多項式係数の線型常微分方程式

大島利雄　(城西大学理学部)*

1. 序

特殊函数として基本的なGaussの超幾何函数やBessel函数は，それぞれ

$$x(1-x)u'' + (c-(a+b+1)x)u' - abu = 0,$$
$$x^2u'' + xu' + (x^2-\nu^2)u = 0$$

という線型常微分方程式の解として特徴づけられ，これらの函数の性質は常微分方程式の解析と関わって解明されてきた[1]．古典的な直交多項式やWhittaker函数，Airy函数なども同様で，これらはGauss の超幾何族に属し，Gaussの超幾何微分方程式の合流などの変形や特殊化の解になることで特徴づけられる．

一般に，解析的な係数を持つ線型常微分方程式は，最高階の係数が消えない点の近傍では，階数未満の次数の微係数をその点で与えることにより，解が一意に存在し，その係数の零点を除いた複素領域に（多価）解析的に解として解析接続できる．最高階の係数の零点を線型常微分方程式の特異点と呼び，線型常微分方程式の局所理論の研究は，特異点での解析が中心となる．特異点は確定と不確定に分類され，確定の場合は局所的解析が容易であるが，**不確定特異点**については易しくなく，Poincaré, Birkoff, 福原, Turrittin等の研究で20世紀前半にその概要が明らかされた．不確定特異点の場合は，階数に等しいだけの独立な形式解が存在し，適当な角領域でその形式解に漸近展開される実際の独立解が構成でき，特異点の周りの状況は角領域間での接続係数にあたるStokes係数で記述できる，ということになる．

多項式係数線型常微分方程式の多価解析的解を調べるに当たっては，係数を有理函数まで拡げて考えても差がないので，係数をそこまで拡げて考えることにする．このように考えると$(x, \frac{d}{dx})$を$(\frac{1}{x}, -x^2\frac{d}{dx})$と変換して係数の分母を払えば，無限遠点の近傍でも多項式係数の微分方程式と考えてよいことが分かる．よって方程式はRiemann球面$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$上で定義され，解は$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$から有限個の点を除いた領域で多価解析的な函数となる．

特異点$x=0$が**確定特異点**であるとは，n階の線型常微分方程式の解$u(x)$のいずれもが$x=0$の近傍で，ある正数C, mによって

$$|x^m u(x)| < 1 \quad (0 < |x| \ll 1,\ |\arg x| < 2\pi) \tag{1}$$

という評価を満たすこととして特徴づけられ，方程式

$$a_n(x)u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0 \tag{2}$$

の側では$\frac{x^{n-j}a_j(x)}{a_n(x)}$が$x=0$に正則に伸びる，すなわち，$a_n(x)=1$と正規化すると$a_j(x)$が高々$n-j$位の極を持つ（$0 \le j < n$）こととして特徴づけられる．原点以外でも，その点を一次分数変換で原点に移して考えればよい．

* 〒102-0093 東京都千代田区平河町2-3-20　城西大学理学部
e-mail: `t-oshima@josai.ac.jp`

[1] 微分方程式の解ということを用いたGaussの超幾何函数の基本的性質の初等的証明が [12] にある．

有理函数係数の線型常微分方程式（以下，混乱の無い限り単に方程式という）が**Fuchs型**とは，その特異点が全て確定特異点となることをいう[2].

一般に，$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ から有限個の点を除いた領域での多価解析的函数があって，局所的には線型和が有限次元空間となり，特異点の近傍で (1) を満たすならば，その函数はFuchs型方程式の解となる．たとえば，Riemann球面上の特異点を持たない方程式は $u'=0$ に限り，それはLiouvilleの定理にあたる．特異点が ∞ のみでそれが確定となる方程式は $u^{(n)}=0$ で解は多項式である．このようなことを考慮すると，方程式，またはその解を，特異点での局所的性質で統制しようというのは自然な考え方である．たとえば，特異点が $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上3点で，解析接続の線型和が2次元となる多価解析函数で既約なものがGaussの超幾何函数に帰着されるという事実はRiemannが考察している．

函数やその解の特異点での局所的な（不確定特異点の場合は形式解の空間の）同型類と大域的な同型類との差は，**リジット指数**で計られ，その差がない場合をリジッドという．リジッドでない場合は**アクセサリー・パラメータ**が現れ，モノドロミーなどの大域的構造を保つ変形理論が存在し，一般（高階）Painlevé方程式の理論と関係する（cf. [13, 14]）.

Fuchs型のリジッドな方程式に関して大久保型システムを導入した大久保氏の研究があったが，それを発展させた横山氏の結果や，モノドロミーと局所系の研究においてN. Katz [6]が導入した middle convolution により，一般的な方程式の大域的取り扱いが可能になった.

middle convolutionは従来からあった方程式のEuler変換，函数のRiemann-Liouville積分や分数階微分を，既約性を視点として代数的に精密に定式化したものであり，横山氏の変換[3]と共に，リジッドでない場合への応用や不確定の場合への拡張へと発展してきている．一方Schlesinger 型の一階システムに対して，局所データを与えて既約なものが大域的に存在するか，という問題はV. P. Kostovにより加法的**Deligne-Simpson問題**[4]と呼ばれて研究されていたが，Crawley-Boevey [1]によって，quiverの表現を用いてKac-Moodyルート系の言葉を使うことにより最終的に解決された[5].

