Fuchs 型常微分方程式と Kac-Moody root 系[1]

大島 利雄（東京大学大学院 数理科学研究科）

1. 特殊関数と Fuchs 型常微分方程式

Gauss の超幾何級数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta_n)}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!},\tag{1.1}$$
$$(\alpha)_n:=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$

として与えられる超幾何関数やその特殊化で得られる古典直交多項式系や Bessel 関数は，最も基本的な特殊関数である．これらを含む多くの特殊関数は，Riemann 球面上の有限個の特異点を除いて（多価）解析関数であり，それぞれ様々な特徴付けを持っている（[MUI], [WW]）．

Gauss の超幾何級数は微分方程式

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+\bigl(\gamma-(\alpha+\beta+1)x\bigr)\frac{du}{dx}-\alpha\beta u=0\tag{1.2}$$

の（原点で正則で 1 の値を取る）解として特徴づけられ，この方程式は Fuchs 型常微分方程式の典型例となっている．

Fuchs 型常微分方程式は，その多価解析的な解の空間でも特徴付けられる．有限多価とは限らないが，解空間の次元は方程式の階数 n となるので，n 次元の解空間を考えるのが自然であり，特殊関数は，その解空間の中で適当に指定された元と考えればよい．

Riemann 球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ から有限個の点 $\{c_0,\dots,c_p\}$ を除いた集合を X とする．

1. X に含まれる任意の単連結開集合 U に対し，U 上の正則関数の空間 $\mathcal{O}(U)$ の n 個の元を基底とする n **次元の空間** $\mathcal{F}(U)$ **が定まっていて**, 次の両立条件を満たすとする（この対応 $U\mapsto\mathcal{F}(U)$ を $\mathcal{F}$ と書く）．

$$X\supset U\supset V:\text{単連結}\Longrightarrow \mathcal{F}(V)=\mathcal{F}(U)|_V\tag{1.3}$$

2. 特異点に近づいたとき，$\mathcal{F}(U)$ の各元は**特異点との距離の適当な逆べき程度でしか増大しない．**より正確には，1 次分数変換で特異点を 0 に移して考えると，$\mathcal{F}(U)$ の元 $u(x)$ は，適当な正数 C, N, ϵ を選ぶと

$$|u(x)|<C|x|^{-N}\quad(0<|x|<\epsilon)\tag{1.4}$$

を満たす．ただし $U\subset\{x\in\mathbb{C}\,;\,e^{-i\theta}x\notin\mathbb{R}_+\}$ となる $\theta\in\mathbb{R}$ があるとする．

3. 一般に n 階の常微分方程式の局所解は，（特異点以外で）$n-1$ 階までの微係数を与えると定まるので，解空間の基底に対する Wronskian は消えない．そこで X 上では $\mathcal{F}(U)$ **の基底に対する Wronskian が消えないと**仮定する．消える点があれば，それは孤立しているので特異点に含め，それを X から除けばよい．そのような特異点を**見かけの特異点**という．

以下，特に断らなければ，**簡単のため** $c_0=\infty$ **とする．**

[1] 2010 年表現論シンポジウム

上記の３つの条件を満たす（多価）正則関数の空間 $\mathcal{F}$ の全体と，以下の形の微分作用素 P とは，$Pu=0$ の解空間を考えることにより，１対１に対応する．

$$
P=\Bigl(\prod_{j=1}^{p}(x-c_j)^n\Bigr)\frac{d^n}{dx^n}+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(x)\Bigl(\prod_{j=1}^{p}(x-c_j)^k\Bigr)\frac{d^k}{dx^k},
\qquad a_k(x)\in\mathbb{C}[x],\ \deg a_k(x)\le(n-k)(p-1). \tag{1.5}
$$

この形の微分作用素（あるいはそれに（左から）有理関数を掛けて得られたもの）を **Fuchs 型常微分作用素**という．

2. 特性指数，モノドロミーとスペクトル型

前節の $\mathcal{F}(U)$ あるいは $Pu=0$ の解空間は，（特異点を含む）任意の点の近くで以下の様な基底 $u_1(x),\dots,u_n(x)$ をもつことが分かる．すなわち，その点を原点に一次分数変換で変換して書くと

$$u_\nu(x)\sim x^{\lambda_\nu}\log^{k_\nu}x.$$

ただし (λ_ν,k_ν) は互いに異なる $(\nu=1,\dots,n)$．このとき $\{\lambda_\nu\,;\,\nu=1,\dots,n\}$ をその点における**特性指数**という（なお，特性指数には，重複度が許される）．

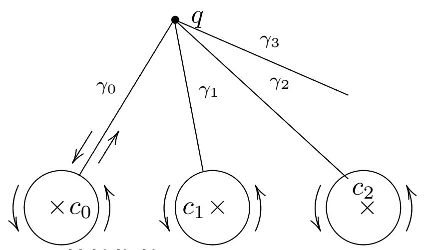
特異点でない点では，特性指数は $\{0,1,\dots,n-1\}$ である．

特異点での特性指数は，重要な局所的データとなっている．Gauss の超幾何微分方程式の特異点は ∞, 0, 1 で，そこでの特性指数は，それぞれ $\{\alpha,\beta\}$, $\{0,1-\gamma\}$, $\{0,\gamma-\alpha-\beta\}$ となり，これを集めたデータを以下の様に表して **Riemann scheme** という．

$$
\begin{Bmatrix}
x=\infty & x=0 & x=1 & \\
\alpha & 0 & 0 & ;\,x\\
\beta & 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta &
\end{Bmatrix} \tag{2.1}
$$

