Riemann 球面上の線型常微分方程式

大島利雄（東京大学大学院数理科学研究科）

1 Introduction

有理関数や指数関数などの初等関数以外の関数を超越関数というが，その中でも応用の多い重要な関数は**特殊関数**と呼ばれ，古くから研究されてきた．古典的な特殊関数の中でも最も重要なものとして **Gauss の超幾何関数**が挙げられる．Bessel 関数，Whittaker 関数，Legendre 多項式といったその他のよく知られた特殊関数たち[*1]はこの Gauss の超幾何関数のある種の極限操作や特殊化として得ることができ，岩波全書の公式集 III「特殊関数」[MUI] の 3 分の 2 以上はこれで占められている．この Gauss の超幾何関数は，ある**代数的線型常微分方程式**[*2]を満たしていることを使って，様々な性質が求められて来た．このように，代数的線型常微分方程式で特徴付けられる「特殊関数」の性質や具体的公式を得るための，現在発展中の新しい理論について解説したい．

Gauss の超幾何関数は Euler によって導入された以下のような**超幾何級数**と呼ばれる巾級数で表される．

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}x^n=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\cdots.$$

ここで $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$[*3]，$(\alpha)_n:=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)=\dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$．さらにこの巾級数の収束条件は $|x|<1$ であり，**Gauss の超幾何微分方程式**とよばれる次の代数的線型微分方程式を満たすことが確かめられる．

$$x(1-x)u''+\big(\gamma-(\alpha+\beta+1)x\big)u'-\alpha\beta u=0.$$

簡単のために

$$P=x(1-x)\partial^2+\big(\gamma-(\alpha+\beta+1)x\big)\partial-\alpha\beta \qquad (\partial:=\tfrac{d}{dx})$$

と置いて，Gauss の超幾何関数の満たす微分方程式を

$$(\mathrm{GE})\colon Pu=0$$

[*1] Whittaker-Watson [WW] 等の文献がある

[*2] 代数的とは，多項式または有理関数係数の常微分方程式の意味で使った

[*3] これらの値によっては定義されない場合があることに注意．たとえば γ が負の整数の時

と書くことにしよう．作用素 $\vartheta := x\,\partial$ の固有値 λ の固有関数が x^λ となることに注意し，

$$\begin{aligned} xP &= x^2\partial^2 + \gamma x\partial - x(x^2\partial^2 + (\alpha+\beta+1)x\partial + \alpha\beta) \\ &= \vartheta(\vartheta-1) + \gamma\vartheta - x(\vartheta(\vartheta-1) + (\alpha+\beta+1)\vartheta + \alpha\beta) \\ &= \vartheta(\vartheta+\gamma-1) - x(\vartheta+\alpha)(\vartheta+\beta). \\ \therefore Pu = 0 &\iff \vartheta(\vartheta+\gamma-1)u = x(\vartheta+\alpha)(\vartheta+\beta)u. \end{aligned}$$

$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を両辺に代入して x^n の係数を比べてみると，

$$c_n \times n(n+\gamma-1) = c_{n-1} \times (n-1+\alpha)(n-1+\beta)$$

を得る．従って

$$c_n = c_{n-1}\frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{(\gamma+n-1)n} = \cdots = c_0\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} \qquad (c_0 = u(0))$$

となって係数が決まる．よって Gauss の超幾何関数が $Pu = 0$ を満たす事が確かめられた．

この超幾何級数の $x = 1$ での値は Gauss によって，

$$C_{\alpha,\beta,\gamma} := F(\alpha,\beta,\gamma;1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

となることが示された．$\mathrm{Re}\,\alpha + \mathrm{Re}\,\beta < \mathrm{Re}\,\gamma$ ならば[*4] 左辺の級数は絶対収束することに注意しよう．これは **Gauss の和公式** (Gauss summation formula) と呼ばれ，この公式から特異点の間の接続公式が得られ，Gauss の超幾何関数も大域的性質が分かる．この最も重要な公式の証明を 2 通り紹介しよう．

1 つ目（Gauss による証明）

式 $\frac{C_{\alpha,\beta,\gamma+1}}{C_{\alpha,\beta,\gamma}} = \frac{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$ と $\lim_{n\to\infty} C_{\alpha,\beta,\gamma+n} = 1$ から導かれる．

2 つ目　適当な条件下[*5]で $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ は以下のような積分表示を持つ．

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}\,dt$$

この右辺で $x = 1$ とすれば $\mathrm{Re}\,(\gamma-\beta-\alpha) > 0$ の時，積分は収束してベータ関数となり，(右辺) $= \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \times \dfrac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}$ を得る．

ちなみにこの積分表示は

$$\begin{aligned} (1-tx)^{-\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}(-t)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-n+1)}{n!}(-t)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}t^n x^n \end{aligned}$$

[*4] $\mathrm{Re}\,\alpha$ は複素数 α の実部．虚部は $\mathrm{Im}\,\alpha$ と書く．

[*5] 例えば $0 < \mathrm{Re}\,\beta < \mathrm{Re}\,\gamma,\ 0 < \arg(x-1) < 2\pi$

を積分に代入して x^n の係数を見ると，各項の積分はベータ関数になり，

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\frac{(\alpha)_n}{n!}\frac{\Gamma(\beta-1+n)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+n-1)}=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}$$

となって積分が $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ に等しいことが分かる．

次は特異点について考えてみる．微分方程式 (GE) の特異点[*6]は $\{0,1,\infty\}$ である．特異点 $x=0$ の近傍で，高々極程度にしか解の値の絶対値は増大せず[*7]，さらに解は $x=0$ で正則で $\phi_1(0)=\phi_2(0)=1$ を満たす正則関数 $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ を用いて

$$u(x)=C_1x^{\lambda_{0,1}}\phi_1(x)+C_2x^{\lambda_{0,2}}\phi_2(x)\qquad(\lambda_{0,1}=0,\ \lambda_{0,2}=1-\gamma,\ C_1,C_2\in\mathbb{C})$$

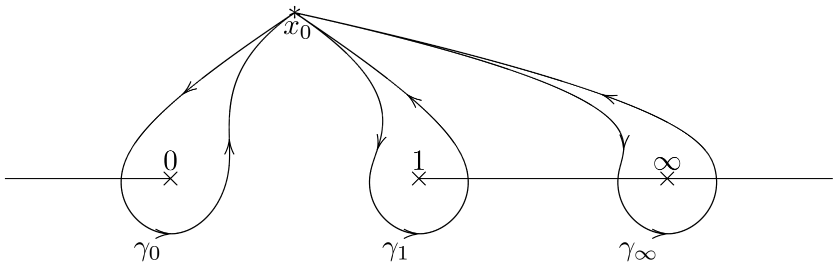
の形となる．すなわち $x=0$ での**特性指数** (characteristic exponent) は 0 と $1-\gamma$ である．ここで $\phi_1(x)=F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ であることに注意しておこう．平行移動あるいは $x\mapsto\frac{1}{x}$ の座標変換によって，特異点を原点に移して同様の考察ができ，$x=1$，$x=\infty$ での特性指数はそれぞれ $\{0,\gamma-\alpha-\beta\}$，$\{\alpha,\beta\}$ となることが分かる．各特異点での特性指数を

$$\left\{\begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{array}\right\}$$

のような表にすることが出来る．このような表を **Riemann 図式** (Riemann scheme) と呼ぶ．

Riemann は，この図式で表された特異性が Gauss の超幾何微分方程式を，すなわち Gauss の超幾何関数を一意的に定めていることを示した[*8]．

次に**モノドロミー** (monodromy) について考える．$(\mathbb{C}\cup\{\infty\})\backslash\{0,1,\infty\}$ の基本群は，起点 x_0 を決め，そこから以下の図のような各特異点を回る閉曲線 $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_\infty$ で生成される．



(u_1,u_2) を x_0 の近傍での (GE) の二つの線型独立な解とすると，それぞれの閉曲線 γ_j ($j=0,1,\infty$) に沿って解析接続したものも再び x_0 の近傍での解となるから，それを $\gamma_j(u_1,u_2)$ と書くことにすると，ある正則行列 $M_j\in GL(2,\mathbb{C})$ があって，

$$\gamma_j(u_1,u_2)=(u_1,u_2)M_j$$

と書けることが分かる．これら M_j ($j=0,1,\infty$) を $x=j$ での (局所) モノドロミー行列と呼ぶ．

[*6] 最高階の係数を 1 と正規化した時の係数の特異点．無限遠点は $x\mapsto\frac{1}{x}$ と変換して原点でみればよい

[*7] この条件は，特異点が確定特異点，ということに対応している

[*8] rigid であることに対応

今 u を (GE) の解とするとき，$x^{\mu_1}(1-x)^{\mu_2}u$ は Riemann 図式

$$\left\{\begin{matrix} x=0 & 1 & \infty \\ \mu_1 & \mu_2 & \alpha-\mu_1-\mu_2 \\ \mu_1+1-\gamma & \mu_2+\gamma-\alpha-\beta & \beta-\mu_1-\mu_1 \end{matrix}\right\}$$

を持つ微分方程式の解となる．よって一般的な Riemann 図式

$$\left\{\begin{matrix} x=0 & 1 & \infty \\ \lambda_{01} & \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{02} & \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{matrix}\right\}$$

を考えればよいが，このとき λ_{kl} には線型関係式 (**Fuchs の関係式**) $\sum \lambda_{kl}=1$ が成り立つ．

この一般的な Riemann 図式に対し，u_{02} を $x=0$ の周りで特性指数 λ_{02} を持つ解とし，u_{12} を $x=1$ の周りで特性指数 λ_{12} を持つ解としよう．これらは線型独立であるとしてよい（そうでなければ u_{01} あるいは u_{22} を代わりにとればよい）．このときモノドロミー行列はある定数 a,b により

$$M_0=\begin{pmatrix} e(\lambda_{02}) & a \\ 0 & e(\lambda_{01}) \end{pmatrix},\quad M_1=\begin{pmatrix} e(\lambda_{11}) & 0 \\ b & e(\lambda_{12}) \end{pmatrix}$$

となる[*9]．ここで

$$e(\lambda):=e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda}.$$

一方で $M_\infty=(M_1M_0)^{-1}$ から $\mathrm{Tr}(M_1M_0)=\mathrm{Tr}(M_\infty^{-1})$ となるので[*10]

$$e(\lambda_{02})e(\lambda_{11})+e(\lambda_{01})e(\lambda_{12})+ab=e(-\lambda_{21})e(-\lambda_{22})$$

が得られる．このとき $ab\neq 0$[*11]ならば，基底を取り替えて $a=1$ としてよいので，上の式より b も求まり，定数 a,b が決まる．この様に上の Riemann 図式をもつ微分方程式の大域モノドロミーは特異点での局所モノドロミーを決める特性指数から決定されてしまう．このようなとき大域モノドロミー（あるいは方程式）は **rigid** であるといわれる．

一般の有理関数係数の線型常微分方程式に対して，各特異点での局所的性質（具体的には Riemann 図式）で方程式を分類し，Gauss の超幾何関数におけるような解の大域的性質を調べることを考える．

2 Fuchs 型微分作用素と Kac-Moody root 系，Deligne-Simpson-Katz の問題，接続問題

まず Fuchs 型の場合を扱う．Riemann 球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ から有限個の点 $\{c_0,\dots,c_p\}$ を除いた集合を X とする．

