	123	12

4 の場合

$\widetilde{A}$	$\widetilde{01}$	$\widetilde{23}$
01	01+μ	23
0123	0	23
23	0	023
1	01+μ	23
2	0	023
3	0	023
∞	0	23

数式処理 `Risa/Asir` のライブラリ [12] には定理 5.1 によってこの節に述べた結果を得る函数が組み込んであり，以下のプログラムで結果が表示される（TeX を用いて PDF に変換され，トーナメント図も含めて表示される）．

```
N=4;    /* N-2=2 variables HG */
T=os_md.symtournament(N|to="T");          /* T: 全トーナメント型 */
for(S="";T!=[];T=cdr(T)){                 /* R: 全勝利型 */
  R=os_md.xytournament(car(T),0|verb=21,winner="all");
  for(;R!=[];R=cdr(R)){
    C=car(R);
    S=S+"\\raisebox{-2mm}{"               /* S: TeX ソース */
    +os_md.xytournament(C[0],0|teams=C[1],winner=0)   /* 図 */
    +"}\\qquad"+rtostr(C[4])+"\\ $\\to$ \\ "+rtostr(C[3])
    +os_md.midKZ(C[2],C[3]);              /* スペクトル */
  }
}
os_md.dviout(S);                          /* 表示 */
```

上のプログラムでは

- 1 行目の `N=4` で変数の個数 $n=4$ を与える．
- 2 行目で `N` チームのトーナメント図のすべての型を `T` に得る．
- 4 行目でトーナメント型に対応するすべての優勝型の $\mathcal{I}$ を `R` に得る．
- 5 行目以降で，$\mathrm{Sp}(\mathrm{mc}_{x_0,\mu}\,\mathcal{M})$ を計算し，この節で示した形式での結果を TeX のコード `S` にまとめ，最終行で `PDF` に変換して画面表示する．

注意 6.2. $n-1$ チームのトーナメント戦は，top insertion により n チームのトーナメント戦に埋め込める．埋め込みによる像は $b^0(L_n)=\{n-1\}$ となるトーナメント戦に対応している．KZ 型方程式では $\mathcal{M}$ の留数行列が $A_{i,n-1}=0$ $(0\le i\le n-2)$ となっているものを考えることに対応する．

このことに注意すれば，階数 n 階の KZ 型方程式について得た結果から $n-1$ の場合の結果が分かる．この節の例で言えば，最初の 2 例が埋め込まれた場合で，$n=3$ の場合の結果は $b^0(\{0,1,2,3\})=\{3\}$ を除けば得られる．すなわち，例における行列

は，最初の 2×2 ブロックの部分のみとし，$\mathcal{K}_3$ の項はなくなり，同時スペクトル分解は最後の項を除いたものとなる．A_{012} はそのまま残しておいてよい．

7. 補足

7.1. トーナメント戦. トーナメント戦と関連づけて KZ 型方程式の解析を行ってきたが，両者で対応する事柄は以下のようであった．

n **変数の KZ 型方程式**	n **チームのトーナメント戦**
極大可換留数行列族	トーナメント戦
KZ 型方程式のスペクトル	トーナメント戦の全体
特異点	準決勝
特異点解消	準決勝に至るまでのトーナメント戦の結果
middle convolution を行う変数	優勝者を決める
極大可換留数行列族の上三角化の基底	トーナメント戦の各ゲームの勝者を決める
middle convolution	優勝チームの deletion と insertion
middle convolution の定義の kernel	上で basic/top insertion
さらに m 個の固定特異点がある場合	n チームを m 個にグループ分け

7.2. 無限遠点. §3 で考察した KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ は，$\mathbb{P}^1$ 上の $n+1$ 個の点 $x_0,\dots,x_{n-1},\infty$ の配置空間上に定義されていると考えられる．一次分数変換で無限遠点を有限の点に移すと，無限遠点を特異点としない $n+1$ 変数の KZ-型方程式が得られ，特異点はすべて有限の点となってそれらの点に対する対称性が見やすくなる．もとの方程式が $n-1$ 変数の KZ 型方程式であったとすると，得られる n の KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ はその留数行列 A_{ij} が以下の条件を満たす，ということで特徴付けられる．

$$A_{i\infty} := \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{i\nu} = 0 \quad (0 \le i < n). \tag{7.1}$$