$\mathcal{F}$ の多価性は，基底 $\tilde u=(\tilde u_1,\dots,\tilde u_n)$ を決めて以下の様な解析接続の道を考えると，各特異点 c_j を反時計回りにまわる道 γ_j に対して定まる基底の一次変換を表す行列 M_j で記述できる．この M_j を**モノドロミー生成元**という．

(2.2)



$$
\begin{aligned}
\gamma_i\circ\gamma_j(\tilde u)&=\gamma_j(\tilde uM_i)\\
&=\gamma_j(\tilde u)M_i\\
&=\tilde uM_jM_i,\\
M_pM_{p-1}\cdots M_1M_0&=I_n.
\end{aligned}
$$

このとき c_j での特性指数を $\lambda_{j,1},\dots,\lambda_{j,n}$ とすると，M_j の固有値は $e^{2\pi i\lambda_{j,1}},\dots,e^{2\pi i\lambda_{j,n}}$ となる．特に $\lambda_{j,\nu}-\lambda_{j,\nu'}\notin\mathbb{Z}$ $(1\le\nu<\nu'\le n)$ ならば，M_j は半単純（対角化可能）である．

古くからその性質が研究されている Fuchs 型方程式の解となる特殊関数は，その局所モノドロミーの言葉で特徴付けが可能である．たとえば一般超幾何級数

$$
{}_nF_{n-1}(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_{n-1};x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_\nu\cdots(\alpha_n)_\nu}{(\beta_1)_\nu\cdots(\beta_{n-1})_\nu\nu!}x^\nu \tag{2.3}
$$

は，特異点が ∞, 0, 1 にある関数と方程式を定義するがその方程式は “1 に $n-1$ 次元の正則解がある” という特徴付けをもつ（これは 1 での特性指数 $0,1,\dots,n-2$ に

対応）．また Jordan-Pochhammer の方程式は, 特異点 c_j が $p+1$ 個ある p 階の方程式で, c_j（$j=1,\dots,p$) では特性指数 $0,\dots,p-2$ に対応して $p-1$ 次元の正則解があり，∞ においても，特性指数が $\lambda,\lambda+1,\dots,\lambda+p-1$ となる複素数 λ があって，それに対応して，x^λ を掛けると ∞ で正則解となる $p-1$ 次元の解があるということで特徴付けられる．これらの特異点では，モノドロミー生成元には固有値に重複があるが,（パラメーター一般のときは）半単純になっている．これを一般化し

定義 2.1. 特異点 c_j での**一般化特性指数**が $\{[\lambda_{j,1}]_{(m_{j,1})},\dots,[\lambda_{j,n_j}]_{(m_{j,n_j})}\}$ であるとは，特性指数が

$$\{\lambda_{j,\nu}+k\,;\,k=0,\dots,m_{j,\nu}-1,\ \nu=1,\dots,n_j\} \tag{2.4}$$

であって,

$$\lambda_{j,\nu}-\lambda_{j,\nu'}\notin\mathbb{Z}\text{ のときは，そこでのモノドロミー生成元が半単純} \tag{2.5}$$

と定義する（ただし，$n=m_{j,1}+\cdots+m_{j,n_j}$）．

$\lambda_{j,\nu}=\lambda_{j,1}\quad(\nu=2,\dots,n_j)$ のときは，特性指数が (2.4) であって，モノドロミー生成元の Jordan 標準形のブロックサイズが，n の分割 $m_{j,1}+\cdots+m_{j,n_j}$ の dual の分割になっていることと定義する．一般の場合については，[Os5] を参照してください．

各特異点での一般化特性指数を考えることにより，**一般化 Riemann scheme**

$$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}:=\left\{\begin{matrix} x=c_0 & c_1 & \cdots & c_p \\ [\lambda_{0,1}]_{(m_{0,1})} & [\lambda_{1,1}]_{(m_{1,1})} & \cdots & [\lambda_{p,1}]_{(m_{p,1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{p,n_p}]_{(m_{p,n_p})} \end{matrix}\ ;x\right\}. \tag{2.6}$$

が定義される．また $p+1$ 個の n の分割の組

$$n=m_{j,1}+\cdots+m_{j,n_j}\quad(j=0,\dots,p) \tag{2.7}$$

のことを，対応する $\mathcal{F}$ または作用素 P の**スペクトル型**という.