2. 単独方程式

以上の最近の展開はいずれも一階のシステムであり，単独高階の場合は[6]の序にあるようにリジッドなFuchs型の場合も未解決であった．筆者は，方程式の解となる函数の接続公式の具体形を求めようとして，函数が満たすのは単独方程式となることから，単独高階の方程式に興味を持った．求めようとした接続公式は2008年に得られたが，その後に一般論の構築へと進んだ．Fuchs型の場合の研究の概要は[10]にまとめ（[11]はその主要部分の解説，[7]は一部プログラム化)，現在は不確定特異点の場合に研究の主軸を移している．今後は多変数の場合も考慮に入れている．いずれもFuchs型の理論[6]

[2] 線型常微分方程式は一階のシステムに直せる．n 次の複素正方行列 $A_1,\dots,A_p$ を用いて $u'=\sum_{j=1}^{p}\frac{A_j}{x-c_j}u$ と表示される方程式を Fuchs 型 — ここでは **Schlesinger 型**と呼ぶ — と呼ぶこともある．この解は (1) を満たすが，逆は一般には正しくない．システムでも (1) を満たすときをFuchs型ということもある.

[3] 両者が同等なことは, [9]で示された.

[4] n 次正方行列の共役類 $\mathcal{O}_0,\mathcal{O}_1,\dots,\mathcal{O}_m$ を与えたとき，$A_0+A_1+\cdots+A_m=0$，$A_j\in\mathcal{O}_j$ となる既約な組 $(A_0,\dots,A_m)$ の存在条件を決定する問題. 一方 $A_0A_1\cdots A_m=I_n$ とした場合が乗法版.

[5] Hiroe [4] によって確定とは限らず，不分岐不確定を許す場合に拡張された.

[6] 不確定特異点は確定特異点の合流操作で得られるが，それの逆操作 unfolding を考察して，Fuchs型の問題に帰着する，などがある.

を基礎としているので，まずFuchs型常微分方程式の場合を解説しよう．

多項式$\mathbb{C}[x]$係数の線型常微分作用素環を$W[x]$とおき，係数を有理函数まで拡張したものを$W(x)$とおく．$W(x)$は，xと微分作用素$\partial = \frac{d}{dx}$によって生成され，基本関係$[\partial, x] = 1$を満たす．$W(x)$は体係数の1変数多項式環と同様なEuclid環の性質をもつ．複素数ϵに対し，$W^{(\epsilon)}(x)$を，交換関係$[\partial, x] = \epsilon$で定義される環としよう．$\epsilon = 1$のときは微分作用素環，$\epsilon = 0$のときは多項式環となる．

Aを$W^{(\epsilon)}(x)$の元を成分とする$m \times n$行列とする．これを（線型代数で基本的な）行と列の基本変形を行って簡単な形に変換することを考えよう．非可換な場合は，行の基本変形では左から$W^{(\epsilon)}(x)$の元をかけて別の行に加えることが許される（列の基本変形ではかけるのは右から）．$\epsilon = 0$のときは，Aは(i,i)の形の成分以外が0で$(i+1, i+1)$成分は(i,i)成分に$W^{(\epsilon)}(x)$のある元をかけたものに変換される（**単因子論**）．一方

定理 2.1 ([10])**.** $\epsilon \neq 0$で$W^{(\epsilon)}(x)$の行列Aの場合，Aは(i,i)の形の成分以外が0で(i,i)成分のうち1つの成分以外は1または0となる行列に行と列の基本変形で変換される．

線型代数のときと同様，証明は具体的アルゴリズムを与える形で示されるので，変換の可逆行列も求められる[7]．よって未知函数と方程式が有限個の有理函数係数の線型常微分方程式は，単独方程式に帰着できることが分かる．

3. Riemann scheme

以降, Fuchs型のn階の方程式$Pu = 0$を考察しよう．その特異点を$c_0, c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$とおく．$x = 0$が確定特異点としよう．$x = 0$における$P$の**特性指数** $\mu_1, \ldots, \mu_n$が定義される．それは, $x = 0$の近傍で

$$u_j(x) = x^{\mu_j} \log^{k_j} x + \sum_{i=0}^{n-1} x^{\mu_j+1} \log^i x \cdot \varphi_{i,j}(x) \quad \bigl(k_j = \#\{\nu \mid \mu_\nu = \mu_j,\ \nu < j\},\, 1 \le j \le n\bigr)$$

の形の解が存在することであり（$\varphi_{i,j}(x)$は$x = 0$で正則），方程式の形で述べれば，最高階の係数をx^nと標準化したとき

$$P = \prod_{j=1}^{n} (\vartheta - \mu_j) + xQ, \quad \vartheta := x\partial$$

となることである（ただしQは$x = 0$で正則な係数をもつ微分作用素）．

$m_1, \ldots, m_{n'}$をnの分割とし

$$\lambda_\nu \in \mathbb{C}, \ \ m_1 + \cdots + m_{n'} = n, \ \ [\lambda]_{(m)} := \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda+1 \\ \vdots \\ \lambda+m-1 \end{pmatrix}$$

