Kac-Moody ルート系と線型微分方程式

大島利雄（東京大学）*

概要: Riemann 球面上の既約線型微分方程式（不確定特異点は不分岐とする）の空間で，開折，合流，Fourie-Laplace 変換，gauge 変換，一次分数変換の合成で互いに移り合うとき同値と定義したときの同値類の完全代表系が，自明な方程式 $u'=0$ と E_8 基本スペクトル型の一階 Fuchs 型方程式系 — $0, 1, \infty$ の 3 点を確定特異点とし，$0, 1$ での留数行列の最小多項式が 2 次と 3 次で，3 点の留数行列の固有空間の最大次元 3 つの和が行列のサイズ以下 — の集合との合併で与えられることが分かった．開折によって得られる Fuchs 型方程式のスペクトル型は，星型 Kac-Moody ルート系のルートに対応し，これらの変換は，ルートをルートに移すルート束における等長変換を定義する．Weyl 群を真に含むこの変換の作用による虚ルート全体の集合の軌道分解の完全代表系が E_8 基本スペクトル型で与えられること，を示すことによってこの結果が得られる．

1 Fuchs 型方程式のスペクトル型

多項式あるいは有理関数を係数とする線型常微分方程式，すなわちリーマン球面上の線型常微分方程式は，既約で不確定特異点を持たないならば，特異点における留数行列 A_j を用いた一階 Fuchs 型方程式系

$$\mathcal{M}: \frac{du}{dx} = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{A_j}{x-c_j} u \qquad (A_j \in M(n,\mathbb{C}))$$

に表せる（既約とは，D-加群やモノドロミー表現の意）．なお, 無限遠点での留数行列 $A_p = A_\infty$ は

$$A_p = -(A_1 + \cdots + A_{p-1}) \tag{1.1}$$

で与えられる．A_j の共役類は方程式の（一般化）**Riemann scheme**（cf. [12]）

$$\left\{ \begin{array}{cc} x=c_j\ (j=1,\ldots,p-1) & x=\infty \\ [\lambda_{j,1}]_{m_{j,1}} & [\lambda_{p,1}]_{m_{p,1}} \\ \vdots & \vdots \\ [\lambda_{j,n_j}]_{m_{j,n_j}} & [\lambda_{p,n_p}]_{m_{p,n_p}} \end{array} \right\}$$

を，A_j の（一般）固有値（**特性指数**という）の重複度データはスペクトル型

$$n = m_{j,1} + \cdots + m_{j,n_j} \quad (j=1,\ldots,p) \tag{1.2}$$

を定めて，方程式の基本的な局所構造を記述している．すなわち，局所解

$$\begin{array}{ll} u \sim C_{j,\nu,i}(x-c_j)^{\lambda_{j,\nu}} & (x \to c_j,\ \ i=1,\ldots,m_{j,\nu},\ \nu=1,\ldots,n_j), \\ \sim C_{p,\nu,i}(\frac{1}{x})^{\lambda_{p,\nu}} & (x \to \infty,\ \ i=1,\ldots,m_{p,\nu},\ \nu=1,\ldots,n_p) \end{array}$$

の存在を意味している．

*2026 年 5 月 15 日の ALTReT 2026（於伊香保）での講演に基づく

A_j の共役類は,（一般）固有値 $\lambda_{j,\nu}$ とその重複度 $m_{j,\nu}$ で定まり，$[A_j] = \{[\lambda_{j,\nu}]_{m_{j,\nu}} \mid \nu = 1, \dots, n_j\}$ と表す．ここで **ordered**, すなわち

$$m_{j,1} \geq m_{j,2} \geq \cdots \geq m_{j,n_j} \quad (j = 1, \dots, p)$$

となっているとすると，A_j に対する条件は次のようになる．

$$\operatorname{rank} \prod_{\nu=1}^{k} (A_j - \lambda_{j,\nu}) = n - m_{j,1} - \cdots - m_{j,k} \quad (k = 1, \dots, n_j).$$

定義 1.1. 正整数の分割の組 (1.2) を**スペクトル型**といい

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &:= \big(m_{j,\nu}\big)_{\substack{1 \leq \nu \leq n_j \\ 1 \leq j \leq p}} \\ &= m_{1,1} \cdots m_{1,n_1},\ \dots,\ m_{p-1,1} \cdots m_{p-1,n_{p-1}},\ m_{p,1} \cdots m_{p,n_p} \\ &= \big[[m_{1,1}, \dots, m_{1,n_1}], \dots, [m_{p-1,1}, \dots, m_{p-1,n_{p-1}}], [m_{p,1}, \dots, m_{p,n_p}]\big] \end{aligned}$$

などと表記し，$\operatorname{ord} \mathbf{m} = n$ を $\mathbf{m}$ の**階数**という．Fuchs 型方程式 $\mathcal{M}$ の留数行列から定まるスペクトル型を $\mathcal{M}$ のスペクトル型といい，既約 Fuchs 型方程式のスペクトル型となり得る $\mathbf{m}$ は**既約実現可能**という．

例 1.2. 一般超幾何級数 ${}_nF_{n-1}(x)$ は特異点 1 の近傍で $n-1$ 次元の正則解をもつ n 階の方程式の解となるが,，その方程式はスペクトル型が

$$\begin{aligned} {}_nF_{n-1} : n = \overbrace{1 + \cdots + 1}^{n} = (n-1) + 1 = \overbrace{1 + \cdots + 1}^{n}, \\ 1 \cdots 1, (n-1)1, 1 \cdots 1 = 1^n, (n-1)1, 1^n \\ \big[[1, \dots, 1], [n-1, 1], [1, \dots, 1]\big] \end{aligned}$$

となることで特徴づけられる．スペクトル型での方程式の特徴づけとしては

Gauss : $11, 11, 11$ $\quad$ ($\operatorname{ord} = 2$, 特異点：$\{0, 1, \infty\}$)
${}_3F_2$: $111, 21, 111$ $\quad$ ($\operatorname{ord} = 3$, $\{0, 1, \infty\}$, 1 の近傍で 2 次元の正則解をもつ)
Heun: $11, 11, 11, 11$ ($\operatorname{ord} = 2$, 特異点：$\{0, 1, y, \infty\}$ $\Rightarrow$ Painlevé VI)
Jordan-Pochhammer : $21, 21, 21, 21$ ($\Rightarrow$ 特異点 y も変数とみなすと Appell's F_1 となる)

2 Middle convolution

$\mathcal{M}$ の解 $u(x)$ の gauge 変換 $u(x) \mapsto (x-c)^{\lambda} u(x)$ や Riemann-Louville 変換 $u(x) \mapsto \int_c^x u(t)(t-x)^{\mu-1} dt$ から，方程式 $\mathcal{M}$ の既約性を保つ可逆変換が定義され，スペクトル型 $\mathbf{m}$ の変換も誘導される．

定義 2.1 (middle convolution, [2], [9]). $\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{p}$ に対する $\mathbf{m}$ の middle convolution $\operatorname{mc}_\sigma \mathbf{m}$ とは：

$$\begin{aligned} &\operatorname{mc}_\sigma \mathbf{m} := \Big(m_{j,\nu} - \delta_{\nu,\sigma_j} d_\sigma(\mathbf{m})\Big)_{\substack{1 \leq \nu \leq n_j \\ 1 \leq j \leq p}}, \\ &d_\sigma(\mathbf{m}) := m_{1,\sigma_1} + \cdots + m_{p,\sigma_p} - (p-2) \cdot \operatorname{ord} \mathbf{m} \quad (m_{j,\nu} = 0 \text{ if } \nu \leq 0 \text{ or } \nu > n_j). \end{aligned}$$

定理 2.1 ([9]). $\mathbf{m}$：既約実現可能 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{mc}_\sigma \mathbf{m}$：既約実現可能，あるいは $\operatorname{ord} \mathbf{m} = 1$.

$\operatorname{ord} \operatorname{mc}_\sigma \mathbf{m} < \operatorname{ord} \mathbf{m}$ となるとき（$\Leftrightarrow d_\sigma(\mathbf{m}) > 0$ *cf.* (2.1)），$\operatorname{mc}_\sigma \mathbf{m}$ を $\mathbf{m}$ の **Katz 簡約化**という．特に $d_\sigma(\mathbf{m})$ が極大となる σ の場合は，**極大 Katz 簡約化**という．

定義 2.2 (index of rigidity, [9]). 以下で与えられる偶数を $\mathbf{m}$ の**リジッド指数**という

$$\operatorname{idx} \mathbf{m} := \sum_{\substack{1 \leq \nu \leq n_j \\ 1 \leq j \leq p}} m_{j,\nu}^2 - (p-2)(\operatorname{ord} \mathbf{m})^2.$$

注意 2.3. (1) m_{j,σ_j} $(1 \le j < p)$ は, gauge 変換後の $x = c_j$ に置ける留数行列の特性指数 0 の重複度に, m_{p,σ_p} は $x = \infty$ における特性指数 μ の重複度に対応する.

通常は $m_{j,\nu} > 0$ とするが, 便宜的に $m_{j,\nu} = 0$ となることも許容して考えると都合がよい. なお, 重複度 $m_{j,\nu} = 0$ となるものがある場合は, それを除いたスペクトル型と同一視する.

(2) 以下が成り立つ.

$$\operatorname{ord} \mathrm{mc}_\sigma \mathbf{m} = \operatorname{ord} \mathbf{m} - d_\sigma(\mathbf{m}), \tag{2.1}$$

$$\mathrm{mc}_\sigma^2 = \mathrm{id}, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{idx} \mathrm{mc}_\sigma \mathbf{m} = \operatorname{idx} \mathbf{m}. \tag{2.3}$$

例 2.4. $\mathrm{mc}_{(1,1,1)} : \underline{1}11, \underline{2}1, \underline{1}11 \xrightarrow{1+2+1-1\cdot 3=1} 011, 11, 011 \qquad \underline{11}, \underline{1}1, \underline{11} \xrightarrow{3-2} 1, 1, 1$

$\underline{2}11, \underline{2}11, \underline{1}111 \xrightarrow{5-4=1} \underline{1}11, \underline{1}11, 0\underline{1}11 \xrightarrow{3-3=0} 111, 111, 111$

$\underline{4}31, \underline{3}311, \underline{4}1111 \xrightarrow{11-8=3} 1\underline{3}1, \underline{3}11, \underline{1}1111 \xrightarrow{7-5=2} \times$

最後の例では, mc が正整数の分割の組への写像として定義できない. このことから, $431, 3311, 41111$ が既約方程式のスペクトル型になり得ないことが結論される.