[*9] $u_{12}=u_{01}+Cu_{02}$ とすれば，$\gamma_0u_{12}=e(\lambda_{01})u_{01}+Ce(\lambda_{02})u_{02}=e(\lambda_{01})u_{12}+C\big(e(\lambda_{02})-e(\lambda_{01})\big)u_{02}$ となることからわかる．M_1 も同様．なお $\lambda_{k\ell}$ は一般とする

[*10] $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_\infty$ をこの順でつなげた道は基本群の単位元を定義するので，$M_\infty M_1M_0$ は単位行列になる

[*11] モノドロミーが既約ならば満たされる

1. X に含まれる任意の単連結開集合 U に対し，U 上の正則関数の空間 $\mathcal{O}(U)$ の n 個の元を基底とする **n 次元の空間 $\mathcal{F}(U)$ が定まっていて**, 次の両立条件を満たすとする（この対応 $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ を $\mathcal{F}$ と書く）.

$$X \supset U \supset V : \text{単連結} \Longrightarrow \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(U)|_V \tag{1}$$

2. 特異点に近づいたとき，$\mathcal{F}(U)$ の各元は**特異点との距離の適当な逆べき程度でしか増大しない．**より正確には，１次分数変換で特異点を 0 に移して考えると，$\mathcal{F}(U)$ の元 $u(x)$ は，適当な正数 C, N, ϵ を選ぶと

$$|u(x)| < C|x|^{-N} \quad (0 < |x| < \epsilon) \tag{2}$$

を満たす．ただし $U \subset \{x \in \mathbb{C}\,;\, e^{-i\theta}x \notin \mathbb{R}_+\}$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ があるとする．

3. 一般に n 階の常微分方程式の局所解は,（特異点以外で）$n-1$ 階までの微係数を与えると定まるので，解空間の基底に対する Wronskian は消えない．そこで X 上では **$\mathcal{F}(U)$ の基底に対する Wronskian が消えないと**仮定する．消える点があれば，それは孤立しているので特異点に含め，それを X から除けばよい．そのような特異点を**見かけの特異点**という．

以下，特に断らなければ，**簡単のため $c_0 = \infty$ とする．**

上記の３つの条件を満たす（多価）正則関数の空間 $\mathcal{F}$ の全体と，以下の形の微分作用素 P とは，$Pu = 0$ の解空間を考えることにより，１対１に対応する．

$$\begin{aligned} &P = \Bigl(\prod_{j=1}^{p}(x-c_j)^n\Bigr)\frac{d^n}{dx^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\Bigl(\prod_{j=1}^{p}(x-c_j)^k\Bigr)\frac{d^k}{dx^k}, \\ &a_k(x) \in \mathbb{C}[x],\ \deg a_k(x) \le (n-k)(p-1). \end{aligned} \tag{3}$$

ここで多項式の次数を deg と書くが，特に $\deg 0 = 0$ と約束しておく．この形の微分作用素（あるいはそれに（左から）有理関数を掛けて得られたもの）を **Fuchs 型常微分作用素**という．

2.1 特性指数，モノドロミーとスペクトル型

前節の $\mathcal{F}(U)$ あるいは $Pu = 0$ の解空間は,（特異点を含む）任意の点の近くで以下の様な基底 $u_1(x)$,...,$u_n(x)$ をもつことが分かる．すなわち，その点を原点に一次分数変換で変換して書くと

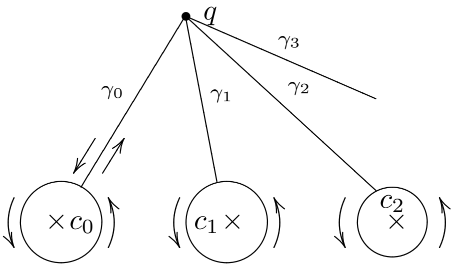
$$u_\nu(x) \sim x^{\lambda_\nu} \log^{k_\nu} x.$$

ただし (λ_ν, k_ν) は互いに異なる $(\nu = 1, \ldots, n)$. このとき $\{\lambda_\nu\,;\, \nu = 1, \ldots, n\}$ をその点における**特性指数**という（なお，特性指数には，重複度が許される）．

特異点でない点では，特性指数は $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ である．

$\mathcal{F}$ の多価性は，基底 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n)$ を決めて以下の様な解析接続の道を考えると，各特異点 c_j を反時計回りにまわる道 γ_j に対して定まる基底の一次変換を表す行列 M_j で記述できる．この

M_j を**モノドロミー生成元**という．



$$\begin{aligned}\gamma_i \circ \gamma_j(\tilde{u}) &= \gamma_j(\tilde{u}M_i)\\ &= \gamma_j(\tilde{u})M_i\\ &= \tilde{u}M_jM_i,\\ M_pM_{p-1}\cdots M_1M_0 &= I_n.\end{aligned} \tag{4}$$

このとき c_j での特性指数を $\lambda_{j,1},\dots,\lambda_{j,n}$ とすると，M_j の固有値は $e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_{j,1}},\dots,\ e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_{j,n}}$ となる．特に $\lambda_{j,\nu}-\lambda_{j,\nu'}\notin\mathbb{Z}\ (1\le\nu<\nu'\le n)$ ならば，M_j は半単純（対角化可能）である．

古くからその性質が研究されている Fuchs 型方程式の解となる特殊関数は，その局所モノドロミーの言葉で特徴付けが可能である．たとえば一般超幾何級数

$${}_nF_{n-1}(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_{n-1};x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_\nu\cdots(\alpha_n)_\nu}{(\beta_1)_\nu\cdots(\beta_{n-1})_\nu\nu!}x^\nu \tag{5}$$

は，特異点が ∞, 0, 1 にある関数と方程式を定義するがその方程式は "1 に $n-1$ 次元の正則解がある" という特徴付けをもつ（これは 1 での特性指数 $0,1,\dots,n-2$ に対応）．また Jordan-Pochhammer の方程式は, 特異点 c_j が $p+1$ 個ある p 階の方程式で, c_j $(j=1,\dots,p)$ では特性指数 $0,\dots,p-2$ に対応して $p-1$ 次元の正則解があり, ∞ においても, 特性指数が $\lambda,\lambda+1,\dots,\lambda+p-1$ となる複素数 λ があって，それに対応して，x^λ を掛けると ∞ で正則解となる $p-1$ 次元の解があるということで特徴付けられる．これらの特異点では，モノドロミー生成元には固有値に重複があるが,（パラメーター一般のときは）半単純になっている．これを一般化し

定義 1. 特異点 c_j での**一般化特性指数**が $\{[\lambda_{j,1}]_{(m_{j,1})},\dots,[\lambda_{j,n_j}]_{(m_{j,n_j})}\}$ であるとは，$n=m_{j,1}+\cdots+m_{j,n_j}$ であり，特性指数が

$$\{\lambda_{j,\nu}+k\,;\,k=0,\dots,m_{j,\nu}-1,\ \nu=1,\dots,n_j\} \tag{6}$$

であって，$\lambda_{j,\nu}-\lambda_{j,\nu'}\notin\mathbb{Z}\ \ (1\le\nu<\nu'\le n_j)$ のときは

$$\text{そこでのモノドロミー生成元が半単純} \tag{7}$$

と定義する（ただし，$n=m_{j,1}+\cdots+m_{j,n_j}$）．ここで

$$[\lambda]_{(k)}:=\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda+1\\ \vdots\\ \lambda+k-1\end{pmatrix} \tag{8}$$

と解釈する．

$\lambda_{j,\nu}-\lambda_{j,\nu'}\notin\mathbb{Z}\setminus\{0\}\ (1\le\nu\le\nu'\le n_j)$ かつ，$m_{j,1}\ge m_{j,2}\ge\cdots\ge m_{j,n_j}$ のときは，特性指数が (6) であって，c_j での局所モノドロミー生成元 M_j が

$$\operatorname{rank}(M_j-e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_{j,1}})\cdots(M_j-e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_{j,k}})=n-m_{j,1}-\cdots-m_{j,k} \tag{9}$$

を満たすこと，と定義する．一般の場合については，[Os4] を参照してください．

各特異点での一般化特性指数を考えることにより，**一般化 Riemann scheme**

$$\{\lambda_{\mathbf{m}}\} := \left\{\begin{matrix} x = c_0 & c_1 & \cdots & c_p \\ [\lambda_{0,1}]_{(m_{0,1})} & [\lambda_{1,1}]_{(m_{1,1})} & \cdots & [\lambda_{p,1}]_{(m_{p,1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ;\, x \\ [\lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{p,n_p}]_{(m_{p,n_p})} \end{matrix}\right\} \tag{10}$$

が定義される．また $p+1$ 個の n の分割の組

$$n = m_{j,1} + \cdots + m_{j,n_j} \quad (j = 0, \ldots, p) \tag{11}$$

のことを，対応する $\mathcal{F}$ または作用素 P の**スペクトル型**という．

一般化超幾何および Jordan-Pochhammer の一般化 Riemann scheme は

$$\left\{\begin{matrix} x = 0 & 1 & \infty \\ 1-\beta_1 & [0]_{(n-1)} & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & ;\, x \\ 1-\beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} \\ 0 & -\beta_n & \alpha_n \end{matrix}\right\}, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu, \tag{12}$$

$$\left\{\begin{matrix} x = \infty & c_1 & \cdots & c_p \\ [\lambda'_0]_{(p-1)} & [0]_{(p-1)} & \cdots & [0]_{(p-1)} & ;\, x \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \end{matrix}\right\}, \quad (p-1)\lambda'_0 + \sum_{j=0}^{p} \lambda_j = p-1 \tag{13}$$

となり，それぞれのスペクトル型は

$$1^n, n-11, 1^n \quad \text{および} \quad \underbrace{p-11, p-11, \cdots, p-11}_{p+1}$$

となる（$n=2$, $p=2$ は Gauss の超幾何で，$11, 11, 11$）．

スペクトル型 $\mathbf{m} = \bigl(m_{j,\nu}\bigr)_{\substack{0 \le j \le p \\ 1 \le \nu \le n_j}}$ は，n の $p+1$ 個の分割であるが，$n = \operatorname{ord}\mathbf{m}$ とおき，以下の様に拡張しておく．

$$\begin{aligned} &m_{j,\nu} = n\delta_{\nu,1},\ n_j = 1 && (j > p), \\ &m_{j,\nu} = 0 && (\nu > n_j). \end{aligned} \tag{14}$$

注意 2. $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ が Fuchs 型方程式の一般化 Riemann scheme (GRS) であれば以下の **Fuchs 条件** (FC) が成り立つ．

$$|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| := \sum_{j=0}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}\lambda_{j,\nu} - \operatorname{ord}\mathbf{m} + \operatorname{idx}\mathbf{m} = 0. \tag{15}$$

ここで

$$\operatorname{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}') := \lim_{p\to\infty} \Bigl(\sum_{j=0}^{p} \sum_{\nu=1}^{\infty} m_{j,\nu} m'_{j,\nu} - (p-1)\operatorname{ord}\mathbf{m} \cdot \operatorname{ord}\mathbf{m}'\Bigr), \tag{16}$$

$$\operatorname{idx}\mathbf{m} := \operatorname{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}). \tag{17}$$