して，Pの**一般化特性指数**が

$$[\lambda_1]_{(m_1)}, \ldots, [\lambda_{n'}]_{(m_{n'})}$$

である，ということを，特性指数がn個の$\lambda_\nu + i$ $(0 \le i < m_\nu,\ 1 \le \nu \le n')$であって，解空間の$x = 0$での局所モノドロミー行列$M$が

$$\operatorname{rank}(M - e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_\nu})^k \le n - \max_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n \\ \lambda_{i_s} - \lambda_\nu \in \mathbb{Z}}} \sum_{s=1}^{k} m_{i_s} \qquad \left(\substack{1 \le \nu \le n' \\ 1 \le k \le \#\{i | \lambda_i - \lambda_\nu \in \mathbb{Z}\}}\right) \tag{3}$$

[7] 決定系の場合の cyclic vector の存在定理は各種証明が知られている（たとえば[11]）が，これはそれを含んだ定理．結果は知られているであろう．

を満たすこととして定義する[8]．方程式に対する条件で述べれば，先の標準化のもとで

$$P=\sum_{k\geq 0}x^k p_k(\vartheta),\qquad p_k(\vartheta)\in\mathbb{C}[\vartheta]$$

と表したとき

$$\prod_{\nu=1}^{n'}\prod_{0\leq i<m_\nu-k}(\vartheta-\lambda_\nu-i)\mid p_k(\vartheta)\qquad\bigl(0\leq\forall k\leq\max\{m_1,\dots,m_{n'}\}\bigr)\tag{4}$$

という条件と言い換えられる（代数的な閉条件であることが肝要）．

この一般化特性指数を使ってFuchs型の方程式 $Pu=0$ の**一般化 Riemann scheme**

$$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}=\bigl\{[\lambda_{j,\nu}]_{(m_{j,\nu})}\bigr\}_{\substack{0\leq j\leq p\\ 1\leq\nu\leq n_{j,\nu}}}=\left\{\begin{matrix} x=c_0 & c_1 & \cdots & c_p\\ [\lambda_{0,1}]_{(m_{0,1})} & [\lambda_{1,1}]_{(m_{1,1})} & \cdots & [\lambda_{p,1}]_{(m_{p,1})}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ [\lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{p,n_p}]_{(m_{p,n_p})}\end{matrix}\right\}\tag{5}$$

が定義される．P の**スペクトル型**は n の分割の $p+1$ 個の組

$$n=m_{j,1}+\cdots+m_{j,n_j}\quad(j=0,\dots,p)\tag{6}$$

として表される．これを $\mathbf{m}=(\mathbf{m}_0,\dots,\mathbf{m}_p),\quad \mathbf{m}_j=(m_{j,1},\dots,m_{j,n_j})$ のように表す．

例 3.1. Gaussの超幾何微分方程式は，スペクトル型が $11,11,11$ という 2 の 3 つの分割の組で表せる．${}_3F_2$ を解に持つ 3 階の一般超幾何方程式，4 点特異点をもつ Jordan-Pochhammer 方程式は，それぞれスペクトル型が $111,21,111$ あるいは $21,21,21,21$ であることで特徴づけられる．

上の記号の元に，スペクトル型 $\mathbf{m}$ の**リジッド指数**

$$\operatorname{idx}\mathbf{m}:=2n^2-\sum_{j=0}^{p}\Bigl(n^2-\sum_{\nu=1}^{n_j}m_{j,\nu}^2\Bigr)$$

が定義される．一般 Riemann scheme $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ方程式が存在するためには，$n=\operatorname{ord}\mathbf{m}$ とおいて，**Fuchs関係式**

$$\bigl|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}\bigr|:=\sum_{j=0}^{p}\sum_{\nu=1}^{n_j}m_{j,\nu}\lambda_{j,\nu}-\operatorname{ord}\mathbf{m}+\frac{\operatorname{idx}\mathbf{m}}{2}=0\tag{7}$$

を満たす必要があることが分かる．

問題．i) スペクトル型 $\mathbf{m}$ とFuchs関係式を満たす一般化Riemann scheme $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ を与えたとき，それをもつ方程式や函数が存在するか？ 存在するならそれを全て求めよ．

ii) 既約なもの[9]が一意に存在するスペクトル型（とパラメータ λ）の条件を求めよ．さらにリジッドな場合を特徴づけ，解の大域的な性質（積分表示，級数表示，接続公式，隣接関係式，可約で多項式解をもつパラメータとその構成）を調べよ．

---

[8] $\lambda_j-\lambda_{j'}\notin\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ が満たされる場合は，(3) で等号が成立する．また一般化特性指数 $[0]_{(n)}$ は非特異点を意味する．