一般化超幾何および Jordan-Pochhammer の一般化 Riemann scheme は

$$\left\{\begin{matrix} x=0 & 1 & \infty \\ 1-\beta_1 & [0]_{(n-1)} & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1-\beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} \\ 0 & -\beta_n & \alpha_n \end{matrix}\ ;x\right\},\quad \sum_{\nu=1}^n\alpha_\nu=\sum_{\nu=1}^n\beta_\nu, \tag{2.8}$$

$$\left\{\begin{matrix} x=\infty & c_1 & \cdots & c_p \\ [\lambda_0']_{(p-1)} & [0]_{(p-1)} & \cdots & [0]_{(p-1)} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \end{matrix}\ ;x\right\},\quad (p-1)\lambda_0'+\sum_{j=0}^p\lambda_j=p-1 \tag{2.9}$$

となり，それぞれのスペクトル型は

$$1^n,n-11,1^n\quad\text{および}\quad\underbrace{p-11,p-11,\cdots,p-11}_{p+1}$$

となる（$n=2$, $p=2$ は Gauss の超幾何で，$11,11,11$）．

スペクトル型 $\mathbf{m} = \{m_{j,\nu}\}_{\substack{0\le j\le p\\ 1\le\nu\le n_j}}$ は，n の $p+1$ 個の分割であるが，$n = \operatorname{ord}\mathbf{m}$ とおき，以下の様に拡張しておく．

$$
\begin{aligned}
&m_{j,\nu} = n\delta_{\nu,1},\ n_j = 1 &&(j > p),\\
&m_{j,\nu} = 0 &&(\nu > n_j).
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

注意 2.2. $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ が Fuchs 型方程式の一般化 Riemann scheme (GRS) であれば以下の **Fuchs 条件** (FC) が成り立つ．

$$
|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| := \sum_{j=0}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}\lambda_{j,\nu} - \operatorname{ord} m + \operatorname{idx}\mathbf{m} = 0. \tag{2.11}
$$

ここで

$$
\operatorname{idx}(\mathbf{m},\mathbf{m}') := \lim_{p\to\infty}\Big(\sum_{j=0}^{p}\sum_{\nu=1}^{\infty} m_{j,\nu}m'_{j,\nu} - (p-1)\operatorname{ord}\mathbf{m}\cdot\operatorname{ord}\mathbf{m}'\Big), \tag{2.12}
$$

$$
\operatorname{idx}\mathbf{m} := \operatorname{idx}(\mathbf{m},\mathbf{m}). \tag{2.13}
$$

問題. スペクトル型 $\mathbf{m}$ によって Fuchs 型方程式を分類して解析せよ．

- (FC) の下で generic な $\lambda_{j,\nu}$ に対し，(GRS) $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ（既約な）$\mathcal{F}$ や Fuchs 型常微分作用素が存在するか？
  存在するなら，それをパラメトライズせよ．
  存在する $\mathbf{m}$ を **（irreducibly）realizable** と定義する．
- 上の分類に基づいて，Fuchs 型常微分方程式の基本問題，すなわち，解の表示（べき級数や積分による），接続問題，既約性，隣接関係式，多項間関係式，多項式解，解空間のモノドロミーなどを解析せよ．

3. Kac-Moody root 系

インデックスの集合

$$
I := \{0,\ (j,\nu)\,;\ j = 0,1,\ldots,\ \nu = 1,2,\ldots\}. \tag{3.1}
$$

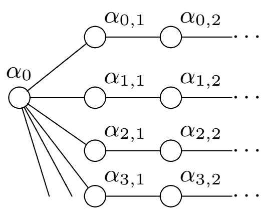
でパラメトライズされる基底 α_i $(i \in I)$ で張られる無限次元ベクトル空間を $\mathfrak{h}$ とおく．さらに以下の様に内積（正定値でない）と鏡映 s_i を定め，鏡映で生成される群を W_∞ として定義される Kac-Moody root 系 (Π, W_∞) を考える．α_i を単純ルート，W_∞ を Weyl 群という．

$$
\Pi = \{\alpha_i\,;\ i \in I\} = \{\alpha_0,\ \alpha_{j,\nu}\,;\ j = 0,1,2,\ldots,\ \nu = 1,2,\ldots\}. \tag{3.2}
$$

$$
I' := I \setminus \{0\}, \qquad \Pi' := \Pi \setminus \{\alpha_0\}, \tag{3.3}
$$

$$
Q := \sum_{\alpha\in\Pi}\mathbb{Z}\alpha\ \supset\ Q_+ := \sum_{\alpha\in\Pi}\mathbb{Z}_{\ge 0}\alpha. \tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\alpha|\alpha) = 2 \qquad (\alpha\in\Pi),\\
&(\alpha_0|\alpha_{j,\nu}) = -\delta_{\nu,1},\\
&(\alpha_{i,\mu}|\alpha_{j,\nu}) = \begin{cases} 0 & (i\ne j \quad\text{or}\quad |\mu-\nu|>1),\\ -1 & (i=j \quad\text{and}\quad |\mu-\nu|=1).\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$



$(\alpha|\alpha) \neq 0$ を満たす $\alpha \in \mathfrak{h}$ に関する鏡映 s_α は以下のように定義される．

$$s_\alpha : \mathfrak{h} \ni x \mapsto x - 2\frac{(x|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha \in \mathfrak{h}, \tag{3.6}$$

$$s_i = s_{\alpha_i} \quad \text{for} \quad i \in I. \tag{3.7}$$

ルートの集合 $\Delta = \Delta^{re} \cup \Delta^{im}$ と正ルートの集合 $\Delta_+ = \Delta \cap Q_+$ の定義は：

$$\Delta^{re} := W_\infty \Pi \qquad (\text{実ルート}), \quad \Delta_+^{re} := \Delta^{re} \cap Q_+, \tag{3.8}$$

$$\Delta_+^{im} := W_\infty B \qquad (\text{正の虚ルート}) \tag{3.9}$$

$$B := \{\beta \in Q_+ \,;\, \operatorname{supp}\beta \text{ is connected and } (\beta, \alpha) \leq 0 \quad (\forall \alpha \in \Pi)\},$$

$$\Delta^{im} := \Delta_+^{im} \cup \Delta_-^{im}, \quad \Delta_-^{im} := -\Delta_+^{im}. \tag{3.10}$$