3 星型 Kac-Moody ルート系

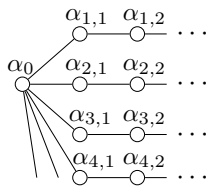
定義 3.1. 以下のような星形 Kac-Mooody ルート系 (Π, W) を考える.

$$(\alpha|\alpha) = 2 \quad (\alpha \in \Pi := \{\alpha_0,\, \alpha_{j,\nu} \mid j \ge 1,\, \nu \ge 1\})$$

$$(\alpha_0|\alpha_{j,\nu}) = -\delta_{\nu,1}$$

$$(\alpha_{i,\mu}|\alpha_{j,\nu}) = \begin{cases} 0 & (i \ne j \quad \text{or} \quad |\mu - \nu| > 1) \\ -1 & (i = j \quad \text{and} \quad |\mu - \nu| = 1) \end{cases}$$

$$s_\alpha \,:\, x \mapsto x - (x|\alpha)\alpha \quad (\alpha \in \Pi), \quad W := \langle s_\alpha | \alpha \in \Pi \rangle$$



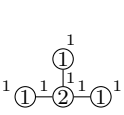
定義 3.2. 整数 n の分割の組 $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})$ ((1.2) の形) と, このルート束の元 $\alpha_{\mathbf{m}}$ との対応を定義する:

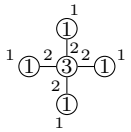
$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{m}} &:= n\alpha_0 + \sum_{j\ge1}\sum_{i\ge1}\Big(\sum_{\nu>i} m_{j,\nu}\Big)\alpha_{j,i} \qquad (n = \operatorname{ord}\mathbf{m}) \\ &= n\alpha_0 + \sum_{j\ge1}\sum_{\nu\ge1} n_{j,\nu}\alpha_{j,\nu}, \\ m_{j,\nu} &= n_{j,\nu-1} - n_{j,\nu} \quad (j = 1, 2, \dots,\ \nu = 1, 2, \dots,\ \ n_{j,0} = n). \end{aligned}$$

例 3.3. $\mathbf{m}$ と $\alpha_{\mathbf{m}}$ との対応例 (図の円の中は単純ルートの係数 $n_{j,\nu}$ で, $m_{j,\nu}$ はその差).

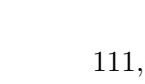
$$\texttt{11,11,11} \leftrightarrow \alpha = 2\alpha_0 + \alpha_{1,1} + \alpha_{2,1} + \alpha_{3,1}$$

$$\texttt{21,21,21,21} \leftrightarrow \alpha = 3\alpha_0 + \alpha_{1,1} + \alpha_{2,1} + \alpha_{3,1} + \alpha_{4,1}$$

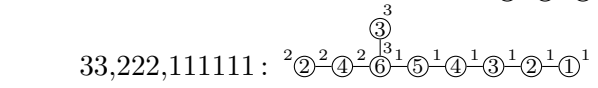




111,21,111 :



33,222,111111 :



命題 3.4. 定義 *3.2* のもとで, 以下が成り立つ.

$$\alpha_{\mathrm{mc}_{(1,\dots,1)}\mathbf{m}} = s_{\alpha_0}\alpha_{\mathbf{m}}, \qquad \alpha_{\mathbf{m}'} = s_{\alpha_{j,\nu}}\alpha_{\mathbf{m}} \quad (\mathbf{m}' = \cdots \overset{\frown}{m_{j,\nu+1} m_{j,\nu}} \cdots)$$

$$\operatorname{idx}\mathbf{m} = (\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}), \qquad d_{(1,\dots,1)}\mathbf{m} = (\alpha_0|\alpha_{\mathbf{m}}).$$

特に, *middle convolution* によるスペクトル型の変換は, ルート束における *Weyl* 群作用とみなせる.

4 Deligne-Simpson 問題

与えられた（一般化）Riemann scheme をもつ既約 Fuchs 型方程式の存在条件の決定問題は（加法的）**Deligne-Simpson 問題**と呼ばれたが，それは以下のように解決された．.

定理 4.1 ([11, 9, 1, 12])**.** スペクトル型 $\mathbf{m}$ が既約実現可能であることの必要十分条件は，$\alpha_{\mathbf{m}}$ が星形 *Kac-Moody* ルート系のルートとなること（ただし，$\operatorname{idx}\mathbf{m}=0$ のときは，条件 $\mathrm{GCD}\{m_{j,\nu}\}=1$ を課す）．また，行列の組 $(\bar{A}_j)\in M(n,\mathbb{C})^p$ のスペクトル型が既約実現可能ならば，$A_j\sim\bar{A}_j$（A_j は $\bar{A}_j$ に共役）で

$$A_1+\cdots+A_p\in\mathbb{C}$$

を満たす既約な，すなわち非自明な共通不変部分空間を持たない $(A_1,\dots,A_p)$ が存在する．

注意 4.1. (1) Kostov [11] は Deligne-Simpson 問題とよび，陰関数定理を用いて特別な場合を調べた．Katz [9] は middle convolution を導入して本質的に寄与し，リジッドな場合に解いた．Crawley-Boevey [1] は Quiver の表現論を用いて一般的に解決した．[12] は対応する問題を単独高階方程式の場合に解いた．

(2) Fuchs 型方程式 $\mathcal{M}$ の留数行列 A_j は，(1.1) より $\operatorname{trace}A_1+\cdots+\operatorname{trace}A_p=0$ を満たす（Riemann scheme における Fuchs 条件）．定理 4.1 において，$\bar{A}_j$ の trace の和が 0 となっていれば，$(A_1,\dots,A_p)$ は Fuchs 型方程式の留数行列として実現できる．

(3) $\mathbf{m}$ がリジッドなときは，実現された方程式 $\mathcal{M}$ は Riemann scheme から一意的に定まるが（cf. 定理 4.2）$\bar{A}_j$ の固有値が特別な関係をもつ場合に可約になることがある（cf. [1, 12]）．

定理 4.2 ([9])**.** $A_1+\cdots+A_p=0$ を満たす $(A_j)\in M(n,\mathbb{C})^p$ のスペクトル型を $\mathbf{m}$ とするとき

$$\dim\{(\tilde{A}_1,\dots,\tilde{A}_p)\in M(n,\mathbb{C})^p\mid \tilde{A}_j\sim A_j,\ \tilde{A}_1+\cdots+\tilde{A}_p=0\}/GL(n,\mathbb{C})=2-\operatorname{idx}\mathbf{m}$$

これは方程式に *Riemann scheme* では決まらないパラメーター（**アクセサリー・パラメーター**という）が $2-\operatorname{idx}\mathbf{m}$ 個存在することをいっている．

定義 4.2. $\mathbf{m}$：**リジッド** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathbf{m}$：既約実現可能で $\operatorname{idx}\mathbf{m}=2$ $\Leftrightarrow$ $\alpha_{\mathbf{m}}$：実ルートで $\operatorname{ord}\mathbf{m}>0$

注意 4.3. (1) $\operatorname{idx}\mathbf{m}$ と $d_\sigma(\mathbf{m})$ の定義から下式が分かる．

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_j}m_{j,\nu}(m_{j,1}-m_{j,\nu})=d_{(1,\cdots,1)}(\mathbf{m})\cdot\operatorname{ord}\mathbf{m}-\operatorname{idx}\mathbf{m}.$$

(2) $\operatorname{idx}\mathbf{m}>0$ としよう．$\mathbf{m}$ が ordered とすると（番号をつけかえれば仮定してよい）$d_{(1,\cdots,1)}(\mathbf{m})>0$ となるので，$\operatorname{ord}\mathbf{m}\neq1$ ならば **Katz 簡約化**が可能となり，定理 4.1 は定理 2.1 から分かる．

方程式 $\mathcal{M}$ が既約でスペクトル型 $\mathbf{m}$ が $\operatorname{idx}\mathbf{m}>0$ を満たすなら（既約リジッドな方程式という），$\alpha_{\mathbf{m}}$ は正の実ルートとなる．このとき $\mathcal{M}$ が自明な方程式 $u'=0$ から addition と middle convolution を何度か施して得られるという Katz の結果は，正の実ルート $\alpha_{\mathbf{m}}$ が α_0 の Weyl 群軌道に入っていることに対応している．このような観点に基づいて，リジッドな方程式について，解の積分やべき級数での表示，既約性の判定，接続問題などの解析が進展した（cf. [12]).

(3) このノートで対象としている $\operatorname{idx}\mathbf{m}\leq0$ の場合を考えよう．$\mathbf{m}$ は ordered とする．$d_{(1,\cdots,1)}(\mathbf{m})>0$ ならば $\mathrm{mc}_{(1,\dots,1)}\mathbf{m}$ によって，既約実現性は $\operatorname{ord}\mathbf{m}$ がより低い場合に帰着できる．一方，Crawley-Boevy [1] は，quiver の表現論を使って，$d_{(1,\cdots,1)}(\mathbf{m})\leq0$ となる $\mathbf{m}$ が既約実現なことを示し，定理 4.1 を証明した．なお，$\mathbf{m}$ が ordered で $d_{(1,\cdots,1)}(\mathbf{m})\leq0$ という条件は，以下と同値である．

$$(\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha)\leq0\quad(\forall\alpha\in\Pi).$$

これは，$\alpha_{\mathbf{m}}$ が Weyl 群の基本領域に属する正の虚ルートという条件に等しい（cf. [8]).

アクセサリー・パラメーターをもつ既約方程式 $\mathcal{M}$ は, middle convolution と addition で Katz 簡約化ができないスペクトル型（基本スペクトル型）をもつ方程式まで階数を下げることができる．そのようなスペクトル型は，Weyl 群の基本領域に属する正の虚ルートに対応しており，リジッド指数を決めれば有限個に限ることが，以下のように知られている．

なお，特異点の順序を入れ替えてもスペクトル型の性質は変わらないので，以下のように正規形の基本スペクトル型 $\mathbf{m}$ を考察すればよい．

定義 4.4. 正整数 n の分割の p 組 $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})$ が **fundamental** (基本型, cf. [12]) とは,

$$d_\sigma(\mathbf{m}) \le 0 \quad (\forall \sigma \in \mathbb{Z}^p_{\ge 0}) \tag{4.1}$$

となること．ただし，$\operatorname{idx}\mathbf{m} = 0$ のときは条件 $\mathrm{GCD}\{m_{j,\nu}\} = 1$ を仮定する．

なお，$\mathbf{m}$ が ordered であれば, (4.1) は、以下の条件と同値となる．

$$m_{1,1} + \cdots + m_{p,1} \le (p-2)\operatorname{ord}\mathbf{m}.$$

$\mathbf{m}$ の分類においては，番号の入れ替えで移る $\mathbf{m}$ を同一視するが，正規形にすれば一意に表せる．

$$\mathbf{m}:\textbf{正規形} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} m_{j,1} \ge m_{j,2} \ge \cdots \ge m_{j,n_j} > 0, \quad n_j > 1 & (1 \le j \le p) \\ m_{j,\nu} = m_{j+1,\nu}\ (1 \le \nu < k_j) \text{ and } m_{j,k_j} > m_{j+1,k_j} \text{ or } k_j = n_j{+}1 & (\exists k_j,\ 1 \le j < p) \end{cases}$$

$\mathbf{m}$: $(n_1, \ldots, n_p)$ 型 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ (1.2) で，$m_{j,\nu} \ne 0$.

