旗多様体を規定する微分方程式

Toshio OSHIMA (大島利雄)

東京大学大学院 数理科学研究科

ENCOUNTER with MATHEMATICS

ラドン変換

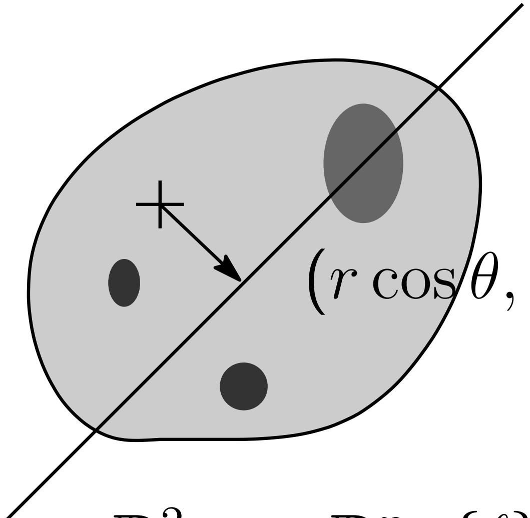
— 積分が拓く新しい世界 —

2009 年 5 月 30 日

中央大学理工学部

Radon transform

J. Radon (1917, Ber. Berh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. kl.)



$$C_0(\mathbb{R}^2) \ni f \mapsto \left(\ell \mapsto R_f(\ell) = \int_\ell f(\ell(t))dt\right)$$

$$\ell(t) = (r\cos\theta - t\sin\theta, r\sin\theta + t\cos\theta)$$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\{\ell\} \longrightarrow$ $\{k$-**次元** affine subspaces$\}$

$k = n-1$: **パラメータ空間の次元** $= n$

$k = 1$: X-ray transformation,

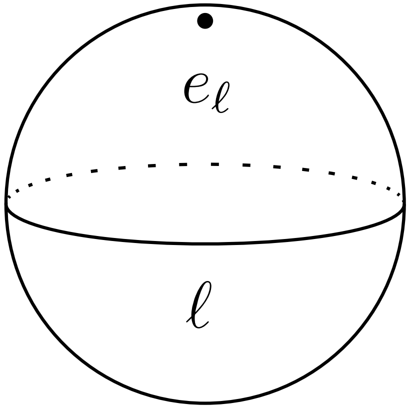
パラメータ空間 (affine Grassmann) **の次元** $= 2n-2$

$\longrightarrow$ **像はある微分方程式を満たす** (F. John)

$\mathcal{R} : \mathcal{S}(\{k'$-**次元** affine subspaces$\}) \to \mathcal{S}(\{k$-**次元** affine subspaces$\})$

(Gonzalez-Kakehi, Rubin etc.)

P. Funk (1916, Math. Ann.)



$$C(S^2) \ni f \mapsto \left(\ell \mapsto R_f(\ell) = \int_\ell f(\ell(\theta))d\theta\right)$$

$$\ell(\theta) = e'_\ell \cos\theta + e''_\ell \sin\theta \quad (\{e_\ell, e'_\ell, e''_\ell\} : \text{orthonormal})$$

$$\Longrightarrow\ C^\infty(S^2/\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\sim} C^\infty(S^2/\mathbb{Z}_2)$$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = S^2/\mathbb{Z}_2$: 2 **次元実射影空間**

$= \{1$ **次元部分空間** $\subset \mathbb{R}^3\} \simeq O(3)/O(1) \times O(2)$

$\simeq GL(3,\mathbb{R})/P_{1,2}, \quad P_{1,2} = \left\{ \begin{pmatrix} * & & \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \in GL(3,\mathbb{R}) \right\}$

$\mathcal{R} : C^\infty(\{k$ **次元部分空間** $\}) \to C^\infty(\{\ell$**次元部分空間** $\})$

$k + \ell = n \quad \Rightarrow \quad \xrightarrow{\sim}$

$k = 1 < \ell < n - 1 \quad \to \quad$ 2 **階の微分方程式**, Gelfand **の一般超幾何**

$\{k$ **次元部分空間** $\subset \mathbb{R}^n\}$: Grassmann **多様体** $\leftarrow O(n)$, $GL(n)$