[9] 方程式 $Pu=0$ において $P\in W(x)$ が既約．Fuchs型のときは，解空間の大域モノドロミー群が既約と言っても同じ．一方，$\epsilon=0$ のとき，既約という条件は，$W^{(0)}(x)$ を $W^{(0)}[x]$ で置き換えてよい．

iii) リジットとは限らない一般の場合も分類と解析を行え．
が考えられる．

同様な考察を$W^{(0)}[x]$に対して行ってみよう．このとき$\partial = y$とおくと，多項式で

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y + a_0(x) = 0 \tag{8}$$

と表せる**平面代数曲線**を考えることになる．特に**既約**な場合に興味がある．代数曲線の場合は，特異点と呼ぶと誤解を招くのでyについての**爆発点**と呼ぶことにしよう．それが$c_0, \dots, c_p \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$であるとは，それらが$a_n(x)$の零点に対応するとしてよい．$\infty$は$(x, y)$を$(\frac{1}{x}, -x^2 y)$と原点に移して考えればよい[10]．$y$について解いた函数$y(x)$が「解」に対応し，有界とならない解がある点が爆発点である．確定特異点とは，爆発点を原点に移して考えたとき，いずれの解も

$$|x^{1+\epsilon}y(x)| \le 1 \qquad (0 < |x| \ll 1,\ |\mathrm{Arg}\, x| < 2\pi,\ \forall \varepsilon > 0) \tag{9}$$

を満たすことである．Fuchs型の場合，爆発点でのn個の解$y_\nu(x)$の特異部分[11]から，同様に**一般化 Riemann scheme**が定義される．これは方程式の側では(4)の左辺の多項式を$\prod_{\nu=1}^{n'}(\vartheta - \lambda_\nu)^{\max\{0, m_\nu - k\}}$で置き換えた条件となる．$[\lambda]_{(m)}$はどの成分も$\lambda$の長さ$m$の縦ベクトル，Fuchs関係式は$|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| := \sum m_{j,\nu}\lambda_{j,\nu}$に置き換えて定義される．

4. 函数と微分作用素の変換

函数の変換$u(x) \mapsto \varphi(x)u(x)$は，微分作用素環への変換

$$\mathrm{Ad}\big(\varphi(x)\big) : x \mapsto x,\ \tfrac{d}{dx} \mapsto \tfrac{d}{dx} - \tfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \tag{10}$$

（additionまたはgauge変換とよぶ）を，fractional な微分（Euler変換）

$$u(x) \mapsto \partial^{-\mu}\, u(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_c^x (x - s)^{\mu - 1} u(s) ds \tag{11}$$

は変換

$$\mathrm{Ad}\big(\partial^{-\mu}\big) : \tfrac{d}{dx} \mapsto \tfrac{d}{dx}, \quad \vartheta = x\tfrac{d}{dx} \mapsto x\tfrac{d}{dx} - \mu \tag{12}$$

を引き起こす．ここで$\frac{\varphi\,'(x)}{\varphi(x)}$が有理函数になるようにすれば，前者は$W(x)$の中での演算になる．なお$c$は$u(x)$の特異点とする．Fuchs型のときは，それを保つaddition

$$\mathrm{Ad}\big((x - c)^{\lambda}\big) : x \mapsto x, \quad \tfrac{d}{dx} \mapsto \tfrac{d}{dx} - \tfrac{\lambda}{x - c} \tag{13}$$

を考える．

一般化 Riemann scheme $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$をもつn階の微分作用素Pで，$c_0 = \infty$（∞は特異点でなくてもよい）とおき，$P \in W[x]$とする．$\ell = (\ell_0, \dots, \ell_p) \in \mathbb{Z}^{p+1}_{\ge 0}$に対し，Euler変換を用いて以下の変換を定義する．

$$\begin{aligned}\partial_\ell\, P := {}& \mathrm{Ad}\Big(\prod_{j=1}^{p}(x - c_j)^{\lambda_{j,\ell_j}}\Big) \prod_{j=1}^{p}(x - c_j)^{m_{j,\ell_j} - d_\ell(\mathbf{m})}\, \partial^{-m_{0,\ell_0}}\, \mathrm{Ad}\big(\partial^{1 - \lambda_{0,\ell_0} - \cdots - \lambda_{p,\ell_p}}\big) \\ & \cdot \partial^{(p-1)n - m_{1,\ell_1} - \cdots - m_{p,\ell_p}}\, a_n^{-1}(x) \prod_{j=1}^{n}(x - c_j)^{n - m_{j,\ell_j}}\, \mathrm{Ad}\Big(\prod_{j=1}^{p}(x - c_j)^{-\lambda_{j,\ell_j}}\Big) P,\end{aligned} \tag{14}$$

$$d_\ell(\mathbf{m}) := m_{0,\ell_0} + \cdots + m_{p,\ell_p} - (p - 1)\, \mathrm{ord}\, \mathbf{m}.$$

---

[10] 「∞が爆発点（特異点）でない」とは$\deg a_j(x) \le \deg a_n(x) - 2(n - j)$を満たすことと言える．

[11] Puiseux級数で解が書けるが，それの負べきの項のみを抜き出した有限和

5. 普遍方程式と星形Kac-Moodyルート系

スペクトル型 $\mathbf{m}$ が**既約に実現可能**とは，Fuchs関係式を満たすgeneric な $\lambda_{j,\nu}$ に対して一般化Riemann scheme $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ既約なFuchs型方程式が存在すること，と定義する．