$w \in W_\infty$, $\alpha \in Q$ に対し，以下のように定義する．

$$\Delta(w)_+ := \Delta_+^{re} \cap w^{-1}\Delta_-^{re}, \tag{3.11}$$

$$L(w) := \#\Delta(w)_+, \tag{3.12}$$

$$h(\alpha) := n_0 + \sum_{j\geq 0}\sum_{\nu\geq 1} n_{j,\nu} \quad \text{for} \quad \alpha = n_0\alpha_0 + \sum_{j\geq 0}\sum_{\nu\geq 1} n_{j,\nu}\alpha_{j,\nu} \in Q. \tag{3.13}$$

$w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k}$ （$i_\nu \in I$）を $w \in W_\infty$ の *minimal expression* とすると

$$\Delta(w)_+ = \bigl\{\alpha_{i_k}, s_{i_k}(\alpha_{i_{k-1}}), s_{i_k}s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_{k-2}}), \ldots, s_{i_k}\cdots s_{i_2}(\alpha_{i_1})\bigr\}. \tag{3.14}$$

$\alpha \in \Delta_+$ に対し，$w\alpha \in B \cup \{\alpha_0\}$ となる $w \in W_\infty$ で長さ最小のものが一意に決まるので，その w によって $\Delta(\alpha)_+ := \Delta(w)_+$ と定義する．

さらに $\mathfrak{h}$ の双対空間を若干拡張した空間とそれのいくつかの元を定義する：

$$\mathfrak{h}^\vee := \{\Lambda = \sum_{i\in I}\lambda_i\alpha_i \in \prod_{i\in I}\mathbb{C}\alpha_i \,;\, \lambda_{j,1} = 0 \quad (j \gg 1)\}, \tag{3.15}$$

$$\Lambda_0 := \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-\nu)\alpha_{j,\nu}, \tag{3.16}$$

$$\Lambda_{j,\nu} := \sum_{i=\nu+1}^{\infty}(i-\nu)\alpha_{j,i} \quad (j = 0, \ldots, p,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.17}$$

$$\Lambda^0 := 2\Lambda_0 - 2\Lambda_{0,0} = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(1+\nu)\alpha_{0,\nu} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-\nu)\alpha_{j,\nu}, \tag{3.18}$$

$$\Lambda_{j,k}^0 := \Lambda_{j,0} - \Lambda_{k,0} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu(\alpha_{k,\nu} - \alpha_{j,\nu}) \quad (0 \leq j < k). \tag{3.19}$$

このとき

$$(\Lambda^0|\alpha) = (\Lambda_{j,k}^0|\alpha) = 0 \quad (\forall \alpha \in \Pi), \tag{3.20}$$

$$(\Lambda_{j,\nu}|\alpha_{j',\nu'}) = \delta_{j,j'}\delta_{\nu,\nu'} \quad (j,\ j' = 0, 1, \ldots,\ \nu,\ \nu' = 1, 2, \ldots), \tag{3.21}$$

$$(\Lambda_{j,0}|\alpha_i) = \delta_{i,0} \qquad (\forall i \in \Pi). \tag{3.22}$$

関数の変換. 関数の変換 $u(x) \mapsto (x-c_j)^{\lambda_j}u(x)$ は，微分作用素環への変換

$$\mathrm{Ad}\big((x-c_j)^{\lambda_j}\big) : x \mapsto x,\ (x-c_j)\tfrac{d}{dx} \mapsto (x-c_j)\tfrac{d}{dx} - \lambda_j \tag{4.1}$$

（addition または gauge 変換とよぶ）を，fractional な微分（Euler 変換）

$$u(x) \mapsto \partial^{-\mu}u(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{c_j}^{x}(x-s)^{\mu-1}u(s)ds \tag{4.2}$$

は変換

$$\partial^{-\mu} : \tfrac{d}{dx} \mapsto \tfrac{d}{dx}, \quad x\tfrac{d}{dx} \mapsto x\tfrac{d}{dx} - \mu \tag{4.3}$$

を引き起こす.

Weyl 代数の元の変換. Weyl 代数の元 P と $Pu(x)=0$ の解 $u(x)$ に対して，上の変換 $u(x) \mapsto v(x)$ で得られた関数が満たす $v(x)$ が満たす方程式 $Qv(x)=0$ を考える（Q は Weyl 代数の元）．P は (2.6) の GRS をもつ (1.5) の Fuchs 型作用素とする.

addition $\mathrm{Ad}\big((x-c_j)^{\lambda_j}\big)$ が引き起こす変換のほか，$\ell = (\ell_0,\dots,\ell_p) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{p+1}$ に対し，Euler 変換を用いて以下の変換を定義する.