問題. スペクトル型 $\mathbf{m}$ によって Fuchs 型方程式を分類して解析せよ．

- (FC) の下で generic な $\lambda_{j,\nu}$ に対し，（GRS) $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ（既約な）$\mathcal{F}$ や Fuchs 型常微分作用素が存在するか？
  存在するなら，それをパラメトライズせよ．
  存在する $\mathbf{m}$ を **（irreducibly）realizable** と定義する．
- 上の分類に基づいて，Fuchs 型常微分方程式の基本問題，すなわち，解の表示（べき級数や積分による），接続問題，既約性，隣接関係式，多項間関係式，多項式解，解空間のモノドロミーなどを解析せよ．

2.2 Kac-Moody root 系

インデックスの集合

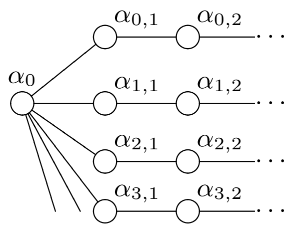
$$I := \{0,\,(j,\nu)\,;\,j=0,1,\ldots,\ \nu=1,2,\ldots\}. \tag{18}$$

でパラメトライズされる基底 α_i $(i\in I)$ で張られる無限次元ベクトル空間を $\mathfrak{h}$ とおく．さらに以下の様に内積（正定値でない）と鏡映 s_i を定め，鏡映で生成される群を W_∞ として定義される Kac-Moody root 系 (Π, W_∞) を考える．α_i を単純ルート，W_∞ を Weyl 群という．

$$\Pi := \{\alpha_i\,;\,i\in I\} = \{\alpha_0,\ \alpha_{j,\nu}\,;\,j=0,1,2,\ldots,\ \nu=1,2,\ldots\}.$$

$$\begin{aligned}
I' &:= I\setminus\{0\}, \qquad \Pi' := \Pi\setminus\{\alpha_0\},\\
Q &:= \sum_{\alpha\in\Pi}\mathbb{Z}\alpha \ \supset\ Q_+ := \sum_{\alpha\in\Pi}\mathbb{Z}_{\ge 0}\alpha.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha|\alpha) &= 2 \qquad (\alpha\in\Pi),\\
(\alpha_0|\alpha_{j,\nu}) &= -\delta_{\nu,1},\\
(\alpha_{i,\mu}|\alpha_{j,\nu}) &= \begin{cases} 0 & (i\ne j \quad \text{or} \quad |\mu-\nu|>1),\\ -1 & (i=j \quad \text{and} \quad |\mu-\nu|=1).\end{cases}
\end{aligned}$$



$(\alpha|\alpha)\ne 0$ を満たす $\alpha\in\mathfrak{h}$ に関する鏡映 s_α は以下のように定義される．

$$\begin{aligned}
s_\alpha\ &:\ \mathfrak{h}\ni x\mapsto x-2\frac{(x|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha\in\mathfrak{h},\\
s_i &= s_{\alpha_i} \quad \text{for} \quad i\in I.
\end{aligned}$$

ルートの集合 $\Delta=\Delta^{re}\cup\Delta^{im}$ と正ルートの集合 $\Delta_+=\Delta\cap Q_+$ の定義は：

$$\begin{aligned}
\Delta^{re} &:= W_\infty\Pi \qquad (\text{実ルート}), \quad \Delta_+^{re} := \Delta^{re}\cap Q_+,\\
\Delta_+^{im} &:= W_\infty B \qquad (\text{正の虚ルート})\\
B &:= \{\beta\in Q_+\,;\,\operatorname{supp}\beta \text{ is connected and } (\beta,\alpha)\le 0 \quad (\forall\alpha\in\Pi)\},\\
\Delta^{im} &:= \Delta_+^{im}\cup\Delta_-^{im}, \quad \Delta_-^{im} := -\Delta_+^{im}.
\end{aligned}$$

$w \in W_\infty$, $\alpha \in Q$ に対し，以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
\Delta(w)_+ &:= \Delta_+^{re} \cap w^{-1}\Delta_-^{re}, \\
L(w) &:= \#\Delta(w)_+, \\
h(\alpha) &:= n_0 + \sum_{j\ge 0}\sum_{\nu\ge 1} n_{j,\nu} \quad \text{for} \quad \alpha = n_0\alpha_0 + \sum_{j\ge 0}\sum_{\nu\ge 1} n_{j,\nu}\alpha_{j,\nu} \in Q.
\end{aligned}$$

$w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k}$ （$i_\nu \in I$）を $w \in W_\infty$ の *minimal expression* とすると

$$\Delta(w)_+ = \bigl\{\alpha_{i_k}, s_{i_k}(\alpha_{i_{k-1}}), s_{i_k}s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_{k-2}}), \ldots, s_{i_k}\cdots s_{i_2}(\alpha_{i_1})\bigr\}. \tag{19}$$

$\alpha \in \Delta_+$ に対し，$w\alpha \in B \cup \{\alpha_0\}$ となる $w \in W_\infty$ で長さ最小のものが一意に決まるので（cf. [Os4]），その w によって $\Delta(\alpha)_+ := \Delta(w)_+$ と定義する．

さらに $\mathfrak{h}$ の双対空間を若干拡張した空間とそれのいくつかの元を定義する：

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}^\vee &:= \{\Lambda = \sum_{i\in I}\lambda_i\alpha_i \in \prod_{i\in I}\mathbb{C}\alpha_i\,;\, \lambda_{j,1} = 0 \quad (j \gg 1)\}, \\
\Lambda_0 &:= \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-\nu)\alpha_{j,\nu}, \\
\Lambda_{j,\nu} &:= \sum_{i=\nu+1}^{\infty}(\nu - i)\alpha_{j,i} \quad (j = 0,\ldots,p,\ \nu = 0,1,2,\ldots), \\
\Lambda^0 &:= 2\Lambda_0 - 2\Lambda_{0,0} = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(1+\nu)\alpha_{0,\nu} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-\nu)\alpha_{j,\nu}, \\
\Lambda_{j,k}^0 &:= \Lambda_{j,0} - \Lambda_{k,0} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu(\alpha_{k,\nu} - \alpha_{j,\nu}) \quad (0 \le j < k).
\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}
(\Lambda^0|\alpha) = (\Lambda_{j,k}^0|\alpha) &= 0 \quad (\forall\alpha \in \Pi), \\
(\Lambda_{j,\nu}|\alpha_{j',\nu'}) &= \delta_{j,j'}\delta_{\nu,\nu'} \quad (j,\, j' = 0,1,\ldots,\ \nu,\, \nu' = 1,2,\ldots), \\
(\Lambda_{j,0}|\alpha_i) &= \delta_{i,0} \quad (\forall i \in \Pi).
\end{aligned}$$

2.3 reduction と対応

関数の変換. 関数の変換 $u(x) \mapsto (x-c_j)^{\lambda_j}u(x)$ は，微分作用素環への変換

$$\mathrm{Ad}\bigl((x-c_j)^{\lambda_j}\bigr) : x \mapsto x,\ (x-c_j)\tfrac{d}{dx} \mapsto (x-c_j)\tfrac{d}{dx} - \lambda_j \tag{20}$$

（addition または gauge 変換とよぶ）を，fractional な微分（Euler 変換）

$$u(x) \mapsto \partial^{-\mu}\,u(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{c_j}^{x}(x-s)^{\mu-1}u(s)ds \tag{21}$$

は変換

$$\partial^{-\mu}: \tfrac{d}{dx} \mapsto \tfrac{d}{dx}, \quad x\tfrac{d}{dx} \mapsto x\tfrac{d}{dx} - \mu \tag{22}$$

を引き起こす．

Weyl 代数の元の変換．$\mathbb{C}$ 上の多項式係数の常微分作用素の環を（1 変数）**Weyl 代数**といい，$W[x]$ おき，それを含む有理関数係数の常微分作用素環を $W(x)$ とおく．[*12]

Weyl 代数の元 $P \in W[x]$ と $Pu(x) = 0$ の解 $u(x)$ に対して，上の変換 $u(x) \mapsto v(x)$ で得られた関数 $v(x)$ が満たす方程式 $Qv(x) = 0$ を考える（Q は Weyl 代数の元）．P は (10) の GRS をもつ (3) の Fuchs 型作用素とする．

addition $\mathrm{Ad}\big((x-c_j)^{\lambda_j}\big)$ が引き起こす変換のほか，$\ell = (\ell_0, \ldots, \ell_p) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{p+1}$ に対し，Euler 変換を用いて以下の変換を定義する．

$$\begin{aligned}
\partial_\ell P &:= \mathrm{Ad}\Big(\prod_{j=1}^{p}(x-c_j)^{\lambda_{j,\ell_j}}\Big)\prod_{j=1}^{p}(x-c_j)^{m_{j,\ell_j}-d_\ell(\mathbf{m})}\,\partial^{-m_{0,\ell_0}}\,\mathrm{Ad}\big(\partial^{1-\lambda_{0,\ell_0}-\cdots-\lambda_{p,\ell_p}}\big)\\
&\qquad\cdot\,\partial^{(p-1)n-m_{1,\ell_1}-\cdots-m_{p,\ell_p}}\,a_n^{-1}(x)\prod_{j=1}^{n}(x-c_j)^{n-m_{j,\ell_j}}\,\mathrm{Ad}\Big(\prod_{j=1}^{p}(x-c_j)^{-\lambda_{j,\ell_j}}\Big)P.
\end{aligned}\tag{23}$$

$$d_\ell(\mathbf{m}) := m_{0,\ell_0} + \cdots + m_{p,\ell_p} - (p-1)\operatorname{ord}\mathbf{m}.$$

$\partial_\ell P$ のスペクトル型を $\mathbf{m}' = \partial_\ell \mathbf{m}$, GRS を $\{\lambda'_{\mathbf{m}'}\} = \partial_\ell\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ とおくと，少なくとも $\lambda_{j,\nu}$ が（Fuchs 条件のもとで）generic なら

$$\begin{aligned}
m'_{j,\nu} &= m_{j,\nu} - \delta_{\nu,\ell_j} d_\ell(\mathbf{m}),\\
\lambda'_{j,\nu} &= \lambda_{j,\nu} + (1 - \delta_{\nu,\ell_j} - 2\delta_{j,0})\mu,\\
\mu &= \lambda_{0,\ell_0} + \cdots + \lambda_{p,\ell_p} - 1
\end{aligned}\tag{24}$$

となる．特に

$$\operatorname{ord}\partial_\ell\mathbf{m} = \operatorname{ord}\mathbf{m} - d_\ell(\mathbf{m}). \tag{25}$$

ここで，m_{j,ℓ_j} は **0 であってもよい**ものとする．

$\partial_\ell\mathbf{m}$ の階数 $\operatorname{ord}\partial_\ell\mathbf{m}$ を小さくするには，$d_\ell(\mathbf{m})$ を最大となるように ℓ を選べばよい．このような ℓ（のひとつ）を $\ell_{max}(\mathbf{m})$ とおくと

$$m_{j,\ell_{max}(\mathbf{m})_j} = \max\{m_{j,1}, \ldots, m_{j,n_j}\} \tag{26}$$

である．$\partial_{max}\mathbf{m} = \partial_{\ell_{max}(\mathbf{m})}(\mathbf{m})$ とおく．同様に $d_{max}(\mathbf{m})$, $\partial_{max}\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ や $\partial_{max}P$ が定義される．

$\mathbf{m}$ が irreducibly realizable ならば，以下のような非負整数 K が定まる（reduction）．

$$\begin{gathered}
\operatorname{ord}\mathbf{m} > \operatorname{ord}\partial_{max}\mathbf{m} > \operatorname{ord}\partial_{max}^2\mathbf{m} > \cdots > \operatorname{ord}\partial_{max}^K\mathbf{m},\\
\operatorname{ord}^K\mathbf{m} = 1 \ \text{ or } \ d_{\max}(\partial_{max}^K\mathbf{m}) \le 0.
\end{gathered}\tag{27}$$