定理 5.1. i) $\mathbf{m}$ が既約に実現可能 $\Leftrightarrow$ $\alpha_{\mathbf{m}}$ が**Kac-Moodyルート系** (Π, W) の正のルートで，$\mathbf{m}$ は**indivisible**または $(\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}) < 0$. この $\alpha_{\mathbf{m}}$ の全体を $\overline{\Delta}_+$ とおく．

ii) $\alpha_{\mathbf{m}} \in \overline{\Delta}_+$ とする．Fuchs関係式のもとで $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ という一般化Riemann schemeをもつ**普遍方程式** $P_{\mathbf{m}}(\lambda, g_1, \ldots, g_N)u = 0$ が具体的に構成できる．さらに $\lambda_{j,\nu}$ がgeneric, あるいは既約で $\mathbf{m}$ が**局所非退化**, あるいは $\mathbf{m}$ が**simply reducible** ならば，このGRSをもつ方程式は, 適当な $g = (g_1, \ldots, g_N) \in \mathbb{C}^N$ に対するこの普遍方程式になる．

iii) 同様な結果が代数曲線の場合（$\epsilon = 0$, $W^{(0)}[x]$ の場合）も成立する．

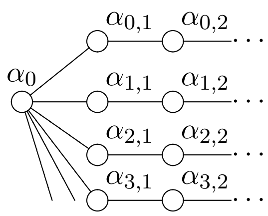
なお，$g_1, \ldots, g_N$ は**アクセサリー・パラメータ**で $N = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{idx}\mathbf{m}$ であり，$P_{\mathbf{m}}(\lambda, g)$ は (λ, g) の多項式で，特に g については1次式となる．また

$$\text{indivisible} \ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \{m_{j,\nu}\}\text{の最大公約数は}1,$$
$$\text{局所非退化} \ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \text{各特異点で(3)において等号が成立.}$$

上の定理は[10]で示された．Schlesinger型の i) に対応する結果は[1]で得られているが，ii) に対応する結果は正しくないので要修正．iii) は[10]の証明がそのまま有効．

以下，(Π, W) との関係を解説する．$\Pi := \{\alpha_0,\, \alpha_{j,\nu} \mid j \geq 0,\ \nu \geq 1\}$ は内積

$$\begin{aligned}
(\alpha|\alpha) &= 2 \qquad (\alpha \in \Pi),\\
(\alpha_0|\alpha_{j,\nu}) &= -\delta_{\nu,1},\\
(\alpha_{i,\mu}|\alpha_{j,\nu}) &= \begin{cases} 0 & (i \neq j \quad \text{or} \quad |\mu - \nu| > 1),\\ -1 & (i = j \quad \text{and} \quad |\mu - \nu| = 1)\end{cases}
\end{aligned}$$



が定義された $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{h}$ の基底で，**単純ルート** $\alpha \in \Pi$ に対する $\mathfrak{h}$ 上の鏡映 $s_\alpha : x \mapsto x - (\alpha|x)\alpha$ で生成される群がKac-Moodyルート系 (Π, W) の**Weyl群** W である．Π の元の非負整数倍の和として表せる $\mathfrak{h}$ の元の全体を Q_+ とおく．**正の実ルート**の全体 Δ_+^{re} と**正の虚ルート**の全体 Δ_+^{im} と正ルートの全体 Δ_+ は

$$\Delta_+^{re} := W\Pi \cap Q_+, \quad \Delta_+^{im} := \{\alpha \in Q_+ \mid W\alpha \subset Q_+\}, \quad \Delta_+ := \Delta_+^{re} \amalg \Delta_+^{im}$$

と定義される．扱っている場合は $W\Pi = W\alpha_0$ であり，$\alpha \in \Delta_+$ に対して $(\alpha|\alpha)$ は2以下の偶数となる．その値が2ということは $\alpha \in \Delta_+^{re}$ と同値である．このとき

$$\alpha_{\mathbf{m}} := \operatorname{ord}\mathbf{m} \cdot \alpha_0 + \sum_{j=0}^{p} \sum_{\nu=1}^{n_j - 1} \sum_{i=\nu}^{n_j} m_{j,i}\, \alpha_{j,\nu}$$

と定義されて

$$\operatorname{idx}\mathbf{m} = (\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}), \quad |\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| = \bigl(\Lambda(\lambda) + \tfrac{\epsilon}{2}\alpha_{\mathbf{m}}|\tfrac{1}{2}\alpha_{\mathbf{m}}\bigr)$$