(4.4)

$$\partial_\ell P := \mathrm{Ad}\big(\prod_{j=1}^{p}(x-c_j)^{\lambda_{j,\ell_j}}\big)\prod_{j=1}^{p}(x-c_j)^{m_{j,\ell_j}-d_\ell(\mathbf{m})}\partial^{-m_{0,\ell_0}}\,\mathrm{Ad}(\partial^{1-\lambda_{0,\ell_0}-\cdots-\lambda_{p,\ell_p}})$$
$$\cdot\,\partial^{(p-1)n-m_{1,\ell_1}-\cdots-m_{p,\ell_p}}a_n^{-1}(x)\prod_{j=1}^{n}(x-c_j)^{n-m_{j,\ell_j}}\,\mathrm{Ad}\big(\prod_{j=1}^{p}(x-c_j)^{-\lambda_{j,\ell_j}}\big)P.$$

$d_\ell(\mathbf{m}) := m_{0,\ell_0} + \cdots + m_{p,\ell_p} - (p-1)\operatorname{ord}\mathbf{m}.$

$\partial_\ell P$ のスペクトル型を $\mathbf{m}' = \partial_\ell\mathbf{m}$, GRS を $\{\lambda'_{\mathbf{m}'}\} = \partial_\ell\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ とおくと，少なくとも $\lambda_{j,\nu}$ が（Fuchs 条件のもとで）generic なら

$$\begin{aligned} m'_{j,\nu} &= m_{j,\nu} - \delta_{\nu,\ell_j}d_\ell(\mathbf{m}),\\ \lambda'_{j,\nu} &= \lambda_{j,\nu} + (1-\delta_{\nu,\ell_j} - 2\delta_{j,0})\mu,\\ \mu &= \lambda_{0,\ell_0} + \cdots + \lambda_{p,\ell_p} - 1 \end{aligned} \tag{4.5}$$

となる．特に

$$\operatorname{ord}\partial_\ell\mathbf{m} = \operatorname{ord}\mathbf{m} - d_\ell(\mathbf{m}). \tag{4.6}$$

ここで，m_{j,ℓ_j} は **0 であってもよい**ものとする.

$\partial_\ell\mathbf{m}$ の階数 $\operatorname{ord}\partial_\ell\mathbf{m}$ を小さくするには，$d_\ell(\mathbf{m})$ を最大となるように ℓ を選べばよい．このような ℓ（のひとつ）を $\ell_{max}(\mathbf{m})$ とおくと

$$m_{j,\ell_{max}(\mathbf{m})_j} = \max\{m_{j,1},\dots,m_{j,n_j}\} \tag{4.7}$$

である．$\partial_{max}\mathbf{m} = \partial_{\ell_{max}(\mathbf{m})}(\mathbf{m})$ とおく．同様に $d_{max}(\mathbf{m})$, $\partial_{max}\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ や $\partial_{max}P$ が定義される.

$\mathbf{m}$ が irreducibly realizable ならば，以下のような非負整数 K が定まる（reduction）.

$$\begin{gathered} \operatorname{ord}\mathbf{m} > \operatorname{ord}\partial_{max}\mathbf{m} > \operatorname{ord}\partial_{max}^2\mathbf{m} > \cdots > \operatorname{ord}\partial_{max}^K\mathbf{m},\\ \operatorname{ord}^K\mathbf{m} = 1 \ \text{ or } \ d_{\max}(\partial_{max}^K\mathbf{m}) \le 0. \end{gathered} \tag{4.8}$$

$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ に対し，Kac-Moody ルート系との対応を以下の様に与える（一階システムの Schlesinger 型の場合に，最初に [CB] が与えた）.

$$\begin{aligned}
&\alpha_\ell := \alpha_0 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\ell_j-1}\alpha_{j,\nu} \in \Delta_+^{re},\\
(4.9)\qquad &\alpha_{\mathbf{m}} := \operatorname{ord}\mathbf{m}\cdot\alpha_0 + \sum_{j=0}^{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{i=\nu+1}^{\infty} m_{j,i}\alpha_{j,\nu} \in Q_+,\\
&\Lambda(\lambda) := -\Lambda_0 + \sum_{j=0}^{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{j,\nu}(\Lambda_{j,\nu-1}-\Lambda_{j,\nu}) \in \bar{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h}^\vee/\mathbb{C}\Lambda^0.
\end{aligned}$$

このとき以下の対応が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
\bigl\{P_{\mathbf{m}} : \text{Fuchs 型微分作用素 with } \{\lambda_{\mathbf{m}}\}\bigr\} & \rightarrow & \bigl\{(\Lambda(\lambda),\alpha_{\mathbf{m}})\,;\,\alpha_{\mathbf{m}}\in\overline{\Delta}_+\bigr\}\\
\downarrow \partial_\ell,\ \text{addition} & \circlearrowleft & \downarrow W_\infty\text{-action},\ +\tau\Lambda^0_{0,j}\\
\bigl\{P_{\mathbf{m}} : \text{Fuchs 型微分作用素 with } \{\lambda_{\mathbf{m}}\}\bigr\} & \rightarrow & \bigl\{(\Lambda(\lambda),\alpha_{\mathbf{m}})\,;\,\alpha_{\mathbf{m}}\in\overline{\Delta}_+\bigr\}.
\end{array}$$