$\mathbf{m}$: $(n_1, n_2, *)$ 型 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ある正整数 n_3 に対して (n_1, n_2, n_3) 型.

$\mathbf{m}$ が E_8-fundamental（E_7-fundamental, E_6-fundamental, あるいは D_4-fundamental）とは，$\mathbf{m}$ が fundamental で，$(2,3,*)$ 型（$(2,4,*)$ 型，$(3,3,*)$ 型，あるいは $(2,2,2,*)$ 型）となること．

定義 4.5. 以下のように記号を定義する．

$\mathcal{P}$: Fuchs 型方程式の既約実現可能スペクトル型全体

$\hat{\mathcal{P}}$: 不分岐不確定特異点を許した方程式の既約実現可能スペクトル型全体（cf. 定理 5.1）

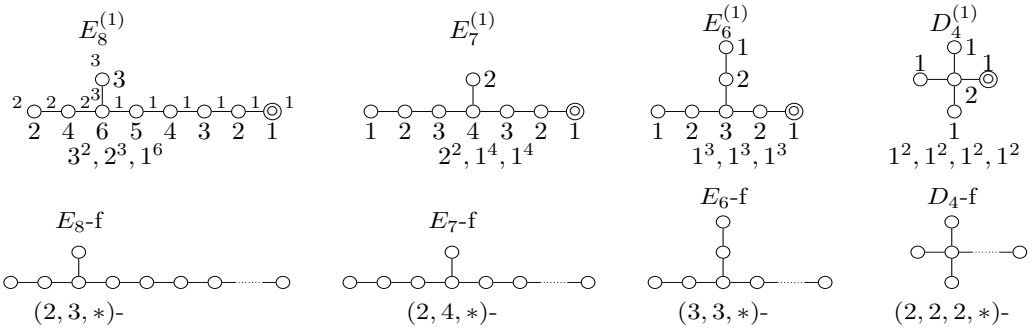
$\mathcal{F}$: fundamental な正規形の（あるいは番号の入れ替えで移るものを同一視した）スペクトル型全体

$\mathcal{F}_\ell := \{\mathbf{m} \in \mathcal{F} \mid \operatorname{idx}\mathbf{m} = -\ell\}$

$\mathcal{F}^T := \{\mathbf{m} \in \mathcal{F} \mid \mathbf{m} : T\text{-fundamental}\}$ $\quad (T = E_8,\ E_7,\ E_6 \text{ or } D_4)$

スペクトル型が middle convolution mc_σ と分割の組の順序の入れ替え（特異点の入れ替えに対応）で互いに移る，ということで定まる同値関係を $\underset{\text{mc}}{\sim}$ とおく．このとき

$$\mathcal{P}/\underset{\text{mc}}{\sim} \simeq \mathcal{F} \cup \{mathbf1\}, \quad \mathcal{F} = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_{2k} \quad (\mathbf{1} \text{ は自明方程式 } u' = 0 \text{ のスペクトル型}).$$



注意 4.6. (1) (4.3) を満たす正ルート $\alpha_{\mathbf{m}}$ が虚の正ルートの W 軌道の代表元となることが (4.5) に対応.
(2) 具体的ないくつかの $\mathcal{F}_\ell$ は [12, 16] に表があるが，以下に注意.

定理 4.3 ([11]). $\mathcal{F}_0 = \{33, 222, 111111 \quad 22, 1111, 1111 \quad 111, 111, 111 \quad 11, 11, 11, 11\}$.

定理 4.4 ([12]). $|\mathcal{F}_\ell| < \infty \quad (\ell = 0, 2, 4, 6, \ldots)$.

命題 4.7. *ordered* な $(2, 3, *)$ スペクトル型 $\mathbf{m} = m_{11}m_{12},\ m_{21}m_{22}m_{23},\ m_{31}m_{32}\cdots m_{3,n_3}$ に対し，

$$m_{12} \geq m_{21} + m_{31} \tag{4.2}$$

は $\mathbf{m}$ が *fundamental* となるための必要十分条件となる．この条件が満たされていれば

$$m_{11} \geq m_{12} > m_{21} \geq m_{22} \geq m_{23} > m_{31} \geq m_{32} \geq \cdots \geq m_{3,n_3}$$

で，$n_3 \geq 6$ となる．

一方，$\operatorname{ord}\mathbf{m} = n$ となる $\mathbf{m} \in \mathcal{F}^{E_8}$ は，以下の手順ですべて得られる．すなわち, 不等式

$$\tfrac{n}{3} \leq m_{21} < m_{12} \leq \tfrac{n}{2} \tag{4.3}$$

を満たす整数の組 (m_{21}, m_{12}) を定め，(4.2) を満たすように m_{31} を選ぶ．さらに m_{22} は $\frac{n-m_{21}}{2} \leq m_{22} \leq m_{21}$ を満たすように選ぶと，$m_{11} = n - m_{12}$，$m_{23} = n - m_{21} - m_{22}$ となり，$m_{31}, m_{32}, \ldots$ は広義単調減少列で和が n になるように定めればよい．なお，$n = 6$ あるいは $n > 7$ のときに限り $\mathbf{m} \in \mathcal{F}^{E_8}$ が存在し，$n = 6$ のときは $\mathbf{m} = 3^2, 2^3, 1^6$ のみとなる．

Proof. ordered な $(2, 3, *)$ 型の $\mathbf{m}$ は

$$\begin{aligned} n &= m_{11} + m_{12} = m_{21} + m_{22} + m_{23} = m_{31} + \cdots + m_{3,n_3}, \\ m_{11} &\geq m_{12},\ m_{21} \geq m_{22} \geq m_{23},\ m_{31} \geq m_{32} \geq \cdots \geq m_{3,n_3} \end{aligned} \tag{4.4}$$

となっていて, $\mathbf{m}$ が fundamental なら

$$d_{(1,1,1)}(\mathbf{m}) = m_{11} + m_{21} + m_{31} - n = m_{21} + m_{31} - m_{12} \leq 0 \tag{4.5}$$

であるから，命題の最初の主張が得られる．

(4.4) より $m_{12} \leq \frac{n}{2}$, $m_{21} \geq \frac{n}{3}$ わかり，(4.5) より $m_{21} \leq m_{12} - m_{31} < m_{12}$ となって (4.3) を得る．なお，(4.3) を満たす整数 m_{21}, m_{12} は，$n = 6$ あるいは $n > 7$ のときのみ存在する．特に $n = 6$ のときは $(m_{21}, m_{12}) = (2, 3)$ となる．また

$$\begin{aligned} m_{31} &\leq n - m_{11} - m_{21} \leq n - \tfrac{n}{2} - \tfrac{n}{3} \leq \tfrac{n}{6}, \\ m_{23} - m_{31} &\geq (n - m_{21} - m_{22}) - (n - m_{11} - m_{21}) = m_{11} - m_{22} \geq m_{12} - m_{21} > 0. \end{aligned}$$

これらから命題は容易に得られる． □

5 合流と開折

∞ に Poincaré rank が 1 の得点をもつ方程式の Riemann scheme は

$$\left\{ \begin{array}{cc} x = \infty & x = c_j\ (j = 2, \ldots, p-1) \\ [\lambda_1^{(1)} x + \lambda_{1,1}^{(0)}]_{m_{1,1}^{(0)}} & [\lambda_{j,1}]_{m_{j,1}} \\ \vdots & \vdots \\ [\lambda_{n_1}^{(1)} x + \lambda_{n_1,R_{n_1}}^{(0)}]_{m_{n_0,R_{n_0}}^{(0)}} & [\lambda_{j,n_j}]_{m_{j,n_j}} \end{array} \right\} \tag{5.1}$$

となり，∞ で漸近展開

$$u \sim C_{\nu,k,\ell} (\tfrac{1}{x})^{\lambda_{\nu,k}^{(0)}} e^{-\lambda_\nu^{(1)} x} \quad (x \to \infty,\ 1 \leq \ell \leq m_{\nu,k}^{(0)},\ 1 \leq k \leq R_\nu)$$

をもつ解があることを表している．このとき，∞ でのスペクトルを

$$\left\{[\lambda_\nu^{(1)}x+\lambda_{\nu,k}^{(0)}]_{m_{\nu,k}^{(0)}} \mid 1\le k\le R_\nu,\ 1\le \nu\le n_1\right\}$$

と書く．指数項でまとめた重複度を

$$m_\nu^{(1)}=m_{\nu,1}^{(0)}+\cdots+m_{\nu,R_\nu}^{(0)}$$

とおくと n の分割 $\{m_{\nu,k}^{(0)}\}$ は分割 $n=m_1^{(1)}+\cdots+m_{n_1}^{(1)}$ の細分となる．一般に，Poincaré rank が k の（不分岐）不確定特異点での特性指数は k 次の多項式で表され，スペクトル型は n の分割 k+1 個の細分の列となる（cf. [14]）．

このようなスペクトル型を以下のように表す（括弧で囲む表し方と | で並べる表し方．cf. [6, 14]）．

$$\begin{aligned}\mathbf{m}:&(m_{1,1}^{(0)}\cdots m_{1,R_1}^{(0)})\cdots(m_{n_1,1}^{(0)}\cdots m_{n_1,R_{n_1}}^{(0)}),m_{2,1}\cdots,\cdots m_{p-1,n_{p-1}}\\ &=m_{1,1}^{(0)}m_{1,2}^{(0)}\cdots m_{n_1,R_{n_1}}^{(0)}\,|\,m_1^{(1)}\cdots m_{n_1}^{(1)},m_{2,1}\cdots,\cdots,m_{p-1,1}\cdots m_{p-1,n_{p-1}}\\ \text{Unfolding of }\mathbf{m}:&\ m_{1,1}^{(0)}m_{1,2}^{(0)}\cdots m_{n_1,R_{n_1}}^{(0)},\ m_{1,1}\cdots m_{1,n_1},m_{2,1}\cdots,\cdots,m_{p-1,1}\cdots m_{p-1,n_{p-1}}\end{aligned}$$