が成立する．ここで $\Lambda(\lambda)$ は $\mathfrak{h}$ の双対空間を若干拡張した空間 $\hat{\mathfrak{h}}$ の元で

$$\mathfrak{h}^\vee := \{\Lambda = \lambda_0\alpha_0 + \sum \lambda_{j,\nu}\alpha_{j,\nu} \in \prod_{\alpha\in\Pi} \mathbb{C}\alpha\,;\, \lambda_{j,1} = 0 \quad (j \gg 1)\},$$

$$\Lambda_0 := \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-\nu)\alpha_{j,\nu},$$

$$\Lambda_{j,\nu} := \sum_{i=\nu+1}^{\infty}(\nu-i)\alpha_{j,i} \quad (j=0,\dots,p,\ \nu=0,1,2,\dots),$$

$$\Lambda^0 := 2\Lambda_0 - 2\Lambda_{0,0} = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(1+\nu)\alpha_{0,\nu} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-\nu)\alpha_{j,\nu},$$

$$\Lambda_{j,k}^0 := \Lambda_{j,0} - \Lambda_{k,0} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu(\alpha_{k,\nu}-\alpha_{j,\nu}) \quad (0\le j<k),$$

$$\Lambda(\lambda) := -\epsilon\Lambda_0 + \sum_{j=0}^{p}\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{j,\nu}(\Lambda_{j,\nu-1}-\Lambda_{j,\nu}) \in \bar{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h}^\vee/\mathbb{C}\Lambda^0.$$

このとき以下の対応が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}\bigl\{P_{\mathbf{m}}:\ \text{Fuchs型微分作用素 with }\{\lambda_{\mathbf{m}}\}\bigr\} & \to & \bigl\{(\Lambda(\lambda),\alpha_{\mathbf{m}})\,;\,\alpha_{\mathbf{m}}\in\overline{\Delta}_+\bigr\}\\ \downarrow\partial_\ell,\ \text{addition} & \circlearrowright & \downarrow W\text{-action},\ +\tau\Lambda_{0,j}^0\\ \bigl\{P_{\mathbf{m}}:\ \text{Fuchs型微分作用素 with }\{\lambda_{\mathbf{m}}\}\bigr\} & \to & \bigl\{(\Lambda(\lambda),\alpha_{\mathbf{m}})\,;\,\alpha_{\mathbf{m}}\in\overline{\Delta}_+\bigr\}.\end{array} \tag{15}$$

定理 5.2 ([8, 10]). $\overline{\Delta}_+$ の元 α に対する W の作用は $(\alpha|\alpha)$ を変えないが，$(\alpha|\alpha)$ が同じものは有限個の軌道に分かれる．各軌道には α_0 の係数が最小の元が一意に存在し，対応するスペクトル型を **fundamental** という.

特にリジッドな場合は，スペクトル型が実ルートに対応するので W の作用で α_0 に変換される．すなわち前節の変換を何度かほどこすと $u'=0$ という自明な方程式に移せることが分かる，これらは可逆変換なので，逆をたどればリジッドな方程式や解の積分表示が得られることになる．この各ステップを解析することにより，リジッドなFuchs型方程式の解析が可能となる.

$\mathrm{idx}\,\mathbf{m}=0$ のときは，fundamentalなスペクトル型は

$$\tilde{D}_4: 11,11,11,11 \quad \tilde{E}_6: 111,111,111 \quad \tilde{E}_7: 1111,1111,22 \quad \tilde{E}_8: 111111,222,33$$

の4つになる．$\mathrm{idx}\,\mathbf{m}=-2,\ -4\ -6$ のときは，それぞれ13個，36個，67個ある（表は[10]にある)．リジッドでなくてアクセサリー・パラメータが存在し，しかも特異点が4点以上あるときは，対応するSchlesinger型の場合のモノドロミーを不変にする変形から（高階）Painlevé方程式が得られる．このときも(15)にあたることが成り立ち，変換で得られる（高階）Painlevé方程式は変わらないことが[2]で示されているので，fundamentalなスペクトル型の場合を調べればよいことになる．$\mathrm{idx}\,\mathbf{m}=-2,\ -4$ のとき，それぞれ4個，12個あって[13]および[14]で計算された.

6. Fuchs型の解析

前2節の方針でFuchs型方程式の具体的解析が可能で，その多くが[10]に書かれている．ここでは，リジッドなスペクトル型の場合の既約性と接続公式の結果を挙げておく．リジッドなスペクトル型は5階以下では20種，40階では2,554,015種ある．その表

や様々な系列[12]は[10]に述べられている．最も基本的な系列はC. T. Simpsonが考察した超幾何族，Jordan-Pochhammer族，偶奇族である．なお，偶奇族のスペクトル型は$2m$階の$mm, mm-11, 1^{2m}$と$2m+1$階の$mm+1, mm1, 1^{2m+1}$となる．

$\mathbf{m}$をリジッドなスペクトル型とすると，Fuchs関係式を満たす$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$をGRSとするFuchs型方程式$P_{\mathbf{m}}(\lambda)u=0$が一意に定まる．

定理 6.1 (既約性). 方程式が既約となるための必要十分条件は，$w_0\alpha_{\mathbf{m}}=\alpha_0$を満たす長さ最小の$w_0\in W$によって$\Delta(\mathbf{m}):=\Delta_+^{re}\cap w_0(-\Delta_+^{re})$と定義すると

$$(\Lambda(\lambda)|\alpha)\notin\mathbb{Z}\epsilon\quad(\forall\alpha\in\Delta(\mathbf{m})).$$

上の定理や前節の結果は代数曲線の場合も成り立つ．その場合，前々節の変換は

$$(\text{addition})\ \begin{cases}x\mapsto x\\ y\mapsto y-\frac{\lambda}{x-c}\end{cases},\quad(\text{Euler変換})\ \begin{cases}x\mapsto x-\frac{\mu}{y}\\ y\mapsto y\end{cases}$$