$\mathcal{P}$	Kac-Moody root system
$\mathbf{m}$	$\alpha_{\mathbf{m}}$
$\mathbf{m}$: rigid	$\alpha\in\Delta_+^{re}$: $\operatorname{supp}\alpha\ni\alpha_0$
$\mathbf{m}$: monotone	$\alpha\in Q_+$: $(\alpha\|\beta)\le 0$ $(\forall\beta\in\Pi')$
$\mathbf{m}$: realizable	$k\alpha$: $k\in\mathbb{Z}_{>0}$, $\alpha\in\Delta_+$, $\operatorname{supp}\alpha\ni\alpha_0$
$\mathbf{m}$: irreducibly realizable	$\alpha\in\Delta_+$, $\operatorname{supp}\alpha\ni\alpha_0$ indivisible or $(\alpha\|\alpha)<0$
$\mathbf{m}$: basic and monotone	$\alpha\in Q_+$: $(\alpha\|\beta)\le 0$ $(\forall\beta\in\Pi)$ indivisible
$\mathbf{m}$: simply reducible and monotone	$\alpha\in\Delta_+ : (\alpha\|\alpha_{\mathbf{m}})=1$ $(\forall\alpha\in\Delta(\mathbf{m})_+)$ $(\alpha\|\beta)\le 0$ $(\forall\beta\in\Pi')$ $(\alpha\|\alpha_0)>0$, $\alpha\ne\alpha_0$, indivisible
$\operatorname{ord}\mathbf{m}$	n_0 : $\alpha=n_0\alpha_0+\sum_{i,\nu}n_{i,\nu}\alpha_{i,\nu}$
$\operatorname{idx}(\mathbf{m},\mathbf{m}')$	$(\alpha_{\mathbf{m}}\|\alpha_{\mathbf{m}'})$
∂_ℓ	s_{α_ℓ}
$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$	$(\Lambda(\lambda),\mathbf{m})$
$\|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}\|$	$(\Lambda(\lambda)+\frac{1}{2}\alpha_{\mathbf{m}}\|\alpha_{\mathbf{m}})$

定理 4.1 (存在定理 [Os5]). $\mathbf{m}$ が *irreducibly realizable* ならば，$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ という *GRS* をもつ (1.5) の形の普遍微分作用素 $P_{\mathbf{m}}(\lambda,g_1,\ldots,g_N)$ が存在し，*Fuchs* 条件のもと $\lambda_{j,\nu}$ が *generic*，あるいは既約で**局所非退化**，あるいは $\mathbf{m}$ が ***simply reducible*** ならば，$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ という *GRS* をもつ *Fuchs* 型微分作用素は，適当な $(g_1,\ldots,g_N)\in\mathbb{C}^N$ による普遍微分作用素（の有理関数倍）に限る.

$g_1,\ldots,g_N$ は**アクセサリ・パラメータ**で

$$N = 1-\tfrac{1}{2}\operatorname{idx}\mathbf{m}. \qquad (4.10)$$

$P_{\mathbf{m}}(\lambda,g)$ の係数は (x,λ,g) の多項式で，各 g_i に対しては 1 次であり，g_i はある $x^\nu\frac{d^j}{dx^j}$ の係数としてよい.

irreducibly realizable であるスペクトル型 $\mathbf{m}$ で，$\mathrm{idx}\,\mathbf{m}=2$ となるものを **rigid** という（すなわち，アクセサリ・パラメータがないもの）．

$\mathbf{m}$ が **indivisible** とは，$\{m_{j,\nu}\}$ の最大公約数が 1 となること．

basic（すなわち，indivisible で $d_{max}(\mathbf{m})\le 0$）かつ **monotone**（すなわち $m_{j,1}\ge m_{j,2}\ge m_{j,3}\ge\cdots$）となる $\mathbf{m}$ は，$\mathrm{idx}\,\mathbf{m}$ を決めると（同型を除いて）有限個しかない (cf. [Os3])．たとえば，$\mathrm{idx}\,\mathbf{m}=0$ となるものは affine root 系の $\tilde{D}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ に対応した 4 個（cf. [Ko]）で，$\mathrm{idx}\,\mathbf{m}=-2$ となるものは 13 個（[Os3]）．

irreducible realizable な $\mathbf{m}$ の reduction (4.8) において

$$\mathrm{ord}\,\partial_{max}^{i}\mathbf{m}=\mathrm{ord}\,\partial_{max}^{i-1}\mathbf{m}-1\quad(i=1,\dots,K) \tag{4.11}$$

となる場合，$\mathbf{m}$ を **simply reducible** と定義する．

simply reducible で non-rigid な $\mathbf{m}$ は，$\mathrm{idx}\,\mathbf{m}$ を決めると有限個しかない (cf. [Os5])．rigid で simply reducible となるものは，$21111, 222, 33$ と以下の Simpson のリスト（in [Si]）に限る (cf. [MWZ])．

order	type	name	partitions
n	H_n	hypergeometric family	$1^n, 1^n, n-11$
$2m$	EO_{2m}	even family	$1^{2m}, mm-11, mm$
$2m+1$	EO_{2m+1}	odd family	$1^{2m+1}, mm1, m+1m$
6	X_6	extra case	$111111, 222, 42$

rigid なスペクトル型の $\mathbf{m}$ は，$\mathrm{ord}\,\mathbf{m}$ が 6 以下のものは同型を除いて 49 個，10 では 306 個，20 では 10269 個というように沢山ある．