[*12] $\mathbb{C}$ 上の Weyl 代数を標数 0 の代数的閉体上の Weyl 代数で置き換えても，方程式の変換などの以下の結果はその証明も含めて同様に成り立つ

$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ に対し，Kac-Moody ルート系との対応を以下の様に与える（一階システムの Schlesinger 型の場合に，最初に [CB] が与えた）．

$$
\begin{aligned}
\alpha_\ell &:= \alpha_0 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\ell_j-1}\alpha_{j,\nu} \in \Delta_+^{re},\\
\alpha_{\mathbf{m}} &:= \operatorname{ord}\mathbf{m}\cdot\alpha_0 + \sum_{j=0}^{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{i=\nu+1}^{\infty} m_{j,i}\alpha_{j,\nu} \in Q_+, \qquad (28)\\
\Lambda(\lambda) &:= -\Lambda_0 + \sum_{j=0}^{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{j,\nu}(\Lambda_{j,\nu-1}-\Lambda_{j,\nu}) \in \bar{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h}^\vee/\mathbb{C}\Lambda^0.
\end{aligned}
$$

このとき以下の対応が成り立つ．

$$
\begin{array}{ccc}
\big\{P_{\mathbf{m}} : \text{Fuchs 型微分作用素 with } \{\lambda_{\mathbf{m}}\}\big\} & \to & \big\{(\Lambda(\lambda),\alpha_{\mathbf{m}})\,;\,\alpha_{\mathbf{m}}\in\overline{\Delta}_+\big\}\\
\downarrow \partial_\ell,\ \text{addition} & \circlearrowright & \downarrow W_\infty\text{-action},\ +\tau\Lambda^0_{0,j}\\
\big\{P_{\mathbf{m}} : \text{Fuchs 型微分作用素 with } \{\lambda_{\mathbf{m}}\}\big\} & \to & \big\{(\Lambda(\lambda),\alpha_{\mathbf{m}})\,;\,\alpha_{\mathbf{m}}\in\overline{\Delta}_+\big\}.
\end{array} \qquad (29)
$$

分割の組，Riemann 図式	Kac-Moody root system
$\mathbf{m}$	$\alpha_{\mathbf{m}}$
$\mathbf{m}$: rigid	$\alpha\in\Delta_+^{re}$: $\operatorname{supp}\alpha\ni\alpha_0$
$\mathbf{m}$: monotone	$\alpha\in Q_+$: $(\alpha\vert\beta)\le 0$ $(\forall\beta\in\Pi')$
$\mathbf{m}$: realizable	$k\alpha$: $k\in\mathbb{Z}_{>0}$, $\alpha\in\Delta_+$, $\operatorname{supp}\alpha\ni\alpha_0$
$\mathbf{m}$: irreducibly realizable	$\alpha\in\Delta_+$, $\operatorname{supp}\alpha\ni\alpha_0$ indivisible or $(\alpha\vert\alpha)<0$
$\mathbf{m}$: basic and monotone	$\alpha\in Q_+$: $(\alpha\vert\beta)\le 0$ $(\forall\beta\in\Pi)$ indivisible
$\mathbf{m}$: simply reducible and monotone	$\alpha\in\Delta_+ : (\alpha\vert\alpha_{\mathbf{m}})=1$ $(\forall\alpha\in\Delta(\mathbf{m})_+)$ $(\alpha\vert\beta)\le 0$ $(\forall\beta\in\Pi')$ $(\alpha\vert\alpha_0)>0$, $\alpha\ne\alpha_0$, indivisible
$\operatorname{ord}\mathbf{m}$	n_0 : $\alpha=n_0\alpha_0+\sum_{i,\nu}n_{i,\nu}\alpha_{i,\nu}$
$\operatorname{idx}(\mathbf{m},\mathbf{m}')$	$(\alpha_{\mathbf{m}}\vert\alpha_{\mathbf{m}'})$
∂_ℓ	s_{α_ℓ}
$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$	$(\Lambda(\lambda),\mathbf{m})$
$\vert\{\lambda_{\mathbf{m}}\}\vert$	$(\Lambda(\lambda)+\frac{1}{2}\alpha_{\mathbf{m}}\vert\alpha_{\mathbf{m}})$

定理 3 (存在定理 [Os4])**.** $\mathbf{m}$ が irreducibly realizable ならば，$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ という GRS をもつ (3) の形の普遍微分作用素 $P_{\mathbf{m}}(\lambda,g_1,\dots,g_N)$ が存在し，Fuchs 条件のもと $\lambda_{j,\nu}$ が generic，あるいは既約で**局所非退化**，あるいは $\mathbf{m}$ が **simply reducible** ならば，$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ という GRS をもつ Fuchs 型微分作用素は，適当な $(g_1,\dots,g_N)\in\mathbb{C}^N$ による普遍微分作用素（の有理関数倍）に限る．

$g_1, \ldots, g_N$ は**アクセサリ・パラメータ**で

$$N = 1 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{idx}\,\mathbf{m}. \tag{30}$$

$P_{\mathbf{m}}(\lambda, g)$ の係数は (x, λ, g) の多項式で，$(g_1, \ldots, g_N)$ に対しては 1 次であり，g_i はある $x^\nu \frac{d^j}{dx^j}$ の係数としてよい．

irreducibly realizable であるスペクトル型 $\mathbf{m}$ で，$\mathrm{idx}\,\mathbf{m} = 2$ となるものを **rigid** という（すなわち，アクセサリ・パラメータがないもの）．

$\mathbf{m}$ が **indivisible** または**素**とは，$\{m_{j,\nu}\}$ の最大公約数が 1 となること．

basic（すなわち，indivisible で $d_{max}(\mathbf{m}) \le 0$）かつ **monotone**（すなわち $m_{j,1} \ge m_{j,2} \ge m_{j,3} \ge \cdots$）となる $\mathbf{m}$ は，$\mathrm{idx}\,\mathbf{m}$ を決めると（同型を除いて）有限個しかない (cf. [Os2])．たとえば，$\mathrm{idx}\,\mathbf{m} = 0$ となるものは affine root 系の $\tilde{D}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ に対応した 4 個（cf. [Ko]）で，$\mathrm{idx}\,\mathbf{m} = -2$ となるものは 13 個（[Os2]）．

irreducible realizable な $\mathbf{m}$ の reduction (27) において

$$\mathrm{ord}\,\partial_{max}^{i}\,\mathbf{m} = \mathrm{ord}\,\partial_{max}^{i-1}\,\mathbf{m} - 1 \quad (i = 1, \ldots, K) \tag{31}$$

となる場合，$\mathbf{m}$ を **simply reducible** と定義する．

simply reducible で non-rigid な $\mathbf{m}$ は，$\mathrm{idx}\,\mathbf{m}$ を決めると有限個しかない (cf. [Os4])．rigid で simply reducible となるものは，$21111, 222, 33$ と以下の Simpson のリスト（in [Si]）に限る (cf. [MWZ])．

order	type	name	partitions
n	H_n	hypergeometric family	$1^n, 1^n, n-11$
$2m$	EO_{2m}	even family	$1^{2m}, mm-11, mm$
$2m+1$	EO_{2m+1}	odd family	$1^{2m+1}, mm1, m+1m$
6	X_6	extra case	$111111, 222, 42$

rigid なスペクトル型の $\mathbf{m}$ は，$\mathrm{ord}\,\mathbf{m}$ が 6 以下のものは同型を除いて 49 個，10 では 306 個，20 では 10269 個というように沢山ある．

2.4 様々な結果（[Os4]）

定義した方程式や関数の変換を用いて，最初の節で述べた常微分方程式の基本的問題が解決（or reduction）される．ここでは若干の例を挙げる．

普遍方程式

$$P_{\mathbf{m}}(\lambda)u = 0 \tag{32}$$

を考察する．

定理 4 (既約性)**.** 簡単のため $\mathbf{m}$ は irreducible realizable と仮定すると，方程式 (32) が既約，すなわち $P_{\mathbf{m}}(\lambda)$ が $W(x)$ の既約元となる（Fuchs 型なら解空間のモノドロミーの既約性と同値）た

めの必要十分条件は

$$(\Lambda(\lambda)|\alpha) \notin \mathbb{Z} \quad (\forall\alpha \in \Delta(\mathbf{m})_+). \tag{33}$$

ここで

$$\Delta(\mathbf{m})_+ := \Delta(\alpha_{\mathbf{m}})_+. \tag{34}$$

$c_0 = 0$, $c_1 = 1$，$m_{0,n_0} = 1$ とする，$x = 0$ での局所解 $u_{0,n_0} \sim x^{\lambda_{0,n_0}}$ を実軸に沿って 1 まで接続していったときの $x = 1$ での局所解 $u_{1,n_1} \sim (1-x)^{\lambda_{1,n_1}}$ に対する**接続係数**を $c(\lambda_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda_{1,n_1})$ とおく．

定理 5 (接続問題)**.** $\ell_0 \neq n_0$, $\ell_1 \neq n_1$ を満たす $\ell \in \mathbb{Z}^p_{\geq 1}$ に対し，$\{\lambda'_{\mathbf{m}'}\} = \partial_\ell\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ とおき，$P_{\mathbf{m}'}(\lambda')v = 0$ に対する同様の接続係数を $c'(\lambda'_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda'_{1,n_1})$ とおくと

$$\frac{c'(\lambda'_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda'_{1,n_1})}{\Gamma(\lambda'_{0,n_0} - \lambda'_{0,1} + 1)\Gamma(\lambda'_{1,1} - \lambda'_{1,n_1})} = \frac{c(\lambda_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda_{1,n_1})}{\Gamma(\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,1} + 1)\Gamma(\lambda_{1,1} - \lambda_{1,n_1})}. \tag{35}$$

特に $\mathbf{m}$ が rigid で $m_{1,n_1} = m_{2,n_2} = 1$ ならば，この定理により接続係数 $c(\lambda_{1,n_1} \rightsquigarrow \lambda_{2,n_2})$ がガンマ関数の積の商の形で具体的に書ける（cf. (27)）.