そこで，この節では以下の仮定を置く．

定義 7.1. ∞ は $\mathcal{M}$ の**擬特異点**である．すなわち

$$A_{i\infty} = \mu_i \quad (0 \le i < n) \tag{7.2}$$

を満たす $\mu_i \in \mathbb{C}$ が存在する（上で μ_i はスカラー行列を表す）．

$\mathrm{Ad}\big((x_0-x_1)^\lambda (x_0-x_2)^\lambda (x_1-x_2)^{-\lambda}\big)$ を $\mathcal{M}$ に施すと，$A_{0\infty}$ は $A_{0\infty}-\lambda$ に変わり，$i\neq 0$ なら $A_{i\infty}$ は不変である．よって，無限遠点を擬特異点とする KZ 型方程式は，適当な addition を施すと，無限遠点を特異点としない，すなわち (7.1) を満たす方程式に変換できる．middle convolution で $\tilde{A}_{i\infty}$ がどう変換されるかを見よう．

$$\tilde{A}_{0\infty} = -\sum_{\nu=1}^{n-1} A_{0\nu} = \begin{pmatrix} -A_{01}-\mu & -A_{02} & \cdots & -A_{0,n-1} \\ -A_{01} & -A_{02}-\mu & \cdots & -A_{0,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_{01} & -A_{02} & \cdots & -A_{0,n-1}-\mu \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{1\infty} = -\sum_{\nu=0}^{n-1} A_{1\nu} = \begin{pmatrix} A_{0\infty}+A_{1\infty}+A_{01}-\mu & 0 & \cdots & 0 \\ A_{01} & A_{1\infty} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{01} & 0 & \cdots & A_{1\infty} \end{pmatrix}$$

であるから，無限遠点を擬特異点とする KZ 型方程式の変数 x_0 に対する middle convolution は (7.2) の μ_0 を用いて mc_{x_0,μ_0} と定義する．すると

$$\widetilde{A}_{0\infty}(v)_{L_n^0} = \big((A_{0\infty}-\mu)v\big)_{L_n^0}, \qquad \widetilde{A}_{1\infty}(v)_{L_n^0} = \big((A_{01}+A_{1\infty})v\big)_{L_n^0},$$
$$\widetilde{A}_{0\infty} = 0 \mod \mathcal{K}_\infty, \qquad\qquad \widetilde{A}_{i\infty} = \mu_i \mod \mathcal{K}_i \quad (1 \le i < n),$$

より

$$\mathcal{K}_\infty = V_{L_n^0},\ \ \overline{A}_{0\infty} = 0,\ \ \overline{A}_{i\infty} = \mu_i \quad (0 < i < n) \tag{7.3}$$

となるので，$\mathrm{mc}_{x_0,\mu_0}\,\mathcal{M}$ も無限遠点を擬特異点にもつ．

7.3. 固定特異点. 変数以外にも特異点 $y_1,\dots,y_m$ をもつ KZ 型方程式

$$\mathcal{M} : \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{\substack{0\le\nu\le n-1\\ \nu\ne i}} \frac{A_{i\nu}}{x_i - x_\nu}u + \sum_{q=1}^m \frac{B_{iq}}{x_i - y_q}u \quad (i = 0,\dots,n-1) \tag{7.4}$$

を考察する．この方程式の場合も，(7.2) が満たされるとき無限遠点は擬特異点であるという．変数を増やせば無限遠点は擬特異点と仮定して一般性を失わないので，以下それを仮定する．

ここで $\{i_1,\dots,i_p\}\subset\{0,\dots,n-1\}$ と $\{j_1,\dots,j_q\}\subset\{n,\dots,m+n-1\}$ に対して

$$A_{i_1,\dots,i_p;j_1,\dots,j_q} := \sum_{1\le\nu<\nu'\le p} A_{i_\nu i_{\nu'}} + \sum_{\substack{1\le\nu\le p\\ 1\le\nu'\le q}} B_{i_\nu j_{\nu'}-n+1}$$

とおく．$y_j = x_{n-1+j}$ とおいたと考えてもよい（$j = 1,\dots,m$）．このとき

$$A_{i_1,\dots,i_p;j_1,\dots,j_q} = A_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} - A_{j_1,\dots,j_q}$$