定義 5.1. スペクトル型 $\mathbf{m}$ に対し，細分構造を付加することを**合流** (**confluence**)，その逆操作（ | を使った表示では，| を , に変える）を**開折** (**unfolding**) という．

例 5.2. $33,222,111111\xrightarrow{\text{cf}}$

$111111|222,33=(11)(11)(11),33=11\cdot11\cdot11|222,33$　　$111111|33,222=(111)(111),222$

$42,21111,21111\xrightarrow{\text{cf}}$

$11112|42,21111=(1111)(2),21111$　　$21111|42,21111=(211)(11),21111$

$21111|21111,42=(2)(1)(1)(1),42$　　$11112|11112|42=((1)(1)(1)(1))((2))$

$21111|21111|42=((2)(1)(1))((1)(1))=2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1|211\cdot11|42$

注意 5.3. 不分岐不確定特異点を許した Riemann 球面上の既約線型微分方程式にも，middle convolution やリジッド指数が定義され，それは上のように定義されたスペクトル型の confluence/unfolding と整合的になっている．そのような方程式で middle convolution で階数が減らせない，すなわち fundamental なもののスペクトル型は，リジッド指数毎に有限個しかない．

この有限性は Fuchs 型の定理 4.4 の拡張であるが，一般対称 Kac-Moody ルート系の虚ルートの空間における Weyl 群軌道の “型” の有限性を示すことによって得られた（cf. [7]）．すなわち，Dynkin 図式を用いたルートの表示に $\overset{m}{\circ}\!\!-\!\!\overset{m}{\circ}\!\!-\cdots-\!\!\overset{m}{\circ}$ という部分グラフがあれば，それはリジッド指数を変えずにいくらでも長くでき，同じスペクトル型に対応するので，それを同一視して “型” とした．

不分岐不確定特異点を許す場合の加法的 Deligne-Simpson 問題は以下のように解決された．

定理 5.1 ([4, 5])**.** $\mathbf{m}$ を細分構造を持ったスペクトル型とするとき

$\mathbf{m}$ が既約実現可能 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{m}$ の開折が既約実現可能

これの解析的実現が以下のように得られている．

定義 5.4 ([13, 14])**.** 不確定特異点をもつ線型微分方程式 $\mathcal{N}$ に対し，特異点を正則パラメーターにもつリジッド指数が一定な線型微分方程式の族で，$\mathcal{N}$ が族において確定特異点の合流となっているものを $\mathcal{N}$ の versal unfolding という．

たとえば，∞ のみに Poincaré rank 1 の不確定特異点を持つ方程式 $\mathcal{N}$ の versal unfolding は

$$\mathcal{M}_b:\frac{du}{dx}=\frac{A_1}{1-bx}u+\sum_{j=2}^{p-1}\frac{A_j}{x-c_j}u\quad(|b|\ll1)$$

と表せて，A_j は b を解析的パラメーターとし，$\operatorname{idx}\mathcal{M}_b=\operatorname{idx}\mathcal{N}$ かつ $\mathcal{N}=\mathcal{M}_0$ で特徴づけられる．

定理 5.2 ([13, 10, 5])**.** *Riemann* 球面上の既約線型微分方程式 $\mathcal{N}$ の不確定特異点が不分岐なら，$\mathcal{N}$ の *versal unfolding* が存在する．

6　Harnad 双対（Fourier-Laplace 変換）

$u(x)$ の Fourier-Laplace 変換 $u(x) \mapsto \int_c^\infty u(t)e^{-xt}dt$ は，微分方程式に $(x, \frac{d}{dx}) \mapsto (-\frac{d}{dx}, x)$ という変換（Harnad 双対 [3]）を引き起こすが，それと gauge 変換とを組み合わせた変換は，∞ に Poincaré rank 1 の不確定特異点をもつ既約方程式の間の変換となり，それらのスペクトル型の変換 Hd_σ を引き起こす．なお, σ は有限の各特異点で特性指数を指定する番号である（middle convolution のときと同じ）．

有限な特異点は ∞ の不確定特異点に変換され，特異点の位置は特異点での解の指数項（特性指数を与える 1 次式の 1 次の係数）に，特性指数はべきの項（特性指数の定数項）対応する．σ は正則な局所解に対応し, ∞ のスペクトル型には寄与しない．∞ の不確定特異点は，逆に有限の特異点に変換され，変換後の ∞ のスペクトル型から定まる階数（定義 6.1 の最後の式の左辺）に対応して，各有限特異点での正則解の重複度（定義 6.1 の $m^{(0)}_{k,0}$）が定まる．

方程式の Riemann scheme (5.1) において, $\lambda_{j,1} = 0 \ \ (j = 1, \dots, n_j)$ であるとすると，その方程式の Fourier-Laplace 変換が Hd に対応するが，変換後の方程式の Riemann scheme は

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = \infty & x = -\lambda_i^{(0)} \\ [c_j x + \lambda_{j,\nu}]_{m_{j,\nu}} \ (1 \le j \le p, \ 2 \le \nu \le n_j) & [0]_{\hat{n}-m_i^{(1)}} \\ & [\lambda_{i,\nu}^{(1)}]_{m_{i,\nu}^{(0)}} \ \ (1 \le \nu \le R_i) \end{array} \right\},$$

$$\hat{n} := pn - (m_{1,1} + \cdots + m_{p,1}).$$

Harnad 双対を考えるときは，∞ を最初の特異点として Riemann scheme やスペクトル型を記述しよう．

定義 6.1. ∞ を Poinaré rank 1 の不確定特異点とし，そのほかは確定特異点のみとする方程式のスペクトル型 $\mathbf{m}$ の Harnad 双対 $\mathrm{Hd}\,\mathbf{m}$ は以下で与えられる（$\mathrm{Hd}_{(1,\dots,1)}$ を単に Hd と書く）．

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \big(m_{1,1}^{(0)} \cdots m_{1,R_1}^{(0)}\big) \cdots \big(m_{n_1,1}^{(0)} \cdots m_{n_1,R_{n_1}}^{(0)}\big), \underline{m_{2,1}} m_{2,2} \cdots m_{2,n_2}, \ \dots \ , \underline{m_{q,1}} m_{q,2} \cdots m_{q,n_q} \\ &= m_{1,1}^{(0)} \cdots m_{1,R_1}^{(0)} \cdots m_{n_1,1}^{(0)} \cdots m_{n_1,R_{n_1}}^{(0)} \,|\, m_{1,1} \cdots m_{1,n_1}, \ \underline{m_{2,1}} \cdots m_{2,n_2}, \ \dots \ , \underline{m_{q,1}} \cdots m_{q,n_q} \\ \mathrm{Hd}\,\mathbf{m} &= \big(m_{2,2} \cdots m_{2,n_2}\big) \cdots \big(m_{q,2} \cdots m_{q,n_q}\big), \ \underline{m_{1,0}^{(0)}} m_{1,1}^{(0)} \cdots m_{1,R_1}^{(0)}, \ \dots, \ \underline{m_{n_1,0}^{(0)}} m_{n_1,1}^{(0)} \cdots m_{n_1,R_{n_1}}^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\sum_{j=2}^{q} \sum_{\nu=2}^{n_j} m_{j,\nu} = \sum_{\nu=0}^{R_k} m_{k,\nu}^{(0)} \ \text{ によって } m_{k,0}^{(0)} \text{ が定まる } \ (k = 1, \dots, n_1).$$

注意 6.2. (1) Hd_σ は既約実現性を保ち，$\mathrm{idx}\,\mathrm{Hd}_\sigma\,\mathbf{m} = \mathrm{idx}\,\mathbf{m}$, $\mathrm{Hd}^2 = \mathrm{id}$ を満たす.

(2) 方程式に generic な一次分数変換 L を施すと ∞ は正則点となり，∞ のスペクトル型は自明な分割 $n = n$ となる．そのあと Harnad 双対を考えることにより，middle convolution が実現される：

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= m_{p,1} \cdots m_{1,n_1}, \ \dots \ , m_{p,1} \cdots m_{p,n_p} \ \overset{L}{\simeq} \ n, \underline{m_{1,1}} m_{1,2} \cdots m_{1,n_1}, \ \dots \ , \underline{m_{p,1}} m_{1,2} \cdots m_{p,n_p} \\ &\xrightarrow{\mathrm{Hd}} \ (m_{1,2} \cdots m_{1,n_1}) \cdots (m_{p,2} \cdots m_{p,n_p}), \ \underline{n'} n \qquad (n' = (p-1)n - (m_{1,1} + \cdots + m_{p,1})) \\ &\xrightarrow{\mathrm{Hd}_2} \ n', m'_{1,1} m_{1,2} \cdots m_{1,n_1}, \ \dots \ , m'_{p,1} m_{p,2} \cdots m_{p,n_p} \quad (m'_{j,1} = n' - (n - m_{j,1}) = m_{j,1} - d_{(1,\dots,1)}(\mathbf{m})) \\ &\simeq m'_{1,1} m_{1,2} \cdots m_{1,n_1}, \ \dots \ , m'_{p,1} m_{p,2} \cdots m_{p,n_p} = \mathrm{mc}_{(1,\dots,1)}\,\mathbf{m}. \end{aligned}$$

(3) スペクトル型 $\mathbf{m}$ を合流して不確定特異点を ∞ に移し，それの Harnad 双対の開折を考えることにより，スペクトル型の変換が得られる．