というシンプレクティック形式$dx\wedge dy$が定義された2次元複素ベクトル空間の双有理シンプレクティック変換になる．リジッド指数は代数曲線の**種数**と関係している．

定理 6.2 (接続公式). $c_0=0,\ c_1=1,\ c_p=\infty$，$m_{0,n_0}=m_{1,n_1}=1$とする．$x^{\lambda_{0,n_0}}$に対応する$x=0$での局所解の$x=1$への接続の$(1-x)^{\lambda_{1,n_1}}$に対応する局所解に対する係数は

$$c(\lambda_{0,n_0}\rightsquigarrow\lambda_{1,n_1})=\frac{\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n_0-1}\Gamma(\lambda_{0,n_0}-\lambda_{0,\nu}+1)\cdot\prod_{\nu=1}^{n_1-1}\Gamma(\lambda_{1,\nu}-\lambda_{1,n_1})}{\displaystyle\prod_{\substack{\alpha_{\mathbf{m}'}\in\Delta(\mathbf{m})\\ m'_{0,n_0}=1\\ m'_{1,n_1}=0}}\Gamma\bigl(|\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}|\bigr)\cdot\prod_{\substack{\alpha_{\mathbf{m}'}\in\Delta(\mathbf{m})\\ m'_{0,n_0}=0\\ m'_{1,n_1}=1}}\Gamma\bigl(1-|\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}|\bigr)\cdot\prod_{j=2}^{p}(1-\tfrac{1}{c_j})^{-L_j(\lambda)}}$$

で与えられる．$L_j(\lambda)$は計算可能な数で，$p=2$のときは現れない．

7. 不確定特異点

確定ではない特異点を不確定特異点というが，福原–Turrittinの結果により，その点では係数を形式Puiseux級数まで拡大するとn階の$P\in W(x)$が一階の微分作用素の積に分解される．このことから不確定特異点では，階数に等しい個数の独立な形式解が構成される．代数拡大が不要なとき**不分岐**という．特異点を原点に移して考えよう．

確定特異点のとき数であった一般化特性指数$[\lambda_\nu]_{(m_\nu)}$のλ_νを多項式$\lambda_\nu(t)\in\mathbb{C}[t]$に置き換えることにより，不分岐不確定の場合の一般化特性指数が定義される．簡単のため$\deg(\lambda_j-\lambda_{j'})>0$または$\lambda_\nu-\lambda_{\nu'}\notin\mathbb{Z}$ $(1\le j<j'\le n')$とすると，形式解

$$\hat{u}_{\nu,k}=(1+a_1x+a_2x^2+\cdots)e^{\int(\lambda_\nu(\frac{1}{x})+k)\frac{dx}{x}}\quad(k=0,\dots,m_\nu-1,\ \nu=1,\dots,n')\tag{16}$$

の存在で特徴づけられる．ここで

$$e^{\int(\lambda_\nu(\frac{1}{x})+k)\frac{dx}{x}}=x^{\lambda_{\nu,0}+k}e^{-\frac{\lambda_{\nu,1}}{x}-\frac{\lambda_{\nu,2}}{2x^2}-\frac{\lambda_{\nu,3}}{3x^3}-\cdots}\quad(\lambda_\nu(t)=\lambda_{\nu,0}+\lambda_{\nu,1}t+\lambda_{\nu,2}t^2+\cdots\in\mathbb{C}[t]).$$

分岐している場合は，適当な正整数qに対して$x^{\frac{1}{q}}$をxと置き換える変換によって不分岐となり，上のような独立な形式解が構成できる．

[12] 可約なパラメータのときの既約部分商で閉じているもの．

以下，全ての特異点は不分岐不確定か確定としよう．このとき $\{[\lambda_{j,\nu}(t)]_{(m_{j,\nu})}\}_{\substack{0\le j\le p\\ 1\le\nu\le n_j}}$ という GRS が定義される ($\lambda_{j,\nu}(t)=\sum_{k\ge0}\lambda_{j,\nu,k}t^k$)．$0\le j\le p$, $1\le i\le n$ に対し

$$m_{j,1}+\cdots+m_{j,\nu_{j,i-1}}<i\le m_{j,1}+\cdots+m_{j,\nu_{j,i}}$$

によって $\nu_{j,i}$ を定め，$\{1,\dots,n\}$ の元に対する同値関係 $\underset{j,r}{\sim}$ を

$$i\underset{j,r}{\sim}i' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\nu=\nu' & (r=0)\\ \deg\bigl(\lambda_{j,\nu_{j,i}}-\lambda_{j,\nu_{j,i'}}\bigr)<r & (r\ge1)\end{cases} \tag{17}$$