$\longrightarrow$ **一般旗多様体（**$\Leftarrow$ $\{$ **部分空間の包含列** $\}$ **の空間）**

Grassmann 多様体

$$M^o(n,k;\mathbb{R}) := \left\{ X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix} \in M(n,k;\mathbb{R});\ \operatorname{rank} X = k \right\}$$

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) := \{V_k \ :\ k \text{ 次元部分空間 } \subset \mathbb{R}^n\} \qquad V_k \ni XM(k,1;\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^n$$

$$= M^o(n,k;\mathbb{R})/GL(k,\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} I_k \\ x \end{pmatrix} \qquad (x \in M(n-k,k;\mathbb{R}))$$

$$\mathrm{Gr}_1(\mathbb{R}^n) = M^o(n,1;\mathbb{R})/GL(1,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}/\mathbb{R}^\times = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \supset \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\dim \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) = nk - k^2 = (n-k)k$$

$$\mathcal{R}_\ell^k : C\big(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)\big) \ni f \mapsto (\mathcal{R}_\ell^k f)(x) \in C\big(\mathrm{Gr}_\ell(\mathbb{R}^n)\big) \quad (0<k<\ell<n)$$

$$(\mathcal{R}_\ell^k f)(x) = \int_{x\supset t\,:\,k \text{ 次元部分空間}} f(t)dt$$

$$0<\ell<k<n \rightarrow$$

$$(\mathcal{R}_\ell^k f)(x) = \int_{x\subset t\,:\,k \text{ 次元部分空間}} f(t)dt$$

$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ **には** $G = GL(n,\mathbb{R})$ **が推移的に作用：** $G \overset{\text{surj.}}{\to} \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \ni \binom{I_k}{0} GL(k,\mathbb{R}) = \binom{GL(k,\mathbb{R})}{0} \qquad G \times M^o(n,k;\mathbb{R}) \ni (g,X) \mapsto {}^t g^{-1} X$$

$$P_{k,n} := \left\{ g \in G;\ {}^t g^{-1} \binom{GL(k,\mathbb{R})}{0} = \binom{GL(k,\mathbb{R})}{0} \right\}$$

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) = G/P_{k,n} \quad (= O(n)/O(k) \times O(n-k))$$

$$P_{k,n} = \left\{ p = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ y & g_2 \end{pmatrix};\ g_1 \in GL(k,\mathbb{R}),\ g_2 \in GL(n-k,\mathbb{R}),\ y \in M(n-k,k;\mathbb{R}) \right\}$$

$$\supset P := \left\{ \begin{pmatrix} * & & & \\ * & * & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \in GL(n,\mathbb{R}) \right\}$$

$$\mathcal{B}\big(O(n)/O(k) \times O(n-k)\big) \simeq \mathcal{B}\big(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)\big) \hookrightarrow \mathcal{B}(G/P_{n,k})$$

$$\mathcal{B}(G/P_{k,n}; L_\lambda) := \{ f \in \mathcal{B}(G);\ f(xp) = f(x) |\det g_1|^{\lambda_1} |\det g_2|^{\lambda_2}, \quad \forall p \in P_{k,n} \}$$

$(= \mathcal{B}(O(n)/O(k) \times O(n-k)))$ G **の退化主系列表現の空間**

$$= \{ f \in \mathcal{B}(M^o(n,k;\mathbb{R}));\ f(Xg_1) = f(X) |\det g_1|^{-\lambda_1}, \quad \forall g_1 \in GL(k,\mathbb{R}) \}$$

$$\left(x = (x_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in G \subset \mathbb{R}^{n^2}, \quad x \mapsto {}^t x^{-1} \mapsto X\right)$$

$$\Longrightarrow (\mathcal{R}_\ell^k f)(x) = \int_{O(\ell) \times O(n-\ell)} f(xk)\,dk = \int_{O(\ell)/O(k) \times O(\ell-k)} f(xk)\,dk$$