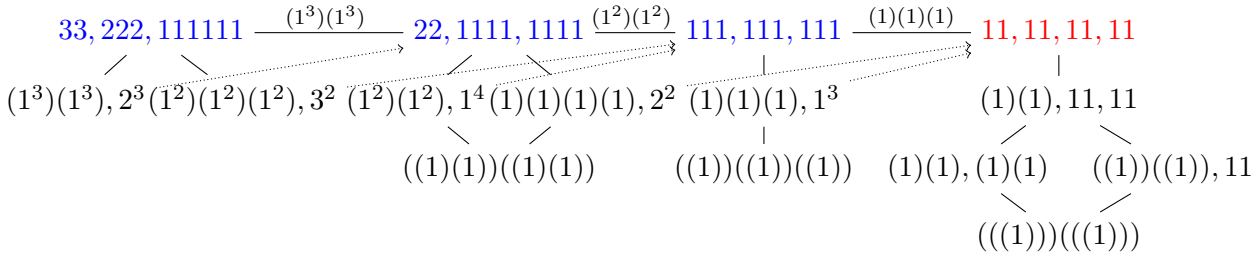
例 6.3. 変換：$\mathbf{m}^{(0)} \xrightarrow{\mathrm{cf}} \mathbf{m}^{(1)} \xrightarrow{\mathrm{Hd}} \mathbf{m}^{(2)} \xrightarrow{\mathrm{uf.}} \mathbf{m}^{(3)}$ の例（cf と uf は合流と開折を表す）：

$$\begin{aligned} &33, 222, 111111 \xrightarrow{\mathrm{cf}} (11)(11)(11), \underline{33} \xrightarrow{\mathrm{Hd}} (3), \underline{111}, \underline{111}, \underline{111} \xrightarrow{\mathrm{uf}} 111, 111, 111 \\ &\quad : \ 33, 222, 111111 \xrightarrow{(1^2)(1^2)(1^2)} 111, 111, 111 \\ &33, 222, 111111 \xrightarrow{\mathrm{cf}} (111)(111), \underline{222} \xrightarrow{\mathrm{Hd}} (22), \underline{1111}, \underline{1111} \xrightarrow{\mathrm{uf}} 22, 1111, 1111 \\ &\quad : \ 33, 222, 111111 \xrightarrow{(1^3)(1^3)} 22, 1111, 1111 \end{aligned}$$

- $\mathcal{F}_0$ は 4 個の元から成る

idx=0 ： 4 個の基本スペクトル型

6: 33,222,111111 $E_8^{(1)}$	4: 22,1111,1111 $E_7^{(1)}$	3: 111,111,111 $E_6^{(1)}$	2: 11,11,11,11 $D_4^{(1)}$



- idx $= 2-2m$ $(m \geq 1)$ の基本スペクトル型の例（$m=1 \Rightarrow D_4^{(1)} = [11]_4 = Ga_1 = FS_1 = Sa_1$ ）

$$[11]_{m+3} : \overbrace{11, 11, \ldots, 11}^{m+3} = [11]_{m+3} \qquad [11]_{m+3}^T : (m+2)^2, (m+1)^2 2, 1^{2m+4}$$

$$FS_m : m1, m1, 1^{m+1}, 1^{m+1} \qquad Sa_m : m^2, m^2, (2m-1)1, 1^{2m}$$

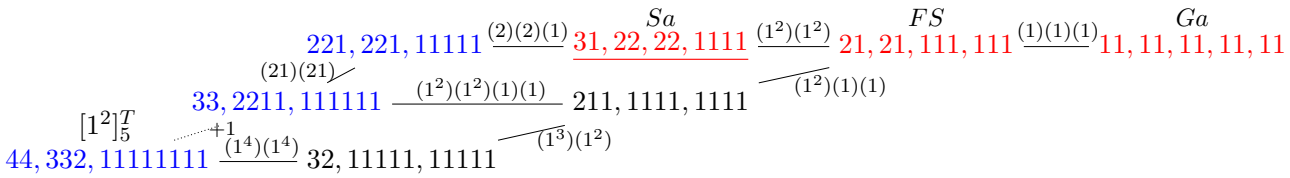
$$D_4^{(m)} : m^2, m^2, m^2, m(m-1)1 \qquad E_6^{(m)} : m^3, m^3, m^2(m-1)1$$

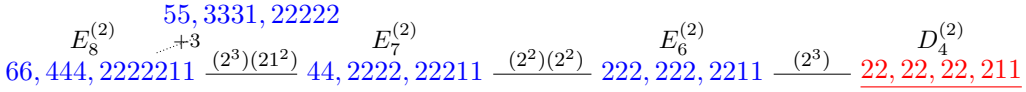
$$E_7^{(m)} : (2m)^2, m^4, m^3(m-1)1 \qquad E_8^{(m)} : (3m)^2, (2m)^3, m^5(m-1)1$$

- $\mathcal{F}_2$ は 13 個，$\mathcal{F}_4$ は 37 個の元からなる

idx $= -2$ ： 13 個の基本スペクトル型（cf. [12, 6, 10]）

8: 44,332,11111111 $[11]_5^T$	6: 33,2211,111111	5: 32,11111,11111	5: 221,221,11111
4: 211,1111,1111	4: 31,22,22,1111 Sa	3: 21,21,111,111 FS	2: 11,11,11,11,11 $[11]_5$
12: 66,444,2222211 $E_8^{(2)}$	10: 55,3331,22222	8: 44,2222,22211 $E_7^{(2)}$	6: 222,222,2211 $E_6^{(2)}$
4: 22,22,22,211 $D_4^{(2)}$			





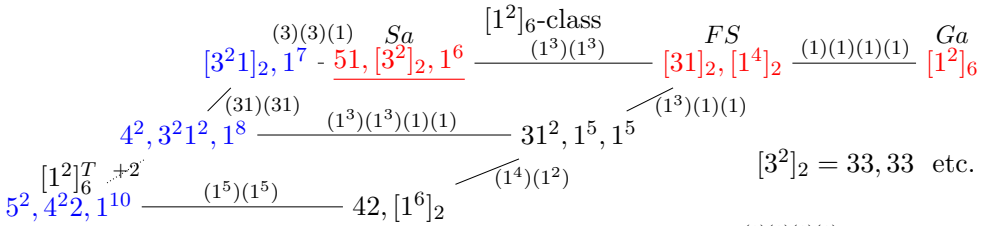
$$44, 332, 11111111 \xleftarrow[1]{\text{mc}} \underline{5}4, 33\underline{3}, \underline{2}1111111 \xrightarrow{\text{cf}} 11111 \cdot 211 | 54, \underline{3}33 \xrightarrow{\text{Hd}} 33, \underline{1}11111, \underline{2}211$$

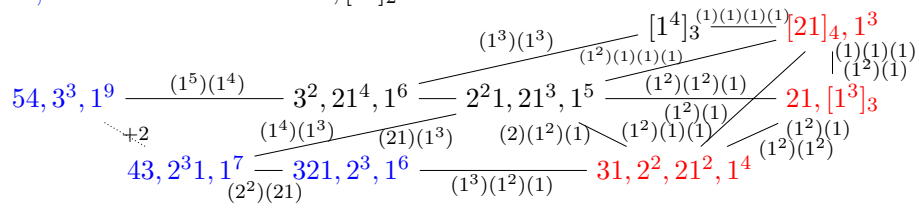
$$66, 444, 2222211 \xleftarrow[1]{\text{mc}} \underline{7}6, \underline{5}44, 2222\underline{2}1 \xleftarrow[1]{\text{mc}} \underline{7}7, 55\underline{4}, 3\underline{2}22221 \xleftarrow[1]{\text{mc}} \underline{8}7, 55\underline{5}, 3\underline{3}22221 \xrightarrow{\text{cf}} 2^4 \cdot 3^2 1 | 87, 5^3$$

$$\xrightarrow{\text{Hd}} 5^2, \underline{2}2^4, \underline{3}3^2 1 \simeq 55, 3331, 22222$$

idx $= -4$: 37 個の基本スペクトル型

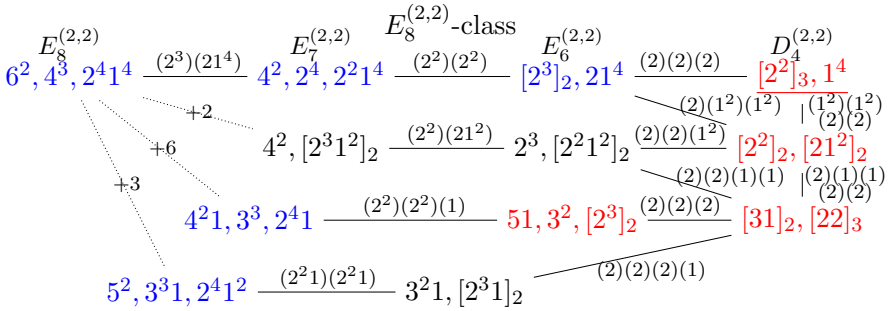
10: 55,442,1111111111 $[11]_6^T$	8: 44,3311,11111111	7: 331,331,1111111	6: 42,111111,111111
6: 51,33,33,111111 Sa	5: 311,11111,11111	4: 31,31,1111,1111 FS	2: 11,11,11,11,11,11 $[11]_6$
18: 99,666,3333321 $E_8^{(3)}$	12: 66,3333,33321 $E_7^{(3)}$	9: 333,333,3321 $E_6^{(3)}$	6: 33,33,33,321 $D_4^{(3)}$
9: 54,333,111111111	7: 43,2221,11111111	6: 321,222,111111	6: 33,21111,11111
5: 221,2111,11111	4: 1111,1111,1111	4: 31,22,211,1111	3: 21,111,111,111
3: 21,21,21,21,111			
12: 66,444,22221111 $E_8^{(2,2)}$	10: 55,3331,222211	9: 441,333,22221	8: 44,22211,22211
8: 44,2222,221111 $E_7^{(2,2)}$	7: 331,2221,2221	6: 222,2211,2211	6: 222,222,21111 $E_6^{(2,2)}$
6: 51,33,222,222	4: 22,22,211,211	4: 31,31,22,22,22	4: 22,22,22,1111 $D_4^{(2,2)}$
14: 77,554,2222222	10: 55,3322,22222	8: 332,332,2222	6: 42,33,33,222





$$55, 442, 1111111111 \xleftarrow[2]{\text{mc}} \cdot \xrightarrow{\text{cf}} 1111111 \cdot 311 | 75, \underline{4}44 \xrightarrow{\text{Hd}} 44, \underline{1}1111111, \underline{3}311$$

$$54, 333, 111111111 \xleftarrow[2]{\text{mc}} \cdot \xrightarrow{\text{cf}} 1^6 \cdot 221 | 65, \underline{4}43 \xrightarrow{\text{Hd}} 43, \underline{1}111111, \underline{2}221$$



$$66, 444, 22221111 \xleftarrow[2]{\text{mc}} \cdot \xrightarrow{\text{cf}} 2221 \cdot 2221 | 77, \underline{6}44 \xrightarrow{\text{Hd}} 44, \underline{1}2221, \underline{1}2221$$