に注意（右辺の $A_{j_\nu j_{\nu'}}$ の項はキャンセルする）．

$\mathcal{M}$ の可積分条件は，互いに異なる $i, j, k, \ell \in L_n$ と $q, q' \in \{n, n{+}1,\dots,n{+}m{-}1\}$ に対し

$$\begin{aligned} &[A_{ij}, A_{k\ell}] = [A_{i;q}, A_{j;q'}] = [A_{ij}, A_{k;q}] = 0,\\ &[A_{ij}, A_{ijk}] = [A_{ij}, A_{ij;q}] = [A_{i;q}, A_{ij;q}] = 0. \end{aligned} \tag{7.5}$$

また，$[A_{01}, A_{01\cdots k;q}] = [A_{01}, \sum_{0\le i<j\le k} A_{i,j} + A_{01;q} + \sum_{i=2}^k A_{i;q}] = 0$ などから一般に $I,\,J\subset\{0,1,\dots,n-1\}$ および $\{q,q'\}\subset\{n,n+1,\dots,n+m-1\}$ に対し

$$\begin{aligned} [A_I, A_J] &= 0 \quad (I\cap J = \emptyset \text{ or } I\subset J \text{ or } I\supset J),\\ [A_I, A_{J;q}] &= 0 \quad (I\cap J=\emptyset \text{ or } I\subset J),\\ [A_{I;q}, A_{J;q'}] &= 0 \quad (I\cap J = \emptyset \text{ and } q\ne q'). \end{aligned} \tag{7.6}$$

以下 (7.2) を仮定する．

定義 7.2. $\mathcal{I}$ が有限集合の組 (L, L') の極大可換部分集合族とは，$L\cap L' = \emptyset$ であって，$\mathcal{I} = \{\mathcal{I}^{(\nu)} \mid \nu\in L'\}$ と表せて，さらに

$$L_n = \bigsqcup_{j\in L'} S_j \tag{7.7}$$

という分解があって，$\mathcal{I}^{(j)}$ が $S_j\cup\{j\}$ の極大部分集合族となっているものとする．

さらに $L' = \{r_1,\dots,r_m\}$ とおいて以下を定義する．

$$\widehat{\mathcal{I}} := \mathcal{I}\cup\bigcup_{j=2}^m \{\widehat{S}_j\},\ \ \widehat{S}_j := \bigcup_{\nu=1}^j \bigl(S_\nu\cup\{\nu\}\bigr). \tag{7.8}$$

なお，n は変数の個数，m は固定特異点の数で，$n = |S_1| + \cdots + |S_m|$.

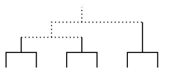
$\mathcal{M}$ は $x_0,\dots,x_{n-1}$ の各変数での middle convolution が可能で，それによる留数行列の同時固有空間分解は定理 5.1 の結果に帰着する．留数行列は (7.3) と $\mathcal{I}$ に対応するものを考え，基底は $\widehat{\mathcal{I}}$ から定めればよい．特に $n = 1$ の場合は，[1] で扱った場合に対応する．

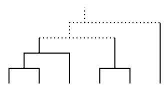
注意 7.3. $\widehat{\mathcal{I}}$ に対応するトーナメント戦は，ラベル $n+m-j$ と $n+m-1-j$ のチームが勝ち進んでいったとすると，決勝戦の $j-1$ 試合前の試合で対戦することになる（$j=1,\ldots,m$）という $n+m$ チームのトーナメント戦である．

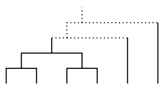
例 7.4. $L=\{0,1,2\}$, $L'=\{3,4,5\}$ のときの極大可換部分集合族は，L の元の置換と L' の元の置換の対称性を除くと以下のものがすべてとなる．

$$\begin{aligned}
&1+1+1:\big\{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\}\big\},\\
&2+1+0:\big\{\{0,3\},\{1,4\},\{0,2,3\}\big\},\ \big\{\{0,1\},\{2,3\},\{0,1,4\}\big\},\\
&3+0+0:\big\{\{0,1\},\{2,3\},\{0,1,2,3\}\big\},\ \big\{\{0,1\},\{0,1,2\},\{0,1,2,3\}\big\},\\
&\qquad\qquad\big\{\{0,1\},\{0,1,3\},\{0,1,2,3\}\big\},\ \big\{\{0,3\},\{0,1,3\},\{0,1,2,3\}\big\}.
\end{aligned}$$