(27) において $\{\lambda(k)_{\mathbf{m}(k)}\} = \partial^k_{max}\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$（$k = 0, \ldots, K$）とおき，$\lambda(k)_{j,\max} = \lambda(k)_{j,\ell_{max}(\mathbf{m}(k))_j}$ とおく．この記号の下で

定理 6 (局所解の積分表示とべき級数表示)**.** $\mathbf{m}$ は rigid で，$m_{1,n_1} = 1$, $c_0 = \infty$, $c_1 = 1$ と仮定する．$x = 0$ における局所解で特性指数 λ_{1,n_1} に対応するものを $u(x)$ とおく．$u(x)$ を $u(x) \sim x^{\lambda_{1,n_1}}$ となるよう規格化しておく．このとき

$$\begin{aligned} u(x) := \prod_{k=0}^{K-1} &\frac{\Gamma\bigl(\lambda(k)_{1,n_1} - \lambda(k)_{1,max} + 1\bigr)}{\Gamma\bigl(\lambda(k)_{1,n_1} - \lambda(k)_{1,max} + \mu(k) + 1\bigr)\Gamma\bigl(-\mu(k)\bigr)} \\ &\int_0^{s_0} \cdots \int_0^{s_{K-1}} \prod_{k=0}^{K-1} (s_k - s_{k+1})^{-\mu(k)-1} \\ &\cdot \prod_{k=0}^{K-1} \Biggl(\Bigl(\frac{s_k}{s_{k+1}}\Bigr)^{\lambda(k)_{1,max}} \prod_{j=2}^{p} \Bigl(\frac{1 - c_j^{-1}s_k}{1 - c_j^{-1}s_{k+1}}\Bigr)^{\lambda(k)_{j,max}}\Biggr) \\ &\cdot s_K^{\lambda(K)_{1,n_1}} \prod_{j=2}^{p} \Bigl(1 - \frac{s_K}{c_j}\Bigr)^{\lambda(K)_{j,max}} ds_K \cdots ds_1 \Bigr|_{s_0=x} \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} = x^{\lambda_{1,n_1}} \prod_{j=2}^{p} \Bigl(1 - \frac{x}{c_j}\Bigr)^{\lambda(0)_{j,max}} \cdot &\sum_{\bigl(\nu_{j,k}\bigr)_{\substack{2\leq j\leq p \\ 1\leq k\leq K}} \in \mathbb{Z}^{(p-1)K}_{\geq 0}} \\ &\prod_{i=0}^{K-1} \frac{\bigl(\lambda(i)_{1,n_1} - \lambda(i)_{1,max} + 1\bigr)_{\sum_{s=2}^{p}\sum_{t=i+1}^{K}\nu_{s,t}}}{\bigl(\lambda(i)_{1,n_1} - \lambda(i)_{1,max} + \mu(i) + 1\bigr)_{\sum_{s=2}^{p}\sum_{t=i+1}^{K}\nu_{s,t}}} \\ &\cdot \prod_{i=1}^{K}\prod_{s=2}^{p} \frac{\bigl(\lambda(i-1)_{s,max} - \lambda(i)_{s,max}\bigr)_{\nu_{s,i}}}{\nu_{s,i}!} \cdot \prod_{s=2}^{p} \Bigl(\frac{x}{c_s}\Bigr)^{\sum_{i=1}^{K}\nu_{s,i}}. \end{aligned} \tag{37}$$

定理 7 (3項間関係式). $\mathbf{m}$ は rigid で，$m_{j,n_j}=1$ （$j=0,1,2$）, $c_0=\infty$ とし

$$\epsilon_{j,\nu}=\delta_{j,1}\delta_{\nu,n_1}-\delta_{j,2}\delta_{\nu,n_2},\ \epsilon'_{j,\nu*}=\delta_{j,0}\delta_{\nu,n_0}-\delta_{j,2}\delta_{\nu,n_2}$$

とおく（$j=0,\dots,p,\ \nu=1,\dots,n_j$）. $u_\lambda(x)$ を (32) の $x=c_1$ での局所解で，$\lambda_{j,\nu}$ が generic なとき

$$u_\lambda(x)\sim(x-c_1)^{\lambda_{1,n_1}}$$

となるものとする．このとき

$$u_\lambda(x)=u_{\lambda+\epsilon'}(x)+(c_1-c_2)\prod_{\nu=0}^{K-1}\frac{\lambda(\nu+1)_{1,n_1}-\lambda(\nu)_{1,\ell(\nu)_1}+1}{\lambda(\nu)_{1,n_1}-\lambda(\nu)_{1,\ell(\nu)_1}+1}\cdot u_{\lambda+\epsilon}(x). \tag{38}$$

これらの結果は，コンピュータ・プログラムとして実現されている（cf. [Os1], [Os5]).

以上は，Gauss の超幾何微分方程式の既約条件

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha-\gamma,\ \beta-\gamma\notin\mathbb{Z}$$

Gauss の和公式

$$F(\alpha,\beta,\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

積分表示

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^x x^{-\gamma+1}(x-s)^{-\alpha+\gamma-1}s^{\alpha-1}(1-s)^{-\beta}ds$$

3 項間関係式

$$F(\alpha+1,\beta,\gamma;x)-F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{\beta x}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;x)$$

の一般化になっている．

3 不確定特異点を持つ微分作用素と middle convolution

以上の結果を不確定特異点を持つ方程式に拡張することを考える．$x=0$ を有理関数を係数とする n 階の線型微分方程式 $Pu=0$ の特異点とすると，$x=0$ での独立な形式解が

$$u(x)\sim x^{\lambda_\nu}\log^{k_\nu}x\cdot e^{h_\nu(x^{-\frac{1}{q}})}\quad(\nu=1,\dots,n) \tag{39}$$

と書ける．ここで q はある正整数，$h_\nu(t)$ は定数項のない t の $\mathbb{C}$ 係数多項式, $\lambda_\nu\in\mathbb{C}$，k_ν は非負整数であり，n 個の $(\lambda_\nu,k_\nu,h_\nu(x^{-\frac{1}{q}}))$ は互いに異なっている．$\sim$ をより正確に述べるなら，x の形式的巾級数環を $\hat{\mathcal{O}}$ とおくと，上式の左辺と右辺の差が $\sum_{k=0}^{n-1}x^{\lambda_\nu+1}\log^k x\cdot e^{h_\nu(x^{-\frac{1}{q}})}\hat{\mathcal{O}}$ に属する．

$h_\nu=1$ $(\nu=1,\dots,n)$ となるときが確定特異点であり，そのときは $\hat{\mathcal{O}}$ は収束巾級数で置き換えてよい．そうでないときは**不確定特異点**といい，さらに $q=1$ と取れるときを**不分岐**という．

ここでは，不確定特異点がすべて不分岐である場合を扱う．[*13]

[*13] Bessel, Whittaker, Kummer, Hermite, Mathieu などの微分方程式の不確定特異点は不分岐であるが，Airy の微分方程式は分岐不確定特異点を持つ

3.1 Riemann 図式とスペクトル型

定義 1 と同様に不確定特異点においても一般化特性指数が定義できる．$P \in W[x]$ とする．

定義 8. 正整数 N, 多項式 $\lambda_\nu(t) \in \mathbb{C}[t]$ $(\nu = 1, \dots, N)$ と非負整数 m_ν で $n = m_1 + \cdots + m_N$ に対して，一般化特性指数 $\{[\lambda_1]_{(m_1)}, \dots, [\lambda_N]_{(m_N)}\}$ が定義される．すなわち，たとえば

$$\lambda_\nu - \lambda_{\nu'} \notin \mathbb{Z} \quad (1 \le \nu < \nu' \le N) \tag{40}$$

のときは，n 階の方程式 $Pu = 0$ が

$$u_{\nu,i}(x) - e^{\int \lambda_\nu(x^{-1})\frac{dx}{x}} \in x^{m_\nu} e^{\int \lambda_\nu(x^{-1})\frac{dx}{x}} \hat{\mathcal{O}} \quad (0 \le i \le m_\nu - 1,\ \nu = 1, \dots, N)$$

となる形式解 $u_{\nu,i}$ を持つとき，$x = 0$ でこの一般化特性指数を持つという．ここで

$$e^{\int \lambda_\nu(x^{-1})\frac{dx}{x}} := x^{\lambda_{\nu,0}} e^{-\frac{\lambda_{\nu,1}}{1}x^{-1} - \cdots - \frac{\lambda_{\nu,1}}{\ell_\nu}x^{-\ell_\nu}} \ \Leftarrow\ \lambda_\nu(t) = \lambda_{\nu,0} + \lambda_{\nu,1}t + \cdots + \lambda_{\nu,\ell_\nu}t^{\ell_\nu} \tag{41}$$

これにより，Fuchs 型の時と同様に方程式 $Pu = 0$ に対して各特異点 $c_0, \dots, c_p$ での一般化特性指数を並べて示した (10) の形の（一般化）Riemann 図式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\} = \{[\lambda_{j,\nu}]_{(m_{j,\nu})}\}_{\substack{1 \le j \le p \\ 1 \le \nu \le n_j}}$ が定義される．多項式の次数の差を $l_{j,\nu,\nu'} = \deg(\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'})$ とおき，重複度のデータ $\mathbf{m}$ と多項式の次数の差のデータ $\mathbf{l} = \left(l_{j,\nu,\nu'}\right)_{\substack{1 \le j \le p \\ 1 \le \nu,\, \nu' \le n_j}}$ の組 $(\mathbf{m}, \mathbf{l})$ を**スペクトル型**と呼ぶ.

$\ell_{j,\nu,\nu'}$ は次の条件を満たすことに注意しよう．

$$\begin{aligned} &\ell_{j,\nu,\nu'} \in \mathbb{Z}_{\ge 0},\ \ell_{j,\nu,\nu} = 0,\ \ell_{j,\nu,\nu'} = \ell_{j,\nu',\nu} \text{ and} \\ &\ell_{j,\nu,\nu'} \le \max\{\ell_{j,\nu,\nu''}, \ell_{j,\nu',\nu''}\} \quad (0 \le j \le p,\ 1 \le \nu,\, \nu',\, \nu'' \le n_j) \end{aligned} \tag{42}$$

このスペクトル型を分かりやすく表記することを考えよう．インデクスの集合 $\{1, \dots, n\}$ における同値関係 $\underset{j,r}{\sim}$ を以下の様に定義する．

$1 \le i \le n$ に対して $1 \le \nu_{j,i} \le n_j$ を

$$m_{j,1} + \cdots + m_{j,\nu_{j,i}-1} < i \le m_{j,1} + \cdots + m_{j,\nu_{j,i}} \tag{43}$$

によって定義し

$$i \underset{j,r}{\sim} i' \iff \begin{cases} \nu_{j,i} = \nu_{j,i'} & (r = 0), \\ l_{j,\nu_{j,i},\nu_{j,i'}} < r & (r \ge 1). \end{cases} \tag{44}$$

とおく．同値関係 $\underset{j,r}{\sim}$ から n の分割 $n = m_{j,1}^{(r)} + \cdots + m_{j,n_{j,r}}^{(r)}$ が定まり，さらにこの正整数 $n_{j,r}$ に対して

$$n_{j,0} = n_j \ge n_{j,1} \ge \cdots \ge n_{j,r_j} > n_{j,r_j+1} = 1 \tag{45}$$

となる非負整数 r_j が定まる．

ここで n の分割 $m_{j,1}+\cdots+m_{j,n_j}$ の順序を取り替えることにより

$$i \underset{j,r}{\sim} i' \ \text{かつ}\ i \le i'' \le i' \ \Rightarrow\ i \underset{j,r}{\sim} i'' \tag{46}$$

となっているとしてよい．このようにとると n の分割 $\mathbf{m}_j^{(r)}=(m_{j,1}^{(r)},\ldots,m_{j,n_{j,r}}^{(r)})$ は，分割 $\mathbf{m}_j^{(r+1)}$ の各 $m_{j,\nu}^{(r+1)}$ をさらに細分した分割を順に並べてできる n の分割としてよい．このようにして r_j+1 個の n の分割 $\mathbf{m}_j^{(r)}$ $(r=0,\ldots,r_j)$ を並べて c_j に対するスペクトル型として書き（たとえば | で区切る），それを $p+1$ 個の各特異点で並べて書いて（たとえば , で）区切るとスペクトル型が n の $(r_0+1)+\cdots+(r_p+1)$ 個の分割の並び $\tilde{\mathbf{m}}$ で表記できる．