問題. $\mathcal{R}_\ell^k$ **の像を特徴付けよ** $(\ell + k < n)$

定理. $\mathcal{R}_\ell^k$ is lifted to the G-map

$$\mathcal{R}_\ell^k : \mathcal{B}(G/P_{k,n}; L_{\ell,0}) \longrightarrow \mathcal{B}(G/P_{\ell,n}; L_{k,0})$$

G の（左）無限小作用で生成される微分作用素の中で探す

$$X \in M(n, \mathbb{R}),\ E_{ij} := \big(\delta_{pi}\delta_{qj}\big)_{\substack{1\le p\le n\\ 1\le q\le n}},\ x = \big(x_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in G \text{ and } \phi \in C^\infty(G)$$

$$(X\phi)(x) := \frac{d}{dt}\phi(xe^{tX})\Big|_{t=0}, \qquad E_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu i}\frac{\partial}{\partial x_{\nu j}}$$

$$(\pi(X)\phi)(x) := \frac{d}{dt}\phi(e^{-tX}x)\Big|_{t=0} \qquad \pi(E_{ij}) = -\sum_{\nu=1}^{n} x_{j\nu}\frac{\partial}{\partial x_{i\nu}}$$

$$= \frac{d}{dt}\phi(xe^{-tx^{-1}Xx})\Big|_{t=0}$$

$$(\pi(X)\phi)(x) = (-(\mathrm{Ad}(x^{-1})X)\phi)(x), \qquad \mathrm{Ad}(x)X = xXx^{-1} \in M(n, \mathbb{C})$$

$\mathfrak{g} = M(n, \mathbb{R})$ **は** Lie **環**, $\qquad [E_{ij}, E_{k\ell}] = \epsilon(\delta_{jk}E_{i\ell} - \delta_{\ell i}E_{kj}).$

$U^{\epsilon}(\mathfrak{g})$: 普遍包絡環 ($\supset \mathfrak{g}$)
$\simeq X$ ($X \in \mathfrak{g}$) で生成される $\mathcal{D}(G)$ (G 上の微分作用素環) の部分環
($\epsilon = 1$)

定義. $\mathbf{E}_{n,k,\lambda} := \{P \in U(\mathfrak{g}); \pi(P)\mathcal{B}(G/P_{k,n}; L_\lambda) = 0\}$
$\Rightarrow U(\mathfrak{g})$ の両側イデアル

Fact. 積分変換

Radon 変換 $\mathcal{R}^n_k$

Poisson 変換 $\mathcal{P}^n_{k,\lambda} : \phi(g) \mapsto \int_K \phi(gk)dk$

Penrose 変換

Whittaker 模型, intertwining operators etc.

(任意の $\mathcal{B}(G/P_{k,n}; L_\lambda)$ からの G-準同型写像 or より一般に $G/P_{k,n}$ の上のある正則線形束のあるコホモロジー空間ベクトルから)

の像は、$\mathbf{E}_{n,k,\lambda}$ で定義される微分方程式を満たす

問題. $\mathbf{E}_{n,k,\lambda}$ のよい生成系を見つけよ

$$\mathbf{E}_{n,k,\lambda} \simeq a\Big(\bigcap_{g\in G} \mathrm{Ad}(g) J^{\epsilon}_{k,\lambda}\Big)$$

$$J^{\epsilon}_{k,\lambda} := \sum_{\substack{i\neq j \\ i>k \text{ or } j\leq k}} U^{\epsilon}(\mathfrak{g}) E_{ij} + \sum_{i=1}^{k} U^{\epsilon}(\mathfrak{g})(E_{ii}-\lambda_1) + \sum_{j=k+1}^{n} U^{\epsilon}(\mathfrak{g})(E_{jj}-\lambda_2)$$

by $\quad a : U^{\epsilon}(\mathfrak{g}) \ni XY \mapsto (-Y)(-X) \ni U(\mathfrak{g}) \quad$ (anti-automorphism, $X, Y \in \mathfrak{g}$)

$$A_{k,\lambda} := \begin{pmatrix} \lambda_1 I_k & 0 \\ * & \lambda_2 I_{n-k} \end{pmatrix}, \qquad \langle X, Y\rangle := \mathrm{trace}\, XY$$