5. 様々な結果（[Os5]）

定義した方程式や関数の変換を用いて，最初の節で述べた常微分方程式の基本的問題が解決（or reduction）される．ここでは若干の例を挙げる．

普遍方程式

$$P_{\mathbf{m}}(\lambda)u=0 \tag{5.1}$$

を考察する．

定理 5.1 (既約性)**.** 簡単のため $\mathbf{m}$ は *irreducible realizable* と仮定すると，方程式 (5.1) が既約となるための必要十分条件は

$$(\Lambda(\lambda)|\alpha)\notin\mathbb{Z}\quad(\forall\alpha\in\Delta(\mathbf{m})_+). \tag{5.2}$$

ここで

$$\Delta(\mathbf{m})_+:=\Delta(\alpha_{\mathbf{m}})_+. \tag{5.3}$$

$c_0=0$, $c_1=1$，$m_{0,n_0}=1$ とする，$x=0$ での局所解 $u_{0,n_0}\sim x^{\lambda_{0,n_0}}$ を実軸に沿って 1 まで接続していったときの $x=1$ での局所解 $u_{1,n_1}\sim(1-x)^{\lambda_{1,n_1}}$ に対する**接続係数**を $c(\lambda_{0,n_0}\rightsquigarrow\lambda_{1,n_1})$ とおく．

定理 5.2 (接続問題)**.** $\ell_0\neq n_0$, $\ell_1\neq n_1$ を満たす $\ell\in\mathbb{Z}_{\ge1}^{p}$ に対し，$\{\lambda'_{\mathbf{m}'}\}=\partial_\ell\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ とおき，$P_{\mathbf{m}'}(\lambda')v=0$ に対する同様の接続係数を $c'(\lambda'_{0,n_0}\rightsquigarrow\lambda'_{1,n_1})$ とおくと

$$\frac{c'(\lambda'_{0,n_0}\rightsquigarrow\lambda'_{1,n_1})}{\Gamma(\lambda'_{0,n_0}-\lambda'_{0,1}+1)\Gamma(\lambda'_{1,1}-\lambda'_{1,n_1})}=\frac{c(\lambda_{0,n_0}\rightsquigarrow\lambda_{1,n_1})}{\Gamma(\lambda_{0,n_0}-\lambda_{0,1}+1)\Gamma(\lambda_{1,1}-\lambda_{1,n_1})}. \tag{5.4}$$

特に $\mathbf{m}$ が rigid で $m_{1,n_1} = m_{2,n_2} = 1$ ならば，この定理により接続係数 $c(\lambda_{1,n_1} \rightsquigarrow \lambda_{2,n_2})$ がガンマ関数の積の商の形で具体的に書ける（cf. (4.8)）．

(4.8) において $\{\lambda(k)_{\mathbf{m}(k)}\} = \partial_{max}^k\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ （$k = 0, \ldots, K$）とおき，$\lambda(k)_{j,\max} = \lambda(k)_{j,\ell_{max}(\mathbf{m}(k))_j}$ とおく．この記号の下で

定理 5.3 (局所解の積分表示とべき級数表示)**.** $\mathbf{m}$ は *rigid* で，$m_{1,n_1} = 1$, $c_0 = \infty$, $c_1 = 1$ と仮定する．$x = 0$ における局所解で特性指数 λ_{1,n_1} に対応するものを $u(x)$ とおく．$u(x)$ を $u(x) \sim x^{\lambda_{1,n_1}}$ となるよう規格化しておく．このとき

$$
\begin{aligned}
u(x) :=& \prod_{k=0}^{K-1} \frac{\Gamma\bigl(\lambda(k)_{1,n_1} - \lambda(k)_{1,max} + 1\bigr)}{\Gamma\bigl(\lambda(k)_{1,n_1} - \lambda(k)_{1,max} + \mu(k) + 1\bigr)\Gamma\bigl(-\mu(k)\bigr)} \\
& \int_0^{s_0} \cdots \int_0^{s_{K-1}} \prod_{k=0}^{K-1} (s_k - s_{k+1})^{-\mu(k)-1} \\
& \cdot \prod_{k=0}^{K-1} \biggl(\Bigl(\frac{s_k}{s_{k+1}} \Bigr)^{\lambda(k)_{1,max}} \prod_{j=2}^{p} \Bigl(\frac{1 - c_j^{-1} s_k}{1 - c_j^{-1} s_{k+1}} \Bigr)^{\lambda(k)_{j,max}} \biggr) \\
& \cdot s_K^{\lambda(K)_{1,n_1}} \prod_{j=2}^{p} \Bigl(1 - \frac{s_K}{c_j} \Bigr)^{\lambda(K)_{j,max}} ds_K \cdots ds_1 \Big|_{s_0 = x}
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{\lambda_{1,n_1}} \prod_{j=2}^{p} \Bigl(1 - \frac{x}{c_j} \Bigr)^{\lambda(0)_{j,max}} \cdot \sum_{\left(\nu_{j,k}\right)_{\substack{2 \le j \le p \\ 1 \le k \le K}} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{(p-1)K}} \\
& \prod_{i=0}^{K-1} \frac{\bigl(\lambda(i)_{1,n_1} - \lambda(i)_{1,max} + 1\bigr)_{\sum_{s=2}^{p} \sum_{t=i+1}^{K} \nu_{s,t}}}{\bigl(\lambda(i)_{1,n_1} - \lambda(i)_{1,max} + \mu(i) + 1\bigr)_{\sum_{s=2}^{p} \sum_{t=i+1}^{K} \nu_{s,t}}} \\
& \cdot \prod_{i=1}^{K} \prod_{s=2}^{p} \frac{\bigl(\lambda(i-1)_{s,max} - \lambda(i)_{s,max}\bigr)_{\nu_{s,i}}}{\nu_{s,i}!} \cdot \prod_{s=2}^{p} \Bigl(\frac{x}{c_s} \Bigr)^{\sum_{i=1}^{K} \nu_{s,i}}.
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