例 9. たとえば $\tilde{\mathbf{m}}=212|32|32,41$ は $p=2$ で，$\mathbf{m}=212,41$, $l_{1,1,2}=l_{0,1,2}=0$, $l_{0,1,3}=l_{0,2,3}=2$ を表す．同値関係のレベルを ( ) で囲って表すことによって $\mathbf{m}$ を区切ることによってもスペクトル型を表せる（各特異点において，括弧の深さは r_j で，最も内側の括弧内の数字をそれらの和で置き換えて最も内側の括弧を削っていくことにより，分割の列が得られる）．すなわち

$$212|32|32,41=((21))((2)),41$$

これは例えば次の Riemann 図式のスペクトル型となる．

$$\begin{Bmatrix} x=\infty & 0 \\ [0]_{(2)} & [\lambda_{1,1,0}]_{(4)} \\ \lambda_{0,2,0} & \lambda_{1,2,0} \\ [\lambda_{0,3,0}+\lambda_{0,3,1}t+\lambda_{0,3,2}t^2]_{(2)} & \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x=\infty & (1) & (2) & 0 \\ [0]_{(2)} & [0]_3 & [0]_3 & [\lambda_{1,1,0}]_{(4)} \\ \lambda_{0,2,0} & & & \\ [\lambda_{0,3,0}]_{(2)} & [\lambda_{0,3,1}]_2 & [\lambda_{0,3,2}]_2 & \lambda_{1,2,0} \end{Bmatrix}$$

Fuchs 条件：$\lambda_{0,2,0}+2\lambda_{0,3,0}+4\lambda_{1,1,0}+\lambda_{1,2,0}=4$

Reduction (cf. §3.3)：$212|32|32,41 \ \to\ 12|12|12,21 \to 1|1|1,1=1,1$

3.2 分数化演算

まず Fuchs 型でも用いた $W[x]$ の元に対する演算を整理しておく（cf. [Os4]）．

Fourier-Laplace transform:

$$\mathcal{L}:\ W[x]\to W[x],\ x\mapsto -\partial,\ \partial\mapsto x$$

Reduced form (R(P)):

$P\in W(x)$ に対し, $\mathrm{R}(P)=\sum p_i(x)\,\partial^i\in\mathbb{C}(x)^\times P\cap W[x]$ を $p_i(x)$ の $\mathbb{C}[x]$ における最大共役元が 1 となるように定義する（さらに最高階の係数が monic になるように選べば一意）．

例えば,

$$P=\frac{3(x-1)}{x^2}\partial+x(x-1)^2\Rightarrow \mathrm{Red}(P)=\partial+\frac{1}{3}x^3(x-1).$$

Addition（Gauge 変換）:

$$\mathrm{Ad}(e^{f(x)}):W(x)\to W(x),\ x\mapsto x,\ \partial\mapsto\partial-f'(x)$$

$$\mathrm{Ad}(x^\lambda):W(x)\to W(x),\ x\to x,\ \partial\to\partial-\frac{\lambda}{x}$$

と定義する．これらは単に $e^{f(x)}$ や x^λ をそれらの逆作用素とで両側から共役をとる操作である．

以上の操作を用いて Euler 変換を次のように代数的に定義する．

Twisted Euler transform (middle convolution):

$P\in W(x)$ と $\mu\in\mathbb{C}$ に対し，

$$E(\mu)P := \mathcal{L}\circ\mathrm{R}\circ\mathrm{Ad}(x^\mu)\circ\mathcal{L}^{-1}\circ\mathrm{R}P.$$

定理 10 ([Hi]). 特異点を $c_0=\infty,\dots,c_p$ とする Riemann 図式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ n 階微分方程式 $Pu=0$ と $1\le \ell_j\le n_j$ を満たす $\ell=(\ell_0,\dots,\ell_p)\in\mathbb{Z}_{>0}^{p+1}$ に対し

$$\begin{aligned}
E(\ell) &= \prod_{j=0}^{p}\mathrm{Ad}\,(e^{f_{j,\ell_j}})\prod_{j=1}^{p}\mathrm{Ad}\big((x-c_j)^{\lambda_{j,\ell_j}(0)}\big)\\
&\quad\circ E(1-\lambda(\ell))\prod_{j=1}^{p}\mathrm{Ad}\big((x-c_j)^{-\lambda_{j,\ell_j}(0)}\big)\prod_{j=0}^{p}\mathrm{Ad}\,(e^{-f_{j,\ell_j}}),\\
\lambda(\ell) &= \sum_{j=0}^{p}\lambda_{j,\ell_j}(0),\\
f_{j,\nu} &= \begin{cases} -\sum_{i\ge1}\frac{\lambda_{j,\nu,i}}{i(x-c_j)^i} & (1\le j\le p)\\ -\sum_{i\ge1}\frac{\lambda_{j,\nu,i}}{i}x^i & (j=0)\end{cases} \quad \text{if}\ \ \lambda_{j,\nu}=\sum_{i\ge0}\lambda_{j,\nu.i}t^i\in\mathbb{C}[t]
\end{aligned}$$

とおくと．(40) のもとで $P'=E(\ell)P$ の Riemann 図式 $\{\lambda'_{\mathbf{m}'}\}$ は以下のようになる．

$$\begin{aligned}
m'_{j,\nu} &= m_{j,\nu}-\delta_{\nu,\ell_j}d(\ell),\\
d(\ell) &= \sum_{j=0}^{p}m_{j,\nu}-\sum_{j=0}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_j}\big(\deg(\lambda_{j,\nu}-\lambda_{j,\ell_j})+1\big)m_{j,\nu}+2n,\\
\lambda'_{j,\nu} &= \lambda_{j,\nu}+\big(\deg(\lambda_{j,\nu}-\lambda_{j,\ell_j})+1-\delta_{\nu,\ell_j}-2\delta_{j,0}\big)\big(\lambda(\ell)-1\big)
\end{aligned}$$

条件 (46) を満たす $\{m_{j,1},\dots,m_{j,n_j}\}$ の順序の交換と $E(\ell)$ とで生成される $\mathbf{m}$ の変換の群 $\overline{W}$ を，Kac-Moody ルート系の Weyl 群の言葉で述べることを次に考える．

3.3 Kac-Moody root 系への埋め込みと特異点の合流

前節で扱った $p+1$ 個の特異点を持つ方程式 $Pu=0$ に対し，$(r_0+1)+\cdots+(r_p+1)$ 個の特異点を持つ方程式 $\tilde{P}u=0$ を考え，その特異点の合流として $Pu=0$ を捕らえることを考える．このとき $\tilde{P}$ を P の **unfolding** と呼ぶ．$t_0,\dots,t_{r_j}$ を互いに異なる十分小さな原点の近傍の点とする．特異点 c_j+t_r $(0\le j\le p,\ 0\le r\le r_j)$ は確定特異点で，そこでのスペクトル型が $\mathbf{m}_j^{(r)}=(m_{j,s}^{(r)})_{1\le s\le n_{j,r}}$ であって，さらに $m_{j,s}^{(r)}$ に対応する特性指数を

$$\begin{aligned}
\lambda_{j,s}^{(r)} &= \sum_{k=r}^{r_j}\frac{\lambda_{j,\nu_{j,r,s},k}}{(\delta_{k,0}-k)\prod_{\substack{0\le u\le k\\ u\ne k}}(t_r-t_u)},\\
m_{j,1}+\cdots+m_{j,\nu_{j,r,s}} &= m_{j,1}^{(r)}+\cdots+m_{j,s}^{(r)}
\end{aligned}$$

とおいて，Riemann 図式 $\{[\lambda_{j,s}^{(r)}]_{(m_{j,s}^{(r)})}\}$ をもつ Fuchs 型方程式を $\tilde{P}u=0$ とする．ここで $c_j=\infty$ のときは，c_j+t_j を $\frac{1}{t_j}$ で置き換えることとする．

$\lambda_{j,\nu,i}$ は定数であったが，それらは $t=(t_0,t_1,\ldots)$ の原点の近傍での正則関数であってもよいとする．そのような $\lambda_{j,\nu,i}$ と $\tilde{\lambda}_{j,\nu,i}$ から定義される Riemann 図式 $\{[\lambda_{j,s}^{(r)}]_{(m_{j,s}^{(r)})}\}$ と $\{[\tilde{\lambda}_{j,s}^{(r)}]_{(m_{j,s}^{(r)})}\}$ は $\lambda_{j,\nu,i}|_{t=0}=\tilde{\lambda}_{j,\nu,i}|_{t=0}$ を満たすとき**同値**と定義する．

定理 11. i) $\ell=(\ell_0,\ldots,\ell_p)$ に対して $\ell_j^{(r)}$ を

$$m_{j,1}^{(r)}+\cdots+m_{j,\ell_j^{(r)}}^{(r)}\le m_{j,1}+\cdots+m_{j,\ell_p}<m_{j,1}^{(r)}+\cdots+m_{j,\ell_j^{(r)}+1}^{(r)}$$

で定めると，$\partial_{\tilde{\ell}}\tilde{P}$ の Riemann 図式は，$E(\ell)P$ の unfolding の Riemann 図式と同値である．ここで $\tilde{\ell}=(\ell_j^{(r)})$，$\tilde{\mathbf{m}}=(\mathbf{m}_j^{(r)})$ とおくと，$d(\ell)=d_{\tilde{\ell}}(\tilde{\mathbf{m}})$．また $\mu_{j,k}\in\mathbb{C}$ に対し

$$\mathrm{Ad}\Bigl(\prod_{r=0}^{r_j}(x-c_j-t_r)^{\sum_{k=r}^{r_j}\frac{\mu_{j,k}}{\prod_{\substack{0\le u\le k\\ u\ne r}}(t_r-t_u)}}\Bigr):x\mapsto x,\ \partial\mapsto\partial-\sum_{r=0}^{r_j}\frac{\mu_{j,k}}{\prod_{u=0}^{r}(x-c_j-t_u)}$$

ii) Riemann 図式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ の Fuchs の関係式（cf. [Be]) は，$\{[\lambda_{j,s}^{(r)}]_{(m_{j,s}^{(r)})}\}$ の Fuchs の関係式から得られる，すなわち

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{n_j}m_{j,\nu}\lambda_{j,\nu,0}=n-\tfrac{1}{2}\mathrm{idx}\,(\mathbf{m},\mathbf{l}),\\
&\quad\mathrm{idx}\,(\mathbf{m},\mathbf{l}):=\mathrm{idx}\,\tilde{\mathbf{m}}=\sum_{j=0}^{p}\sum_{r=0}^{r_j}\Bigl(\sum_{\nu=1}^{n_{j,r}}(m_{j,\nu}^{(r)})^2-n^2\Bigr)+2n^2\\
&\qquad\qquad=\sum_{j=0}^{p}\Bigl(\sum_{\nu=1}^{n_j}m_{j,\nu}^2-n^2\Bigr)-\sum_{j=0}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_j}\sum_{\nu'=1}^{n_j}l_{j,\nu,\nu'}\cdot m_{j,\nu}m_{j,\nu'}+2n^2
\end{aligned}$$

iii) $\mathrm{idx}\,(\mathbf{m},\mathbf{l})>0$ のとき，$d(\ell)>0$ となる $\ell=(\ell_0,\ldots,\ell_p)$ が存在する．