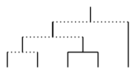
たとえば，$S_3=\{0,1,2\}$, $S_4=S_5=\emptyset$ とすると $W_{3+1}=4$ から 4 通りあり，それが上の $3+0+0$ の例となる．極大可換部分集合族の個数は，$3+0+0$ に対応する場合では $3K_4=45$ 個，$2+1+0$ に対応する場合は $3!\cdot 3K_3=54$ 個，$1+1+1$ は 6 個りで，合計 105 個である．


0 **3** 1 **4** 2 **5**
$\{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\}\}$


0 **3** 2 1 **4** **5**
$\{\{0,3\},\{1,4\},\{0,2,3\}\}$


0 1 2 **3** **4** **5**
$\{\{0,1\},\{2,3\},\{0,1,2,3\}\}$

例 7.5. $n=1$ のとき $\mathcal{I}$ は m 個ある．たとえば $m=4$ のとき
$\{\mathcal{I}\}=\big\{\{\{0,1\}\},\{\{0,2\}\},\{\{0,3\}\},\{\{0,4\}\}\big\}$, $\widehat{\mathcal{I}}=\{\widehat{\{0,3\}}\}$:


1 **2** 0 **3** **4**

注意 7.6. $m=1$ の場合を考えよう．可積分条件は，留数行列 A_{ij} $(0\le i<j\le n)$ をもつ $n{+}1$ 変数の KZ 型方程式の可積分条件と一致する．よって $x_n=y_1$ に対する偏微分方程式を加えた KZ 型方程式は可積分条件を満たす．一方，後者の解に x_n の任意函数を掛けても $\mathcal{M}$ の解となるので，$(x_0,\ldots,x_n)$ 変数の解空間は無限次元となる．

7.4. **スペクトルとアクセサリー・パラメーター．** $n=1$ で $m=2$ の場合を考えよう．すなわち

$$\mathcal{N}:\frac{du}{dx_0}=\frac{A_{01}}{x_0-x_1}u+\frac{A_{02}}{x_0-x_2}u \tag{7.9}$$

という x_1, x_2, ∞ の 3 点を特異点とする Fuchs 型常微分方程式である．これに対し

$$A_{12}=-A_{01}-A_{02} \tag{7.10}$$

すなわち，$A_{12}=A_{0\infty}$ とおくと，この方程式 $\mathcal{N}$ は，3 変数 (x_0,x_1,x_2) の KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ に拡張される．逆に $n=3$ の既約な KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ は (7.10) を満たすとしてよい（cf. 定義 3.5）．

一般に $\mathcal{N}$ はリジッドとは限らず，アクセサリー・パラメーターを $2r$ 個持つ（$r=0,1,\ldots$）．たとえば，A_{01}, A_{02} が一般の $M(3,\mathbb{C})$ の行列なら，2 個のアクセサリー・パラメーターを持つ．addition や middle convolution はアクセサリー・パラメーターの個数を変えない可逆変換なので，このような方程式にこれらの変換を施していけば，$\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ では決まらない $2r$ 個のアクセサリー・パラメーターを持つ n 変数の KZ 型方程式が得られる（$n=3,4,\ldots$）．逆に，これらの変換によって 3 変数の KZ 型方程式に移せる KZ 型方程式はアクセサリー・パラメーターの数などが分かる．

KZ 型方程式 $\mathcal{M}$ に対し，$\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ のみでアクセサリー・パラメーターを持たずに方程式が決まる場合を**リジッド**と定義する．middle convolution と addition による何度かの変換によって（特にリジッドな）KZ 型方程式が互いに移り合うかどうかは，これらの変換で階数を下げることのできない既約 KZ 型方程式の特徴付けと並んで興味深い問題である．自明な方程式 $u'=0$ からこれらの変換で構成される KZ 方程式 $\mathcal{M}$ はリジッドであるが，その方程式は Gauss の超幾何函数における Kummer の関

係式のように，スペクトルの対称性から，解の間の様々な関係式が得られることが期待できる (cf. [5, Remark 5.17]).