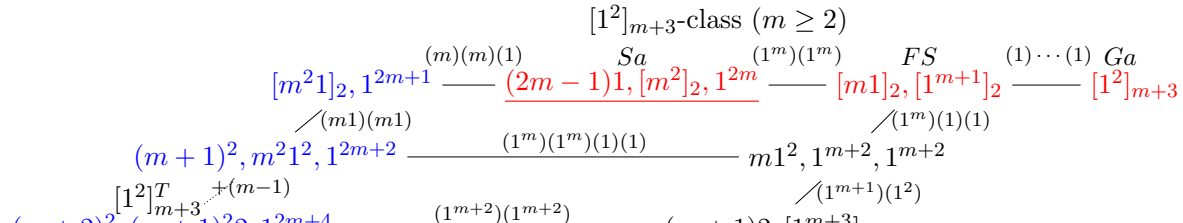
$$66, 444, 22221111 \xleftarrow[6]{\text{mc}} \cdot \xrightarrow{\text{cf}} 2221 \cdot 33 \cdot 41 | 765, \underline{9}9 \xrightarrow{\text{Hd}} \underline{2}2221, \underline{3}33, \underline{4}41$$

$$66, 444, 22221111 \xleftarrow[3]{\text{mc}} \cdot \xrightarrow{\text{cf}} 22211 \cdot 331 | 87, \underline{5}55 \xrightarrow{\text{Hd}} 55, \underline{2}22211, \underline{3}331$$

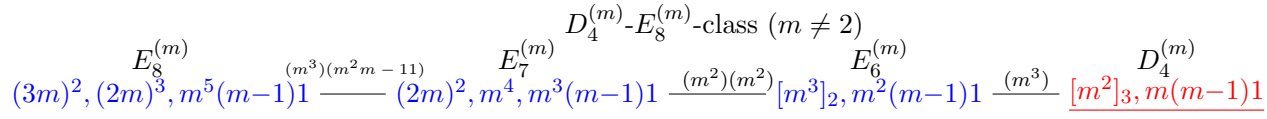
$$77, 554, 2222222 \xleftarrow[1]{\text{mc}} \cdot \xrightarrow{\text{cf}} 2^4 \cdot 32^2 | 87, 5^3 \xrightarrow{\text{Hd}} 5^2, \underline{2}2^4, \underline{3}32^2 = 55, 3322, 22222$$

$$\xrightarrow{\text{cf}} 32 \cdot 32 | 55, \underline{2}2222 \xrightarrow{\text{Hd}} 2222, \underline{3}32, \underline{3}32 \xrightarrow{\text{cf}} 3 \cdot 3 \cdot 2 | 332, \underline{2}222 \xrightarrow{\text{Hd}} 222, \underline{3}3, \underline{3}3, \underline{4}2$$

以下は，$m = 3$ とすると idx $= -4$（idx $= 2 - 2m$）となる．



$$1^{2m+4}, (m+2)^2, (m+1)^22 \xleftarrow[m-1]{\text{mc}} 1^{2m+1} \cdot m1^2 | (2m+1)(m+2), (m+1)^3 \xrightarrow{\text{Hd}} (m+1)^2, \underline{1}1^{2m+1}, \underline{m}m1^2$$



7　主結果

定義 7.1 ([10])**.** 既約実現可能なスペクトル型 $\mathbf{m}$ が，合流，開折，Harnad 双対，一次分数変換に対応する分割の番号の付け替え，のいくつかを組み合わせた変換によって, スペクトル型 $\mathbf{m}'$ に移るとき，$\mathbf{m}$ と $\mathbf{m}'$ は**同値**と定義して，$\mathbf{m} \sim \mathbf{m}'$ と書く．さらに $\mathbf{n} \in \mathcal{P}$ に対し

$$\mathcal{F}_{[\mathbf{n}]} := \{\mathbf{m} \in \mathcal{F} \mid \mathbf{m} \sim \mathbf{n}\}.$$

注意 7.2. (1) たとえば，$3^2, 2^3, 1^6$　$2^3, 3^2, 1^6$　$6, 2^3, 3^2, 1^6$　$2022, 3^2, 1^6$　$(2^3), 3^2, 1^6$ などは同一視する．
(2) $\mathbf{m} \in \mathcal{F}_{[\mathbf{n}]}$ ならば $\operatorname{idx}\mathbf{m} = \operatorname{idx}\mathbf{n}$ であるので，$|\mathcal{F}_{[\mathbf{n}]}| < \infty$.
(3) $\mathcal{F}_\ell^T := \mathcal{F}^T \cap \mathcal{F}_\ell = \{\mathcal{F}^T \mid \operatorname{idx}\mathbf{m} = -\ell\}$ $(\ell = 0, 2, 4, \ldots)$ とおくと：

E_8, E_7, E_6, D_4 **基本スペクトル型**

ℓ	$\lvert\mathcal{F}_\ell\rvert$	#3 pts	#4 pts	$\max\operatorname{ord}$	$\max\lvert\mathcal{F}_{[\mathbf{n}]}\rvert$	$\min\lvert\mathcal{F}_{[\mathbf{n}]}\rvert$	$\lvert\mathcal{F}_\ell^{E_8}\rvert$	$\lvert\mathcal{F}_\ell^{E_7}\rvert$	$\lvert\mathcal{F}_\ell^{E_6}\rvert$	$\lvert\mathcal{F}_\ell^{D_4}\rvert$
0	4	3	1	6	4	4	1	1	1	1
2	13	9	3	12	8	5	2	3	2	2
4	37	25	9	18	9	4	5	6	6	4
6	69	46	17	24	12	4	7	12	10	6
8	113	73	29	30	23	4	10	15	12	8
10	198	127	50	36	36	3	15	25	20	9
20	1186	680	345	66	104	4	40	80	67	25
50	40617	18878	12953	156	757	4	351	931	701	137
80	419160	165023	136352	246	3173	3	1456	4386	3251	414
100	1461132	522509	471378	306	7613	3	3181	10389	7500	743

定理 7.1 ([17])**.** $\mathcal{F}^{E_8}$ は，$\mathcal{F}/\!\sim$ の完全代表系である．すなわち

$$\mathcal{F} = \bigsqcup_{\mathbf{n}\in\mathcal{F}^{E_8}} \mathcal{F}_{[\mathbf{n}]}, \qquad \mathcal{P}/\!\sim \simeq F^{E_8} \cup \{\mathbf{1}\} \quad (\mathbf{1}: \text{自明方程式のスペクトル型}).$$

また，$\mathbf{n} \in \mathcal{F}^{E_8}$ に対し，$\mathbf{m} \in \mathcal{F}_{[\mathbf{n}]} \setminus \{\mathbf{n}\}$ は，$\operatorname{ord}\mathbf{m} < \operatorname{ord}\mathbf{n}$ をみたす．すなわち，$\mathcal{F}^{E_8}$ は，各同値類 $\mathcal{F}/\!\sim$ の中で ord が最大のスペクトル型の集合ということで特徴づけられる．

$\mathcal{P}$ から $\mathcal{F}^{E_8} \cup \{\mathbf{1}\}$ への写像 $\mathcal{U}$ を定義することにより，この定理の証明は補題 7.5 に帰着される．

定義 7.3. $\mathbf{m} = m_{11}\cdots m_{1n_1}, m_{21}\cdots m_{2n_2}, \ldots, m_{p1}\cdots m_{pn_p} \in \mathcal{P}$ とする．
(1) $\mathbf{m}' \in \mathcal{P}$ に対し，$\mathbf{m}' = \mathrm{mc}_{\sigma(1)}\cdots\mathrm{mc}_{\sigma(k)}\,\mathbf{m}$ となる middle convolution $\mathrm{mc}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathrm{mc}_{\sigma(k)}$ が存在するとき，$\mathbf{m} \underset{\text{mc}}{\sim} \mathbf{m}'$ と定義する．さらに，$\mathbf{m} \underset{\text{mc}}{\sim} \mathbf{m}'$ で定まる $\mathbf{m}' \in \mathcal{F}$ を $\mathcal{R}\mathbf{m}$ と定義する．
(2) $\mathbf{m}$ に generic な一次分数変換を施したもの $L\mathbf{m}$ の Harnad 双対 $\mathrm{Hd}_{(0,\ldots,0)}$ の開折を $\mathcal{S}\mathbf{m}$ と定義する：

$$\mathcal{S}\mathbf{m} := \big[[(p-1)n, n],\, [\overbrace{n, \ldots, n}^{p}],\, [\{m_{j\nu} \mid j = 1, \ldots, p,\ \nu = 1, \ldots, n_j\}]\big]. \tag{7.1}$$

さらに，$\mathcal{U}\mathbf{m} = \mathcal{R}\mathcal{S}^2\mathbf{m}$ によって，写像 $\mathcal{U} : \mathcal{P} \to \mathcal{F}^{E_8} \cup \{\mathbf{1}\}$ を定義する．

注意 7.4. (7.1) は

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &\simeq n,\, \underline{0}m_{11}\cdots m_{1n_1},\, \cdots,\, \underline{0}m_{p1}\cdots m_{p,n_p}\\ &\xrightarrow{\text{Hd}}\ (m_{11}\cdots m_{1n_1})\cdots(m_{p1}\cdots m_{p,n_p}),\, ((p-1)n)n\\ &\xrightarrow{\text{uf}}\ m_{11}\cdots m_{1n_1}\cdots m_{p1}\cdots m_{p,n_p},\, \overbrace{n\cdots n}^{p},\, ((p-1)n)n\end{aligned}$$

から得られ，$\mathcal{S}\mathbf{m}$ は $(2, p, *)$ 型となる．さらに

$$\mathcal{S}^2\mathbf{m} = \big[[2pn, pn],\, [pn, pn, pn],\, [(p-1)n, \overbrace{n, \ldots, n}^{p+1}, \{m_{j,\nu}\}]\big].$$

補題 7.5. (1) $\mathbf{m}$: $(2,3,*)$ 型 $\Rightarrow$ $\mathcal{S}\mathbf{m} \underset{\text{mc}}{\sim} \mathbf{m}$

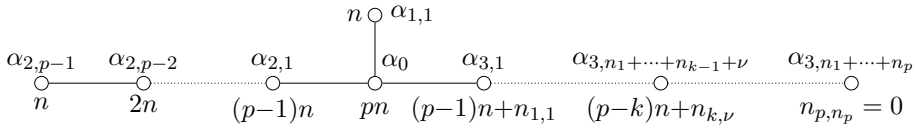
$\mathbf{m}$: $(*,*,*)$ 型 （すなわち $p=3$） $\Rightarrow$ $\mathcal{S}^2\mathbf{m} \underset{\text{mc}}{\sim} \mathcal{S}\mathbf{m}$