系 12. $\mathrm{idx}\,(\mathbf{m},\mathbf{l})>0$ とする．Riemann 図式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ既約な方程式 $Pu=0$ は，1 階の方程式まで reduction できる．このとき，特異点 c_j+t_r $(r=0,\ldots,r_j,\ j=0,\ldots,p)$ を持つ rigid な普遍 Fuchs 型方程式 $\tilde{P}u=0$ が存在し，その係数は $t_0,t_1,\ldots$ に正則に依存し，$\forall t_r\mapsto 0$ という極限から定義される合流により $Pu=0$ が得られる．このような $\tilde{P}$ をスペクトル型 $(\mathbf{m},\mathbf{l})$ の **Versal 作用素**という．

例 13 (Versal Gauss : 11|11|11)**.**

$$\begin{aligned}
\tilde{P}&=(1-c_1x)(1-c_2x)\,\partial^2+\bigl((\lambda_2+2c_1c_2)x+\lambda_1-c_1-c_2\bigr)\,\partial+\mu\bigl(\lambda_2+c_1c_2(1-\mu)\bigr)\\
&=(1-c_1x)(1-c_2x)\,\partial^2+(\tilde{\lambda}_2x+\tilde{\lambda}_1)\,\partial+\mu\bigl(\tilde{\lambda}_2-c_1c_2(\mu+1)\bigr)\quad(c_1=c_2=0)
\end{aligned}$$

with the Riemann schemes

$$\begin{Bmatrix} x=\frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_2} & \infty \\ 0 & 0 & \mu & ;\ x \\ \frac{\lambda_1}{c_1-c_2}+\frac{\lambda_2}{c_1(c_1-c_2)} & \frac{\lambda_1}{c_2-c_1}+\frac{\lambda_2}{c_2(c_2-c_1)} & \frac{\lambda_2}{c_1c_2}-\mu+1 \end{Bmatrix} \quad (0\neq c_1\neq c_2\neq 0)$$

$$\begin{Bmatrix} x=\frac{1}{c_2} & \infty & (1) \\ 0 & \mu & 0 & ;\ x \\ \frac{\lambda_2}{c_2^2}+\frac{\lambda_1}{c_2} & -\frac{\lambda_2}{c_2^2}-\frac{\lambda_1}{c_2^2}-\mu+1 & \frac{\lambda_2}{c_2} \end{Bmatrix} \quad (0=c_1\neq c_2\neq 0)$$

$$\begin{Bmatrix} x=\frac{1}{c_1} & (1) & \infty \\ 0 & 0 & \mu & ;\ x \\ -\frac{\lambda_2}{c_1^2} & \frac{\lambda_2}{c_1^3}+\frac{\lambda_1}{c_1^2} & \frac{\lambda_2}{c_1^2}-\mu+1 \end{Bmatrix} \quad (c_1=c_2\neq 0)$$

$$\begin{Bmatrix} x=\infty & (1) & (2) \\ \mu & 0 & 0 & ;\ x \\ 1-\mu & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{Bmatrix} \quad (c_1=c_2=0) \quad u\sim x^{-\mu},\ x^{\mu-1}e^{\lambda_1x+\frac{\lambda_2}{2}x^2}$$

$$u(x)=\int_{\frac{1}{c_1}}^{x} e^{-\int\left(\frac{\bar\lambda_1}{1-c_1t}+\frac{\bar\lambda_2 t}{(1-c_1t)(1-c_2t)}\right)dt}(x-t)^{\bar\mu-1}dt=\int_{\infty}^{x} e^{-\bar\lambda_1 t-\frac{\bar\lambda_2 t^2}{2}}(x-t)^{\bar\mu-1}dt \quad (c_1=c_2=0)$$

3.4 Kac-Moody ルート系のルート格子の商格子としての実現

スペクトル型 $(\mathbf{m},\mathbf{l})$ で $\mathbf{m}=\big(m_{j,\nu}\big)_{\substack{0\le j\le p\\ 1\le\nu\le n_j}}$ は n の $p+1$ 個の分割の組で $\mathbf{l}=(l_{\nu,\nu'})$ は (42) を満たすとする．次のように番号付けられた基底で生成される $\mathbb{Z}$ 格子を Q_{quot} と書くことにする．$1\le j\le n_{i,1}$ に対して $N_{i,j}$ を

$$m_{i,1}+\cdots+m_{i,N_{i,j}}=m_{i,1}^{(1)}+\cdots+m_{i,j}^{(1)}$$

を満たすように定め，$N_{i,0}=0$ とおく．さらに

$$\mathcal{J}=\{(j_0,\ldots,j_p)\mid 1\le j_i\le n_{i,1},\ 0\le i\le p\},$$
$$\mathcal{C}=\{\alpha_{\hat j}\mid \hat j\in\mathcal{J}\}\cup\{\alpha_{(i,j,k)}\mid 0\le i\le p,\ 1\le j\le n_{i,1}-1,\ 1\le k\le N_{i,j}-N_{i,j-1}-1\}$$

に対して，$Q_L=\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{C}}\mathbb{Z}\alpha$ と定義する．さらにここに次のような対称双一次形式を定義する．

$$\langle\alpha_{\hat j},\alpha_{\hat j'}\rangle=2-\sum_{\substack{0\le i\le p\\ j_i\neq j_i'}}(l_{i,N_{i,j_i},N_{i,j_i'}}+1),$$

$$\langle\alpha_{\hat j},\alpha_{(i,j,k)}\rangle=\begin{cases}-1 & \text{if } (i,j_i)=(i,j) \text{ and } k=1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases},$$

$$\langle\alpha_{(i,j,k)},\alpha_{(i',j',k')}\rangle=\begin{cases}2 & \text{if } (i,j,k)=(i',j',k')\\ -1 & \text{if } (i,j)=(i',j') \text{ and } |k-k'|=1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}.$$

ここで $\hat j=(j_0,\ldots,j_p)\in\mathcal{J}$ であった．この双一次形式をもった $\mathbb{Z}$ 格子 Q_L をルート格子とよぶ．さらに Q_L の中に $\alpha_j\in\mathcal{C}$ に関する鏡映を次のように定義する．

$$\sigma_j(\alpha)=\alpha-\langle\alpha_j,\alpha\rangle\alpha_j\quad(\alpha\in Q_L).$$

そしてこれら鏡映 $\sigma_j\ (\alpha_j \in \mathcal{C})$ で生成される群を W_L とおいて Q_L の Weyl 群とよぶ．

さてこのように定義した Weyl 群 W_L の作用をもつルート格子 Q_L と，$(\mathbf{m}, \mathbf{l})$ に対して定義した $\overline{W}$ 作用をもつ格子 $L := \bigoplus_{i=0}^{p} \mathbb{Z}^{n_{i,1}}$ $(\supset L^+ := \bigoplus_{i=0}^{p} \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n_{i,1}} = \{\mathbf{m}\})$ は次のような関係にある．

定理 14. ([Hi, Theorem 3.3]) 次のような $\mathbb{Z}$ 格子の準同型

$$\Phi \colon Q_L \longrightarrow L$$

を考える．すなわち

$$\alpha = \sum_{\hat{j} \in \mathcal{J}} m_{\hat{j}} \alpha_{\hat{j}} + \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{N_{i,j+1}-N_{i,j}-1} m_{(i,j,s)} \alpha_{(i,j,s)} \in Q_L,$$

に対して，$\bar{\mathbf{m}} = (\bar{m}_{j,\nu}) = \Phi(\alpha)$ を

$$\bar{m}_{i,N_{i,j}} = \sum_{\{\hat{j} \in \mathcal{J} \mid j_i = j\}} m_{\hat{j}} - m_{(i,j,1)} \quad \text{for} \quad 0 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq n_{i,1},$$
$$\bar{m}_{i,N_{i,j}+s} = m_{(i,j,s)} - m_{(i,j,s+1)} \quad \text{for} \quad 1 \leq s \leq N_{i,j+1} - N_{i,j} - 1.$$

と定義する．ただし $m_{(i,j,s)} = 0\ (s > N_{i,j+1} - N_{i,j} - 1)$ とおく．この時次が成り立つ．

1. Φ は全射
2. Weyl 群 W_L の Q_L への作用は Φ によって $\overline{W}$ の L への作用に写される．

したがってこの定理によって微分作用素への演算 $E(\mu)$ や additions などで生成されるスペクトル型の変換は，格子 L における変換群 $\overline{W}$ を定義するが，これは上で定義された Kac-Moody ルート格子 Q_L の W_L 作用を保つ商格子とみることができる．さらに不確定特異点の数が高々一つならばこの Φ は単射である．すなわちこの場合は L はまさにルート格子そのものと同一視できる．例えば Fuchs 型の時がまさにこの場合である．さらに以下が成り立つ．

定理 15 ([HO])**.** $\forall \mathbf{m} \in L^+$ に対し $\Phi^{-1}(\mathbf{m}) \cap Q_L^+ (:= \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{C}} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha) \neq \emptyset$.

従って，特に特性指数が generic な既約微分方程式 $Pu = 0$ のスペクトル型 $(\mathbf{m}, \mathbf{l})$ に対し，$\Phi^{-1}(\mathbf{m}) \cap Q_L^+$ の元は Kac-Moody ルート系の正ルートとなる．

3.5 線型微分作用素のスペクトル型による分類

$\operatorname{idx} P = 2$ となるような微分作用素 P はすべて階数 1 の作用素から基本的な演算を何度か施して構成できることが分かったが（rigid な場合），その他の場合はどうなるか考えてみる．

そこで以下，$\operatorname{idx} P \leq 0$ とする．可逆な twisted Euler transformations や additions による変換で，微分作用素 P のスペクトルタイプ $(\mathbf{m}, \mathbf{l})$ が変換されるが（$\mathbf{l}$ は変換を受けない），$d(\ell) > 0$ となる $\ell = (\ell_0, \ldots, \ell_p)$ があれば階数を下げることが出来るので，これらの変換の軌道の中に，$d(\ell) > 0$ を満たす ℓ が存在しないスペクトル型 $(\mathbf{m}, \mathbf{l})$ が存在する．これらを basic なスペクトル型と呼ぶ．$\mathbf{m} = (m_{j,\nu})$ において，$m_{j,\nu}$ の最大公約数が 1 のとき，$(\mathbf{m}, \mathbf{l})$ または $\mathbf{m}$ を**素**という，

定理 16 ([HO]). index of rigidity r を固定すると，$r<0$ のときは basic なスペクトル型は有限通りしかない．$r=0$ とすると，素で basic なスペクトル型は有限通りしかない．

以下，特に $\operatorname{idx} P = 0, -2$ の場合について考える．

まず Fuchs 型の場合を思い出しておく．

定理 17. P は Fuchs 型で既約とする．

i) ([Ko]) $\operatorname{idx} P = 0$ であることと，twisted Euler transformations と additions によって P が次の 4 個のうちのいづれかのスペクトル型を持つ既約微分作用素に帰着できることは同値.

$$(11,11,11),\ (111,111,111),\ (22,1111,1111),\ (33,222,111111)$$

ii) ([Os2]) $\operatorname{idx} P = -2$ であることと，twisted Euler transformations と additions によって P が次の 13 個のうちのいづれかのスペクトル型を持つ既約微分作用素に帰着できることは同値.

$$\begin{array}{llll}(11,11,11,11,11), & (21,21,111,111), & (31,22,22,1111), & (22,22,22,211),\\ (211,1111,1111), & (221,221,11111), & (32,11111,11111), & (222,222,2211),\\ (33,2211,111111), & (44,2222,22211), & (44,332,11111111), & (55,3331,22222),\\ (66,444,2222211) & & & \end{array}$$