一般の確定特異点型のホロノミック系 $\mathcal{M}$ について，その特異集合をすべて正規交差特異点までブローアップすると，正規交差特異点を定義する正規交差超曲面に対応する可換な留数行列の組が得られる（cf. [3]）．正規交差点におけるそれらの可換な留数行列の組の同時共役類のデータ（一般には，同時固有値と重複度）を集めたものを**スペクトル** $\mathrm{Sp}\,\mathcal{M}$ と定義する．

7.5. 半局所モノドロミー. たとえば $L=\{0\}$, $L'=\{1,2,3,4\}$ のときに $[\widetilde{A}_{03}+\widetilde{A}_{04}]$ が $[A_{0i}]$ や $[A_{03}+A_{04}]$ などから求められることを [10] で示した．ここでは，たとえば $L=\{0,1,2\}$, $L'=\{3,4,5\}$ のときに $[\widetilde{A}_{03}+\widetilde{A}_{04}]$ を求めることを考察しよう．形式的には $A_{03}+A_{04}=A_{034}-A_{34}$ であるが，A_{34} などが存在するとみなして考えればよい.

3 と 5 のチームが勝ち進んだら決勝戦で戦い，4 と 5 のチームも同様，というトーナメント戦に対応する．さらに，3 と 4 のチームが勝ち進んだ場合, 両チームの対戦は準決勝または準々決勝，というトーナメント戦に限ってもよい.

$\{0,1,2\}\supset I_1\supset I_2$ に対し，$\widetilde{A}_{I_1 34}-\widetilde{A}_{I_2 34}$ は (7.4) の留数行列で表せる．$\widetilde{A}_{I_1 34}-\widetilde{A}_{I_2 34}$ の固有値分解を (7.4) の留数行列 A_{ij} の情報から得るには，$I_1 34$ と $I_2 34$ の試合を含んだトーナメント戦を考え，定理 5.1 を適用すると $A_{I'_1 34}$, $A_{I'_2 34}$ $(I'_1\supset I'_2)$ を含む同時固有空間分解が現れるが，それぞれ個別でなくて実際は $A_{I'_1 34}-A_{I'_2 34}$ を考える同時固有空間分解の問題に帰着する．このとき，$I_1\supsetneqq I_2$ でも $I'_1=I'_2$ となる場合があり得ることに注意.

References

[1] M. Dettweiler and S. Reiter. An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems. *J. Symbolic Comput.*, 30:761–798, 2000.

[2] Y. Haraoka. Middle convolution for completely integrable systems with logarithmic singularities along hyperplane arrangements. *Adv. Studies in Pure Math.*, 62:109–136, 2012.

[3] M. Kashiwara and T. Oshima. Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems. *Ann. Math.*, 106:145–200, 1977.

[4] N. M. Katz. *Rigid local systems.* Number 139 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1996.

[5] S.-J. Matsubara-Heo and T. Oshima. Generalized hypergeometric functions with several variables. *Indag. Math.*, 36(2):507–566, 2025.

[6] T. Oshima. *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations.* Number 28 in MSJ Memoirs. Mathematical Society of Japan, 2012.

[7] T. Oshima. Ordinary differential equations on the Riemann sphere and hypergeometric functions of several variables, in Japanese. In *Proceeding of 14-th Oka Symposium*, pages 53–97. Oka Mathematical Institute, `https://www.nara-wu.ac.jp/omi/oka_symposium/14.html`, 2015.

[8] T. Oshima. Reducibility of hypergeometric equations. In *Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, Trends in Mathematics*, pages 429–453. Birkhäuser, 2017.

[9] T. Oshima. Transformation of KZ type equations. In *Microlocal Analysis and Singular Perturbation Theory*, volume B61 of *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, pages 141–162. 2017.

[10] T. Oshima. Semilocal monodromy of rigid local systems. In *Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations*, volume 256 of *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, pages 189–199. Springer, 2018.

[11] T. Oshima. Confluence and versal unfolding of Pfaffian systems. *Josai Mathematical Monographs*, 12:117–151, 2020.

[12] T. Oshima. os_muldif.rr, a library of computer algebra `Risa/Asir`, 2008–2024, `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/`. 2024.

[13] T. Oshima. Integral transformations of hypergeometric functions with several variables. In *Symmetry in Geometry and Analysis, Vol 2, Festschrift in Honor of Toshiyuki Kobayashi*, Progress in Mathematics, Vol. 358, pages 551–586. Birkhäuser, 2025.

[14] N. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences, https://oeis.org/. 1964–.

城西大学 数理・データサイエンスセンター

Email address: `oshima@ms.u-tokyo.ac.jp`