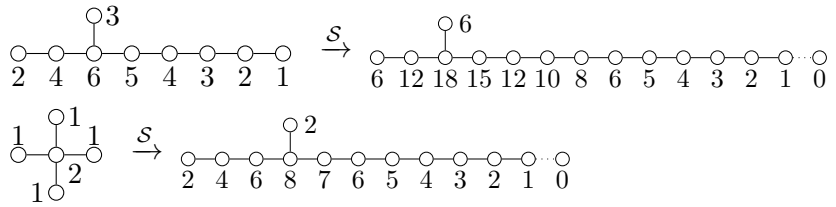
(2) $\mathbf{m}'$: $\mathbf{m}$ のある合流の *Harnad* 双対の開折 $\Rightarrow$ $\mathcal{S}^2\mathbf{m}' \underset{\text{mc}}{\sim} \mathcal{S}^2\mathbf{m}$

特に $\mathcal{S}^2\mathrm{mc}_\sigma\mathbf{m} = s_{\beta_\sigma}\mathcal{S}^2\mathbf{m}$ $(\exists\beta_\sigma$: 実ルート$)$

(3) $\operatorname{ord}\mathcal{R}\mathcal{S}\mathbf{m} > \operatorname{ord}\mathbf{m}$ $(\forall\mathbf{m} \in \mathcal{F}\setminus\mathcal{F}^{E_8})$

定義 3.2 の同一視で $\mathcal{S}\mathbf{m}$:





8 完全代表系への対応

基本スペクトル型 $\mathbf{m} = m_{11}\cdots m_{1,n_1},\cdots,m_{p,1}\cdots m_{p,n_p} \in \mathcal{F}$ を与えたとき，$\mathbf{n} \sim \mathbf{m}$ となる $\mathbf{n} \in \mathcal{F}^{E_8}$ を具体的に求めることを考える．そのため $\mathcal{R}\mathcal{S}\mathbf{m}$ を計算しよう．p が等しければ，$\mathcal{R}\mathcal{S}\mathbf{m}$ は集合としての $\{m_{j,\nu}\}$ から定まることが (7.1) から分かる．たとえば

$$222, 2211, 2211 \sim 222, 222, 21111 \in \mathcal{F}_4$$

が成り立つ．そこで $\{m_{j,\nu}\}$ を並べ替えて

$$\begin{aligned}\{m_{j,\nu} \mid j=1,\dots,p,\ \nu=1,\dots,n_j\} &= \{a_1,\dots a_K\},\\ a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_K,\ K &= n_1+\cdots+n_p\end{aligned} \tag{8.1}$$

とおく．さらに結果を述べるために記号を準備する．

定義 8.1. $a_1, a_2, \dots$ を $\mathbf{m}$ に対して (8.1) で定めた整数列とする．

$$a_{[k,\ell]} := \begin{cases} a_k + a_{k+1} + \cdots + a_\ell & (k \le \ell),\\ 0 & (k > \ell),\end{cases}$$

$$D_p := \sum_{\nu=1}^{p-2}(n - a_\nu) = (p-2)n - a_{[1,p-2]}$$

とおき，整数 N に対して条件

$$a_{p+N-2} + a_{p+N} > D_p. \tag{$D_p : N$}$$

を考え，$(D_p : N)$ が成立する最大の正整数を $N_{\mathbf{m}}$ とおく．$(D_p : 1)$ が非成立なら $N_{\mathbf{m}} = 0$ とする．

注意 8.2. $(D_p : N)$ が成り立つなら，$0 < N' < N$ のとき $(D_p : N')$ が成り立つ．

定理 8.1 ([17])**.** $m'' = \mathrm{mc}_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots)}\mathbf{m}'$ で $c = d_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots)}(\mathbf{m}')$ のとき

$$\mathbf{m}' \xrightarrow[\sigma_1,\sigma_2,\dots]{c} \mathbf{m}'' \quad \text{または} \quad \mathbf{m}' \xrightarrow[\sigma_1,\sigma_2,\dots]{f>g} \mathbf{m}'' \quad (\text{ただし } c = f-g)$$

と記すと（$c>0$ あるいは $f>g$ のとき，$Katz$ 簡約化が可能），$\mathcal{S}\mathbf{m}$ の $Katz$ 簡約化は

$$\mathcal{S}\mathbf{m} \xrightarrow[1,1,1]{a_1} \bullet \xrightarrow[1,2,2]{a_2} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow[1,p,p]{a_p} \mathbf{m}^{(0)} \xrightarrow[2,p,p+1]{a_{[1,p-1]}+a_{p+1}>(p-2)n} \mathbf{m}^{(1)}$$

$$\xrightarrow[2,p-1,p+2]{a_{[1,p-2]}+a_p+a_{p+2}>(p-2)n} \mathbf{m}^{(2)} \begin{cases} \xrightarrow[1,p-2,p+2]{a_{[1,p-3]}+a_{p-1}+a_{p+1}+a_{p+2}>(p-2)n} \mathbf{m}^{(3,1)}, \\ \xrightarrow[2,p-2,p+3]{a_{[1,p-3]}+a_{p-1}+a_p+a_{p+3}>(p-2)n} \mathbf{m}^{(3,2)}, \\ \xrightarrow[1,p-1,p+3]{a_{[1,p-2]}+a_{p+1}+a_{p+3}>(p-2)n} \mathbf{m}^{(3)} \to \end{cases}$$

$$\to \overset{k=1,2,\ldots}{\cdots} \to \mathbf{m}^{(4k-1)}$$

$$\xrightarrow[1,p,p+4k]{a_{[1,p-2]}+a_{p+4k-2}+a_{p+4k}>(p-2)n} \mathbf{m}^{(4k)} \xrightarrow[2,p,p+4k+1]{a_{[1,p-2]}+a_{p+4k+1}>(p-2)n} \mathbf{m}^{(4k+1)}$$

$$\xrightarrow[2,p-1,p+4k+2]{a_{[1,p-2]}+a_{p+4k}+a_{p+4k+2}>(p-2)n} \mathbf{m}^{(4k+2)} \xrightarrow[1,p-1,p+4k+3]{a_{[1,p-2]}+a_{p+4k+1}+a_{p+4k+3}>(p-2)n} \mathbf{m}^{(4k+3)} \xrightarrow{k\mapsto k+1}$$

となって

$$\mathcal{RS}\mathbf{m} = \begin{cases} \mathbf{m}^{(N_{\mathbf{m}})} & (N_{\mathbf{m}} \neq 2), \\ \mathbf{m}^{(2)} & (N_{\mathbf{m}} = 2 \text{ かつ } (8.2)), \\ \mathbf{m}^{(3,1)} & (N_{\mathbf{m}} = 2 \text{ かつ } (\mathrm{C}{:}3.1)), \\ \mathbf{m}^{(3,2)} & (N_{\mathbf{m}} = 2 \text{ かつ } (\mathrm{C}{:}3.2)) \end{cases}$$

で与えられる．ここで

$$a_{[1,p-3]} + a_{p-1} + \max\{a_{p+1}+a_{p+2}, a_p+a_{p+3}\} \leq (p-2)n \tag{8.2}$$

$$a_{[1,p-3]} + a_{p-1} + a_{p+1} + a_{p+2} > (p-2)n \tag{C:3.1}$$

$$a_{[1,p-3]} + a_{p-1} + a_p + a_{p+3} > (p-2)n \tag{C:3.2}$$

注意 8.3. 定理から（実際は証明に使った）$\mathcal{RS}\mathbf{m}$ の具体的表示が得られる．たとえば

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{(0)} &= \big[[(p-1)n - a_1 - \cdots - a_p, \underline{n}], [n-a_1, \ldots, n-a_p], [\overbrace{0, \ldots, 0}^{p}, a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots]\big], \\ \mathbf{m}^{(4k+1)} &= \big[[(2k+1)D_p + n - a_{[p-1,p+4k]}, (2k+1)D_p + n - a_{[p-1,p+4k-1]} - a_{p+4k+1}], \\ &\quad [n-a_1, \ldots, n-a_{p-2}, 2kD_p + n - a_{[p-1,p+4k-1]}, (2k+1)D_p + n - a_{[p-1,p+4k+1]}], \\ &\quad [\overbrace{0, \ldots, 0}^{p}, D_p - a_{p-1}, \ldots, D_p - a_{p+4k-1}, a_{p+4k+2}, a_{p+4k+3}, \ldots]\big] \quad (k \geq 0). \end{aligned}$$

命題 8.4. T を E_7, E_6, D_4 のいずれかとする．このとき，$\mathbf{m} \in \mathcal{F}^T$ に対する $\mathcal{U}\mathbf{m}$ が明示的に分かる．

例 8.5. (1) ordered スペクトル型

$$\mathbf{m} = \big[[m_{11}, m_{12}], [m_{21}, m_{22}, m_{23}, m_{24}], [m_{31}, \ldots, m_{3n_3}]\big] \in \mathcal{F}^{E_7}$$

の場合は,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\mathbf{m} &= \big[[m_{11}{+}m_{24}, m_{12}{+}m_{24}],\ [m_{21}{+}m_{24}, m_{22}{+}m_{24}, m_{23}{+}m_{24}], \\ &\qquad [m_{24}, m_{24},\ m_{31}, \ldots, m_{3n_3}]\big] \qquad\qquad \text{if } \ m_{11} < m_{22} + m_{23}, \\ &= \big[[m_{12}{+}m_{23}, m_{12}{+}m_{24}],\ [m_{12}, m_{12}, m_{23}{+}m_{24}], \\ &\qquad [m_{12}{-}m_{22}, m_{12}{-}m_{21},\ m_{31}, \ldots, m_{3n_3}]\big] \quad \text{if } \ m_{11} > m_{21} + m_{23}, \\ &= \big[[m_{22}{+}m_{23}{+}m_{24},\ m_{22}{+}m_{23}{+}m_{24}], [m_{22}{+}m_{23}, m_{22}{+}m_{24}, m_{23}{+}m_{24}], \\ &\qquad [m_{11}{-}m_{21}, m_{12}{-}m_{21}, m_{31}, \ldots, m_{3n_3}]\big] \quad \text{if } \ m_{11} < m_{21} + m_{24}, \end{aligned}$$

$$= \big[[m_{22}{+}m_{23}{+}m_{24}, m_{12}{+}m_{24}],\, [m_{12}, m_{22}{+}m_{24}, m_{23}{+}m_{24}],$$
$$[m_{24}, m_{12}{-}m_{21},\, m_{31}, \dots, m_{3n_3}]\big]$$
$$\text{if}\ \ m_{11} \ge m_{22}+m_{23},\ m_{11} \le m_{21}+m_{23}\ \ \text{and}\ \ m_{11} \ge m_{21}+m_{24}$$