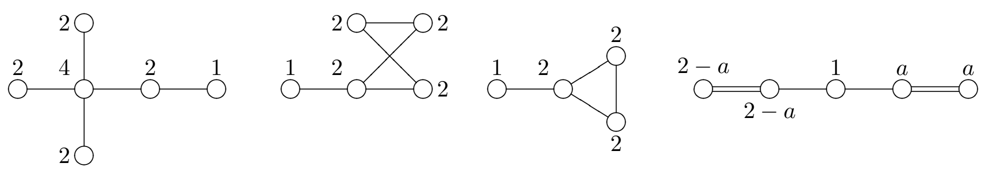
これらの定理を我々のルート系との対応を用いて不確定特異点を持つ微分作用素に拡張する．

定理 18. P は既約とする．

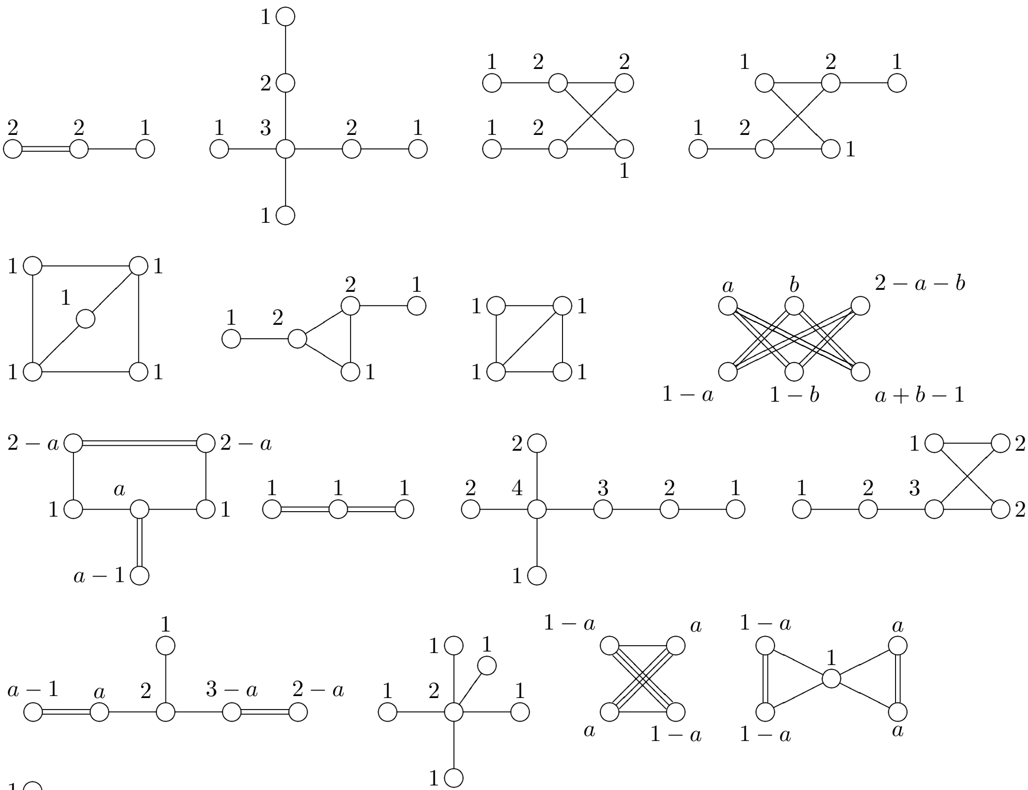
i) $\operatorname{idx} P = 0$ で，P のスペクトル型 $(\mathbf{m}, \mathbf{l})$ は素とする．twisted Euler transformations と additions によって次をみたす微分作用素 $P_{\min}$ に帰着できる．すなわち，帰着されたスペクトル型 $(\mathbf{m}_{\min}, \mathbf{l})$ の Φ による逆像を $\alpha(P_{\min})$ とすると[*14]その support は次のアファインルート系の拡大 Dynkin 図のいずれか.

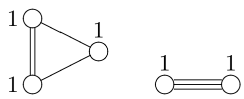
$$E_8^{(1)}, E_7^{(1)}, E_6^{(1)}, D_4^{(1)}, A_3^{(1)}, A_2^{(1)}, A_1^{(1)}, A_1^{(1)} \oplus A_1^{(1)}.$$

ii) ([HO]) $\operatorname{idx} P = -2$ とする．このとき twisted Euler transformations と additions によって次をみたす微分作用素 $P_{\min}$ に帰着できる．すなわちそのスペクトル型 $(\mathbf{m}_{\min}, \mathbf{l})$ の Φ による逆像を $\alpha(P_{\min})$ とすると，その support は次の Dynkin 図のいずれか．また各 $\alpha(P_{\min})$ はこの図の中の頂点に付随した数字を係数としてもつ．

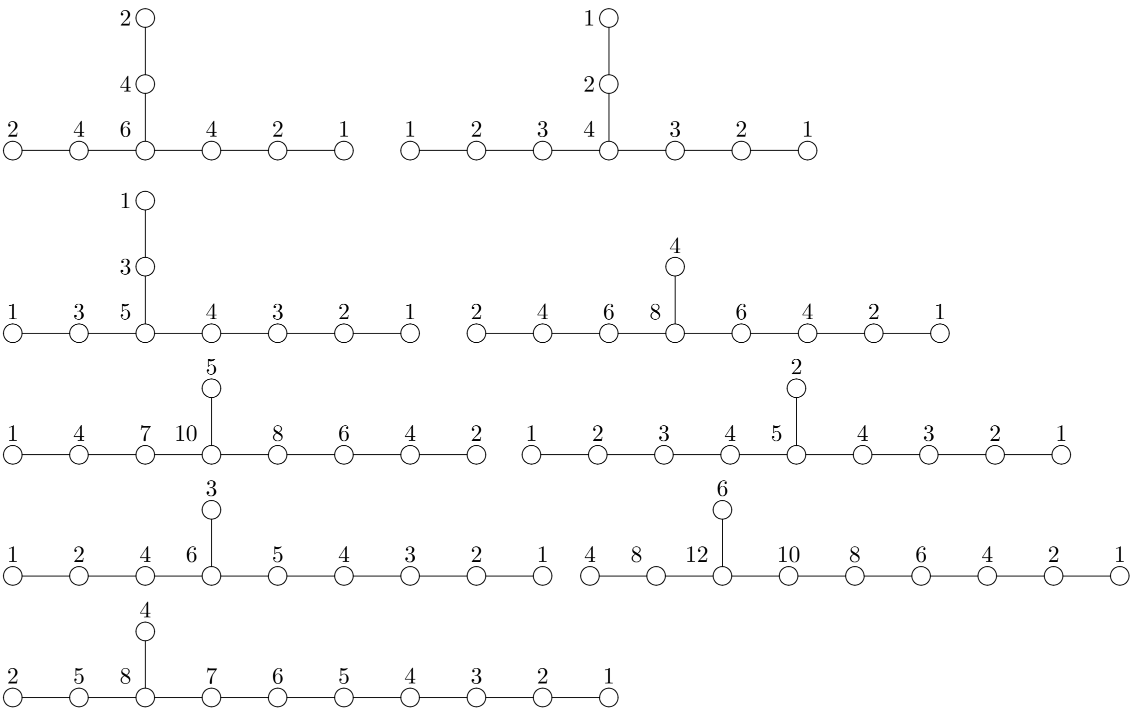


*14 Φ が単射でないときは $P_{\min}$ のスペクトル型から前と同様に定義される格子 $L_{\min} \subset L(P)$ に制限した $\Phi|L_{\min}$ による $\mathbf{m}(P_{\min})$ の逆像をとることにする．

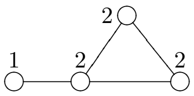




Here $a,b \in \mathbb{Z}$.



注意 19. 一つのルートに対応していくつかのスペクトル型が対応することがある．例えば，



に対しては，3 通りのスペクトル型，つまり微分作用素が対応する．一方で一つのルートに対応するスペクトル型は有限個であることが確かめられるので，上のルートの分類から，対応するスペクトル型の有限性，分類を得ることができる．

参考文献

[Be] D. Bertrand, *On Andre's proof of the Siegel Shidlovski theorem*, Colloque Franco-Japonais : Théorie des nombres transcendants, Sem. Math. Sci. 27 (Keio University, Yokohama, 1999).

[CB] W. Crawley-Boevey, *On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspaces and sum zero*, Duke Math. J. **118** (2003), 339–352.

[DG] M. Dettweiler and S. Reiter, *An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems*, J. Symbolic Comput. **30** (2000), 761–798.

[DG2] ——, *Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems*. J. Algebra **318** (2007), 1–24.

[Ha] Y. Haraoka, *Integral representations of solutions of differential equations free from accessory parameters*, Adv. Math. **169** (2002), 187–240.

[Ha2] 原岡喜重，「超幾何関数」，すうがくの風景 7, 朝倉書店, 2002.

[HF] Y. Haraoka and G. M. Filipuk, *Middle convolution and deformation for Fuchsian systems*, J. Lond. Math. Soc. **76** (2007), 438–450.

[Hi] K. Hiroe, *Linear differential equations on $\mathbb{P}^1$ and root systems*, arXiv:1010.2580v4, 2012.

[HO] K. Hiroe and T. Oshima, *A classification of roots of symmetric Kac-Moody root systems and its application*, to apper in Integrable Systems and Representations, 129–175, Springer Proceedings in Mathematics, 2012.

[Kc] V. C. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Third Edition, *Cambridge Univ. Press* 1990.

[Ka] N. M. Katz, *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies **139**, Princeton University Press, 1995.

[Ko] V. P. Kostov, *The Deligne-Simpson problem for zero index of rigidity*, Perspective in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, *World Scientific* 2001, 1–35.

[MWZ] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinski, *Multiple flag variety of finite type*, Adv. in Math. **141** (1999), 97–118.

[MUI] 森口繁一，宇田川銈久，一松信，数学公式 III –特殊函数– ，岩波全書，岩波書店，1960.

[Os1] T. Oshima, `Okubo`, a computer program for Katz/Yokoyama/Oshima algorithms on `ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/okubo/okubo.zip`, 2007-8.

[Os2] ——, *Classification of Fuchsian systems and their connection problem*, arXiv:0811.2916, 2008, 29pp, to appear in *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*.

[Os3] ——, *Katz's middle convolution and Yokoyama's extending operation*, arXiv:0812.1135, 2008, 18pp.

[Os4] ——, *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations*, arXiv:1102.2792v1, 195pp, `http://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima`.

[Os5] ——, `muldif.rr`, a library of the calculation of differential operators for computer algebra `Risa/Asir`, `ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif/`, 2009–2011.

[Os6] 大島利雄 述, 廣惠一希 記, "特殊関数と代数的線型常微分方程式", Lecture Notes in Mathematical Sciences **11** (2011), 東京大学, 111pp.

[OS] T. Oshima and N. Shimeno, *Heckman-Opdam hypergeometric functions and their specializations*, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B20** (2010), 129–162.

[Si] C. T. Simpson, *Products of Matrices*, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings **12**, AMS, Providence RI (1991), 157–185.

[Si2] ——, *Katz's middle convolution algorithm*, 53 pp, arXiv:math/0610526.

[WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis, Fourth Edition*, 1927, Cambridge University Press.

[Yo] T. Yokoyama, *Construction of systems of differential equations of Okubo normal form with rigid monodromy*, Math. Nachr. **279** (2006), 327–348.