$$\begin{aligned} \epsilon = 0 : \ f \in \bigcap_{g\in G} \mathrm{Ad}(g) J^{0}_{k,\lambda} &\Leftrightarrow \mathrm{Ad}(g) f \in J^{0}_{k,\lambda} && (\forall g \in G) \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{Ad}(g) f)(A_{k,\lambda}) = 0 && (\forall g \in G) \\ &\Leftrightarrow f\Big(\bigcup_{g\in G} \mathrm{Ad}(g) A_{k,\lambda}\Big) = 0 \end{aligned}$$

Fact. $\mathbf{E}_{n,k,\lambda}$ **は行列** $A_k(\lambda_1,\lambda_2) := \begin{pmatrix} \lambda_1 I_k & 0 \\ * & \lambda_2 I_{n-k} \end{pmatrix}$ in $M(n,\mathbb{C})$ **の共役類の集合** $\subset M(n,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$ **の定義イデアルの量子化とみなせる**

$$
\begin{tikzcd}
V_A = \bigcup_{g\in G} \mathrm{Ad}(g)A \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\vdots"] & G\text{-invariant defining ideal of } V_A \arrow[d, "\text{quantization}"] \\
\text{Representations of } U(\mathfrak{g}) \text{ or } G_{\mathbb{R}} & \text{Two sided ideal of } U(\mathfrak{g}) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

線形代数における 特性多項式, 最小多項式, 単純単因子, 行列式
などの概念の 量子化

Remark. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow A_k(\lambda_1,\lambda_2) \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 I_k & \\ & \lambda_2 I_{n-k} \end{pmatrix}$

定理 (Minimal Polynomial). $A_k(\lambda_1, \lambda_2)$ **の最小多項式** $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ **の量子化は** $(x-\lambda_1)(x-\epsilon k-\lambda_2)$ **で** $a(\mathbf{E}_{n,k,\lambda})$ **の生成元は**

$$\left\langle \Big((\mathbb{E}-\lambda_1)(\mathbb{E}-\epsilon k-\lambda_2)\Big)_{ij},\ \sum_{i=1}^{n} E_{ii} - k\lambda_1 - (n-\epsilon k)\lambda_2 \right\rangle$$

(ただし λ は一般) ここで $\mathbb{E} = \big(E_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} = {}^t X\partial \in M(n, U(\mathfrak{g}))$ **で**

$X = \big(x_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}},\ \partial = \Big(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\Big)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ $\quad E_{ij} = \sum_\nu x_{\nu i}\frac{\partial}{\partial x_{\nu j}}$

$\lambda_1 - \lambda_2 \notin \{1, 2, 3, \ldots\} \Rightarrow$ **ポアソン変換** $\mathcal{P}^n_{k,\lambda}$ **の像は，この微分方程式の解空間として特徴づけられる**

(Hua **方程式の一般化，帯球関数** $\mathcal{P}^n_{1,\lambda}(1)$ **は** Lauricella's F_D **となる**)

Remark. $\operatorname{rank}(A_k(\lambda_1, \lambda_2) - \lambda_1) \le n - k \Rightarrow A_k(\lambda_1, \lambda_2) - \lambda_1$ **の** $(n-k+1)$-**次小行列式は消える**

定理 (**小行列式, 単純単因子**). Assume $2k \le n$ (for simplicity).

$\lambda_1 - \lambda_2 \notin \{\epsilon, \cdots, (n-k)\epsilon\} \;\Rightarrow$

$$a(\mathbf{E}_{n,k,\lambda}) = \Big\langle \det\Big(E_{i_\mu j_\nu} - (\lambda_1 + (\nu - n + k - 1)\epsilon)\delta_{i_\mu j_\nu}\Big)_{\substack{1\le\mu\le n-k+1\\ 1\le\nu\le n-k+1}}, \det\Big(E_{i'_\mu j'_\nu} - (\lambda_2 + (\nu - 1)\epsilon)\delta_{i'_\mu j'_\nu}\Big)_{\substack{1\le\mu\le k+1\\ 1\le\nu\le k+1}} \Big\rangle$$