というのが，命題 8.4 の主張である．なお，上の 3 番目と 4 番目のスペクトル型は ordered で，$m_{12}-m_{21} \ge m_{31}$ であることに注意すると，$\mathbf{n} \in \mathcal{F}^{E_8}$ を与えたときに $\mathcal{F}^{E_7}_{[\mathbf{n}]}$ が容易に分かる．

(2) 各同値類 $\mathcal{F}/\!\sim$ には D_4 基本スペクトル型は高々1 つしか存在しない．すなわち ordered スペクトル型

$$\mathbf{n} = \big[[\bar m_{11}, \bar m_{12}], [\bar m_{21}, \bar m_{22}, \bar m_{23}], [\bar m_{31}, [\bar m_{32}, \bar m_{33}, \bar m_{33}, \bar m_{34}, \bar m_{35}, \dots, \bar m_{3n_3}]\big] \in \mathcal{F}^{E_8} \tag{8.3}$$

に対して $|\mathcal{F}^{D_4} \cap \mathcal{F}_{[\mathbf{n}]}| \le 1$ である．$\mathcal{F}^{D_4} \cap \mathcal{F}_{[\mathbf{n}]} \ne \emptyset$ となるための必要十分条件は

$$\bar m_{11} = \bar m_{12},\ \bar m_{21} = \bar m_{22},\ \bar m_{23} = 2\bar m_{31} = 2\bar m_{32} \tag{8.4}$$

となる．この条件が成り立つとき

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{D_4} \cap \mathcal{F}_{[\mathbf{n}]} \ni \big[&[2\bar m_{21}{-}\bar m_{31}{-}\bar m_{33}{-}\bar m_{34}, \bar m_{31}],\, [\bar m_{21}{+}\bar m_{31}{-}\bar m_{33}{-}\bar m_{34}, \bar m_{21}{-}\bar m_{31}],\\ &[\bar m_{21}{-}\bar m_{34},\, \bar m_{21}{-}\bar m_{33}],\, [\bar m_{35}, \bar m_{36}, \dots, \bar m_{3,n_3}]\big].\end{aligned} \tag{8.5}$$

(3) $\operatorname{idx}\mathbf{n} \ge -100$ を満たす $\mathbf{n} \in \mathcal{F}^{E_8}$ に対して，$\mathcal{F}^{E_7}_{[\mathbf{n}]} \ne \emptyset$, $\mathcal{F}^{E_6}_{[\mathbf{n}]} \ne \emptyset$ となるが

$$\mathbf{n} = \big[[50, 49],\, [34, 33, 32],\, [14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4]\big] \in \mathcal{F}^{E_8} \tag{8.6}$$

のときは $\operatorname{idx}\mathbf{n} = -630$ で $\mathcal{F}^{E_7}_{[\mathbf{n}]} = \mathcal{F}^{E_6}_{[\mathbf{n}]} = \mathcal{F}^{D_4}_{[\mathbf{n}]} = \emptyset$ となる．

注意 8.6. (1) 定理 8.1 において，$\mathbf{m} = (2n-3)3, 2^n, 1^{2n} \in \mathcal{F}$ $(n \ge 3)$ は，$n = 3$ のとき $\mathbf{m}^{(3,1)} \in \mathcal{F}$, $n > 3$ のとき $\mathbf{m}^{(n)} \in \mathcal{F}$ となる．また，$\mathbf{m} = 1^3, 1^3, 1^3$ のときは $\mathbf{m}^{(0)} \in \mathcal{F}$, $\mathbf{m} = 9^2, 64^3, 3^6$ のときは $\mathbf{m}^{(3,2)} \in \mathcal{F}$ となる．

$\mathbf{m} \in \mathcal{F}_{50}$, 3 points

$\mathcal{F}^{E_8}_{50}$	$\mathbf{m}^{(0)}$	$\mathbf{m}^{(1)}$	$\mathbf{m}^{(2)}$	$\mathbf{m}^{(3)}$	$\mathbf{m}^{(3,1)}$ $\mathcal{F}^{E_8}_{50}$	$\mathbf{m}^{(3,2)}$	$\mathbf{m}^{(4)}$	$\mathbf{m}^{(5)}$	$\mathbf{m}^{(6)}$	$\mathbf{m}^{(7)}$	$\mathbf{m}^{(8)}$
個数	4772	8870	2617	276	2312 (351)	34	32	9	1	3	2

(2) Hd_σ や mc_σ はルート空間の線型写像を定義しているので，$\mathbf{m} \in \mathcal{P}$ と正整数 r に対して各重複度を r 倍した $r\mathbf{m}$ に対してもこのノートの議論が成立する．よって，重複度を有理数体（あるいは実数体）まで拡げて考えてもよい（適当に整数倍すると，実際の方程式のスペクトル型として実現される）．

$0 \le \epsilon \ll 1$ となる ϵ に対し，$\mathbf{m}_\epsilon = (n-\epsilon)\epsilon, m_{11}\cdots m_{1,n_1}, \cdots, m_{p1}\cdots m_{pn_p}$ とおくと，$\mathbf{m} \in \mathcal{F}$ ならば $\mathbf{m}_\epsilon \in \mathcal{F}$ となって，$N_{\mathbf{m}_\epsilon}$ は ϵ に依らない．また

$$\tilde{\mathbf{m}}_\epsilon = \big[[m_{11}{-}\epsilon_{11}, \dots, m_{1n_1}{-}\epsilon_{1n_1}, \epsilon_{11}{+}\cdots{+}\epsilon_{1n_1}], \dots, [m_{p1}{-}\epsilon_{p1}, \dots, m_{pn_p}{-}\epsilon_{pn_p}, \epsilon_{p1}{+}\cdots{+}\epsilon_{pn_p}]\big],$$
$$0 \ll \epsilon_{11} \ll \cdots \ll \epsilon_{1n_1} \ll \epsilon_{21} \ll \cdots \ll \epsilon_{pn_p} \ll 1$$

についても同様で，これによって $\mathbf{m}$ の極大 Katz 簡約化を一意的に定めることができ，定理 8.1 などを得るのに有効であった．

(3) このノートの結果を得るにあたって，数式処理 `Risa/Asir` 上で様々なプログラムを作成して例の計算や結果を整理した表示を行った．そのプログラムの多くを [18] に公開している．具体的には，ℓ を与えて $\mathcal{F}_\ell$（cf. [15]）や $\mathcal{F}_\ell/\!\sim$ を求める，$\mathbf{n} \in \mathcal{F}$ に対して $\mathcal{R}\mathbf{m} = \mathbf{n}$ となる $\mathbf{m} \in \mathcal{P}$ を $\operatorname{ord}\mathbf{m}$ を指定してすべて求める，$\mathbf{m} \sim \mathbf{n}$ となる $\mathbf{m} \in \mathcal{F}$ を適当な条件下で探索する，$\mathbf{n} \in \mathcal{F}^{E_8}$ に対して $\mathcal{F}^T_{[\mathbf{n}]}$ $(T = E_7, E_6, D_4)$ を求める，$\mathrm{mc}_\sigma\mathbf{m}$, $\mathrm{Hd}_\sigma\mathbf{m}$, $\mathcal{R}\mathbf{m}$, $\mathcal{S}\mathbf{m}$, $\mathcal{U}\mathbf{m}$ や $\mathbf{m}$ のすべての不分岐合流の計算，線型計画法（連立一次不等式の解の存在チェックに用いた）などで，一部は ϵ を導入した (2) の連続化，さらには，このノートにあるような図や表の TEX 原稿の出力に対応している．なお，計算結果 $\mathcal{F}_\ell/\!\sim$ $(\ell \le 100)$ も公開している（cf. [16]）．

(4) このノートでは不確定特異点に不分岐を仮定した．分岐している場合の合流や開折などの研究の進展によりその仮定が不要となることが期待される．

参考文献

[1] W. Crawley-Boevey. On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspaces and sum zero. *Duke Math. J.*, 118:339–352, 2003.

[2] M. Dettweiler and S. Reiter. An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems. *J. Symbolic Comput.*, 30:761–798, 2000.

[3] J. Harnad. Dual isomonodromic deformations and moment maps to loop algebras. *Commun. Math. Phys.*, 166:337–365, 1994.

[4] K. Hiroe. Linear differential equations on the Riemann sphere and representations of quivers. *Duke Math. J.*, 166:855–935, 2017.

[5] K. Hiroe. Deformation of moduli spaces of meromorphic-connections on $\mathbb{P}^1$ via unfolding of irregular singularities. *arXiv.2407.20486*, 2025.

[6] K. Hiroe, H. Kawakami, A. Nakamura, and H. Sakai. *4-dimensional Painlevé-type equations.* Number 37 in MSJ Memoirs. Mathematical Society of Japan, 2018.

[7] K. Hiroe and T. Oshima. A classification of roots of symmetric Kac-Moody root systems and its application. In *Symmetries, Integrable Systems and Representations*, volume 40 of *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, pages 195–241. Springer, 2012.

[8] V. G. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*, Third Edition. Cambridge University Press, 1990.

[9] N. M. Katz. *Rigid local systems.* Number 139 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1996.

[10] H. Kawakami. 4-dimensional Painlevé-type difference equations. *Experimental Mathematics*, 34:563–577, 2025.

[11] V. P. Kostov. The Deligne-Simpson problem - a survey. *J. Algebra*, 281:83–108, 2004.

[12] T. Oshima. *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations.* Number 28 in MSJ Memoirs. Mathematical Society of Japan, 2012.

[13] T. Oshima. Confluence and versal unfolding of Pfaffian systems. *Josai Mathematical Monographs*, 12:117–151, 2020.

[14] T. Oshima. Versal unfolding of irregular singularities of a linear differential equation on the Riemann sphere. *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 57:893–920, 2021.

[15] T. Oshima. Algorithm of classifying roots of star-shaped Kac-Moody root systems. *arXiv.2504.18542*, 2025.

[16] T. Oshima. spect10.pdf, `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/`paper/spect10.pdf. 2026.

[17] T. Oshima, A Kac-Moody root system and linear ordinary differential equations. *arXiv.2609.39733*, 2026.

[18] T. Oshima. os_muldif.rr, a library of computer algebra `Risa/Asir`, 2008–2026, `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/`.