定理 5.4 (３項間関係式)**.** $\mathbf{m}$ は *rigid* で，$m_{j,n_j} = 1$ （$j = 0, 1, 2$），$c_0 = \infty$ とし

$$
\epsilon_{j,\nu} = \delta_{j,1}\delta_{\nu,n_1} - \delta_{j,2}\delta_{\nu,n_2},\ \epsilon'_{j,\nu} = \delta_{j,0}\delta_{\nu,n_0} - \delta_{j,2}\delta_{\nu,n_2} \tag{5.7}
$$

とおく（$j = 0, \ldots, p,\ \nu = 1, \ldots, n_j$）．$u_\lambda(x)$ を (5.1) の $x = c_1$ での局所解で，$\lambda_{j,\nu}$ が *generic* なとき

$$
u_\lambda(x) \sim (x - c_1)^{\lambda_{1,n_1}} \tag{5.8}
$$

となるものとする．このとき

$$
u_\lambda(x) = u_{\lambda+\epsilon'}(x) + (c_1 - c_2) \prod_{\nu=0}^{K-1} \frac{\lambda(\nu+1)_{1,n_1} - \lambda(\nu)_{1,\ell(\nu)_1} + 1}{\lambda(\nu)_{1,n_1} - \lambda(\nu)_{1,\ell(\nu)_1} + 1} \cdot u_{\lambda+\epsilon}(x). \tag{5.9}
$$

これらの結果は，コンピュータ・プログラムとして実現されている（cf. [Os2], [Os6]）．

以上は，Gauss の超幾何微分方程式 (1.2) の既約条件

$$
\alpha,\ \beta,\ \alpha - \gamma,\ \beta - \gamma \notin \mathbb{Z}
$$

Gauss の和公式

$$
F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}
$$

積分表示

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^x x^{-\gamma+1}(x-s)^{-\alpha+\gamma-1}s^{\alpha-1}(1-s)^{-\beta}ds$$

3 項間関係式

$$F(\alpha+1,\beta,\gamma;x)-F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\beta x}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;x)$$

の一般化になっている．

References

[CB] W. Crawley-Boevey, *On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspaces and sum zero*, Duke Math. J. **118** (2003), 339–352.

[DG] M. Dettweiler and S. Reiter, *An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems*, J. Symbolic Comput. **30** (2000), 761–798.

[DG2] ———, *Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems*. J. Algebra **318** (2007), 1–24.

[Ha] Y. Haraoka, *Integral representations of solutions of differential equations free from accessory parameters*, Adv. Math. **169** (2002), 187–240.

[Ha2] 原岡喜重,「超幾何関数」, すうがくの風景 7, 朝倉書店, 2002.

[HF] Y. Haraoka and G. M. Filipuk, *Middle convolution and deformation for Fuchsian systems*, J. Lond. Math. Soc. **76** (2007), 438–450.

[Kc] V. C. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Third Edition, *Cambridge Univ. Press* 1990.

[Ka] N. M. Katz, *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies **139**, Princeton University Press, 1995.

[Ko] V. P. Kostov, The Deligne-Simpson problem for zero index of rigidity, Perspective in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, *World Scientific* 2001, 1–35.

[MWZ] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinski, *Multiple flag variety of finite type*, Adv. in Math. **141** (1999), 97–118.

[MUI] 森口繁一，宇田川銈久，一松信，数学公式 III –特殊函数– ，岩波全書，岩波書店，1960.

[Os1] T. Oshima, *Heckman-Opdam hypergeometric functions and their specializations*, Harmonische Analysis und Darstellungstheorie Topologischer Gruppen, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Report **49** (2007), 38–40.

[Os2] ———, `Okubo`, a computer program for Katz/Yokoyama/Oshima algorithms on MS-Windows, `ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/okubo/okubo.zip`, 2007-8.

[Os3] ———, *Classification of Fuchsian systems and their connection problem*, arXiv:0811.2916, preprint, 2008, 29pp.

[Os4] ———, *Katz's middle convolution and Yokoyama's extending operation*, arXiv:0812.1135, 2008, 18pp.

[Os5] ———, *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations*, preprint, 176pp, `http://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima`.

[Os6] ———, `muldif.rr`, a library of the calculation of differential operators for computer algebra `Risa/Asir`, `ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif/`, 2009-2010.

[Si] C. T. Simpson, *Products of Matrices*, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings **12**, AMS, Providence RI (1991), 157–185.

[Si2] ———, *Katz's middle convolution algorithm*, 53 pp, arXiv:math/0610526.

[WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis, Fourth Edition*, 1927, Cambridge University Press.

[Yo] T. Yokoyama, *Construction of systems of differential equations of Okubo normal form with rigid monodromy*, Math. Nachr. **279** (2006), 327–348.