$\lambda_1 - \lambda_2 \in \{k\epsilon, \cdots, (n-k)\epsilon\} \;\Rightarrow$

$$a(\mathbf{E}_{n,k,\lambda}) = \Big\langle \frac{d}{dt}\det\Big(E_{i_\mu j_\nu} - (t + \lambda_1 + (\nu - n + k - 1)\epsilon)\delta_{i_\mu j_\nu}\Big)_{\substack{1\le\mu\le n-k+1\\ 1\le\nu\le n-k+1}}\Big|_{t=0}, \det\Big(E_{i'_\mu j'_\nu} - (\lambda_2 + (\nu - 1)\epsilon)\delta_{i'_\mu j'_\nu}\Big)_{\substack{1\le\mu\le k+1\\ 1\le\nu\le k+1}} \Big\rangle$$

Here $\quad \epsilon = \begin{cases} 0 & \text{(classical)} \\ 1 & \text{(quantum)} \end{cases}$

$$\det\big(A_{ij}\big) = \sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \cdots, \qquad I = \{i_1, \ldots, i_{n-k-1}\} \text{ etc.}$$

行列式因子: $A_{n,k,\lambda} - xI_n$ **の** m **次小行列式の最大公約元** $\rightarrow$ **量子化**

定理 ([O, 1996]). $0 < k < \ell, \quad k + \ell < n$

$\mathcal{R}_\ell^k$ **は以下の方程式の解空間の上へ位相 G-同型**

$$\Big\{\Phi\big((x_{ij})_{\substack{1\le i\le \ell\\ 1\le j\le n}}\big) \in \mathcal{B}(M^0(n,\ell;\mathbb{R}));$$

$$\Phi(xg) = |\det g|^{-k}\Phi(x) \quad \text{for } g \in GL(\ell,\mathbb{R}),$$

$$\det\Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_\mu j_\nu}}\Big)_{\substack{1\le\mu\le k+1\\ 1\le\nu\le k+1}}\Phi(x) = 0 \quad \text{(Capelli type)} \tag{1}$$

$$\text{for } \ 1 \le i_1 < \cdots < i_{k+1} \le n,\ 1 \le j_1 < \cdots < j_{k+1} \le \ell\Big\}.$$

定理 ([O 1996, Generalized Capelli identity])

$$\det\Big(\sum_{\nu=1}^n x_{\nu i_k}\frac{\partial}{\partial x_{\nu j_\ell}}(=E_{i_k j_\ell}) + (m-\ell)\delta_{i_k j_\ell}\Big)_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le \ell\le m}}$$

$$= \sum_{1\le\nu_1<\cdots<\nu_m\le n}\det\big(x_{\nu_p i_q}\big)_{\substack{1\le p\le m\\ 1\le q\le m}}\cdot\det\Big(\frac{\partial}{\partial x_{\nu_p i_q}}\Big)_{\substack{1\le p\le m\\ 1\le q\le m}}$$

for $I = \{i_1,\ldots,i_m\}$ and $J = \{j_1,\ldots,j_m\}$ $\quad \det({}^tX\Xi) = \cdots \quad X,\ \Xi \in M(n,m;\mathbb{C})$

Remark. $m = n \Rightarrow$ the usual *Capelli identity* (1887)

定理. $H \subset GL(n,\mathbb{R})$: $\big(H_{\mathbb{C}} \times GL(k,\mathbb{C}), M(n,k;\mathbb{C})\big)$ **が開軌道をもつ** ($\Leftarrow$ **概均質ベクトル空間**).

$\Longrightarrow$ $\mathcal{R}_\ell^k$(相対不変超関数) **：（超幾何関数と呼ぼう）は** (1) **と** H **の無限小作用で定義される方程式（超幾何微分方程式と呼ぼう）の解空間に一致する**

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(G/P_{k,n}; L_{\ell,0}) & \overset{\mathcal{R}_\ell^k}{\underset{\to}{\sim}} & (1)\ \text{の解空間} \\ \cup & & \cup \\ H\text{-action} \curvearrowright \{\ \text{相対不変超関数}\ \} & \overset{\sim}{\to} & \{\ \text{超幾何関数}\ \} \end{array}$$

例. (Gelfand-Aomoto **の超幾何関数**) $k = 1$.

$H = GL(1,\mathbb{R})_+ \times \cdots \times GL(1,\mathbb{R})_+ \quad (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ with $\sum_{j=1}^n \alpha_j = -\ell$

$\mathcal{R}_\ell^1 : \mathcal{B}\big(M^o(n,1;\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times; L_\ell\big) \to \mathcal{B}\big(M^o(n,\ell;\mathbb{R})\big)$

相対不変超関数の Radon **変換** $\mathcal{R}_\ell^1(|x_{11}|_\pm^{\alpha_1} \cdots |x_{n1}|_\pm^{\alpha_n})$ **は**

$$\Phi(\alpha, x) = \int_{t_1^2+\cdots+t_\ell^2=1} \prod_{j=1}^n \left| \sum_{\nu=1}^\ell t_\nu x_{j\nu} \right|_\pm^{\alpha_j} \omega \qquad \text{(超幾何関数)}$$

Gelfand の超幾何微分方程式系 $x = \left(x_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le \ell}} \in M^o(n,\ell;\mathbb{R})$

$$\sum_{j=1}^{\ell} x_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{ij}} = \alpha_j\Phi \quad \text{for } 1\le i\le n \quad (H\text{ の左作用})$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{\nu j}} = -\delta_{ij}\Phi \quad \text{for } 1\le i,\ j\le \ell \quad (GL(\ell,\mathbb{R})\text{ の右作用})$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{i_1j_1}x_{i_2j_2}} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{i_2j_1}x_{i_1j_2}} \quad \text{for } 1\le i_1<i_2\le n,\ 1\le j_1<j_2\le\ell \quad (\text{Capelli 型})$$

i) **任意の** $A\in M(n,\mathbb{C})$ **の単純単因子の量子化** $\rightarrow$

任意のスカラー型（退化）主系列表現の零化イデアルの生成元の構成

the annihilator of any generalized Verma module of the scalar type

for $\mathfrak{gl}(n)$ **：**$\epsilon\mapsto 0$ **古典極限も同時に得られる** ([O 2005])

古典極限 ：ベキ零共役類の定義イデアルの生成系の場合

Kostant (regular nilpotent **：全ての固有値が** 0 **の行列全体の** variety)

Weyman (any **ベキ零元**, 1989 $\leftarrow$ **谷崎氏による予想**).

ii) **最小多項式 の一般化：任意の単純** Lie **環** $\mathfrak{g}$ **とそれの非自明有限次元表現** $(\pi, \mathbb{C}^N)$ **と一般スカラー型** Verma **加群** $\mathcal{M}_\Theta(\lambda)$ （or **一般スカラー型退化主系列表現）に対して定義されて計算可能**
([O 2007, O-Oda 2006]).

iii) **一般化**

$$\mathcal{R} : C(O(n)/O(k_1) \times \cdots \times O(k_p)) \to C(O(n)/O(\ell_1) \times \cdots \times O(\ell_q))$$

$$n = k_1 + \cdots + k_p = \ell_1 + \cdots + \ell_q$$

$p = 2,\ q = 2 \quad \Rightarrow O(n)$ **の作用のみで像の特徴付けが可能**

$p = 2,\ q = 3 \quad \Rightarrow GL(n)$ **の作用が必要** ($O(n)$ **の作用では区別不可**)

$O(n) \mapsto \mathfrak{S}_n$: "**有限集合**" **上の** Radon **変換**

$G \supset H_1,\ H_2$ **：部分群**

$$\mathcal{R} : \mathcal{S}(G/H_1) \to \mathcal{S}(G/H_2), \quad (\mathcal{R}\phi)(xH_2) = \int_{H_2/(H_1 \cap H_2)} \phi(xh_2)dh_2$$

$$H_1 \mapsto gH_1g^{-1} \ (g \in G) \quad \text{(twisted Radon 変換)}$$