と定義すると，$\underset{j,r}{\sim}$ によって n の分割

$$\mathbf{m}_j^{(r)}: n=m_{j,1}+\cdots+m_{j,n_{j,r}} \tag{18}$$

が定まる．$\mathbf{m}_j^{(r)}$ は $\mathbf{m}_j^{(r+1)}$ の細分になっていることに注意しよう．さらに

$$n_j=n_{j,0}\ge n_{j,1}\ge\cdots\ge n_{j,r_j}>n_{j,r_j+1}=1 \tag{19}$$

を満たす非負整数 r_j が定まる（$j=0,\dots,p$）．これを用いて $\tilde{\mathbf{m}}=\bigl(\mathbf{m}_j^{(r)}\bigr)_{\substack{j=0,\dots,p\\ r=0,\dots,r_j}}$ という n の分割の $r_0+\cdots+r_p$ 個の組を定義し，$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ の **unfolding**

$$\{\lambda_{\tilde m}\}:=\left\{\begin{matrix}\cdots & x=c_j+t_r\ (j=0,\dots,p,\ r=0,\dots,r_j) & \cdots\\ & [\lambda_{j,\bar\nu}^{(r)}]_{(m_{j,\bar\nu}^{(r)})}\ (\bar\nu=1,\dots,n_{j,r}) & \end{matrix}\right\} \quad \begin{pmatrix}c_j+t_r\mapsto\frac{1}{t_r}\\ \text{if } c_r=\infty\end{pmatrix}$$

という Fuchs 型 GRS を定義し，$\tilde{\mathbf{m}}$ を $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ のスペクトル型という．ただし

$$\lambda_{j,\bar\nu}^{(r)}:=\sum_{k=r}^{r_j}\frac{\lambda_{j,\mu,k}}{\prod_{0\le s\le k,\,s\ne r}(t_r-t_s)} \qquad (\text{if }\ m_{j,1}+\cdots+m_{j,\mu}=m_{j,1}^{(r)}+\cdots+m_{j,\bar\nu}^{(r)}).$$

予想. t_r は，その絶対値が十分小さく，また互いに異なるとする．$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ を持つ方程式は全て $\{\lambda_{\tilde{\mathbf{m}}}\}$ を持つ Fuchs 型方程式の $t_r\mapsto0$ の合流として得られる．方程式は t_r（および $\lambda_{j,\nu}$）に局所的に正則に依っている．この方程式を **versal** な方程式と呼ぶ．

Fuchs 型のときに重要であった Gauge 変換 $\mathrm{Ad}\bigl((x-c)^\lambda\bigr)$ は, t_r を正則パラメータとする以下の Gauge 変換に一般化される．

$$\mathrm{Ad}\Biggl(\prod_{r=0}^{r_j}(x-c_j-t_r)^{\sum_{k=r}^{r_j}\frac{\lambda_{j,\nu,k}}{\prod_{\substack{0\le s\le k\\ s\ne r}}(t_r-t_s)}}\Biggr): x\mapsto x,\ \partial\mapsto\partial-\sum_{r=0}^{r_j}\frac{\lambda_{j,\nu,r}}{\prod_{k=0}^{r}(x-c_j-t_k)}.$$

これを使うと，特異点を $\{\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_2},\infty\}$ とする Versal な Gauss 超幾何函数の積分表示は

$$\int_{\frac{1}{c_1}}^{x}e^{-\int\left(\frac{\lambda_1}{1-c_1t}+\frac{\lambda_2 t}{(1-c_1t)(1-c_2t)}\right)dt}(x-t)^{\mu-1}dt=\int_{\infty}^{x}e^{-\lambda_1t-\frac{\lambda_2t^2}{2}}(x-t)^{\mu-1}dt \quad (c_1=c_2=0).$$

また Fuchs 型のときのリジッド指数や Fuchs 関係式は以下のように一般化される．

$$\mathrm{idx}\{\lambda_{\mathbf{m}}\}:=\mathrm{idx}\,\tilde{\mathbf{m}}=2n^2-\sum_{j=0}^{p}\Bigl(n^2-\sum_{\nu=1}^{m_j}m_{j,\nu}^2\Bigr)-\sum_{j,\nu,\nu'}\deg\left(\lambda_{j,\nu}-\lambda_{j,\nu'}\right)\cdot m_{j,\nu}m_{j,\nu'},$$

$$|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}|:=\sum_{j=0}^{p}\sum_{\nu=1}^{m_j}m_{j,\nu}\lambda_{j,\nu,0}-\mathrm{ord}\,\mathbf{m}+\tfrac12\,\mathrm{idx}\,\tilde{\mathbf{m}}\ \Bigl(=\bigl|\{[\lambda_{j,\nu}^{(r)}]_{(m_{j,\nu}^{(r)})}\}\bigr|\Bigr)=0.$$

現時点で以下のことが分かっている．

定理 7.1. 不確定特異点は不分岐と仮定する．
i) ([3]) スペクトル型と方程式の変換は，ある Kac-Moody ルート系の言葉で表せる．
$\{$スペクトル型$\} \hookrightarrow$ universal symmetric Kac-Moody root system (supernova, galaxy)
ii) ([3], [5]) $\operatorname{idx}\tilde{\mathbf{m}} = 2$ で既約なものはリジッドと呼ばれるが，上の変換と $\mathrm{Ad}(\partial^{-\mu})$ との組み合わせで trivial な方程式 $u' = 0$ （$\epsilon = 0$ のときは $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$）に移される．
iii) 前予想は，リジッドな場合，さらに $\operatorname{idx}\tilde{\mathbf{m}} \geq -2$ の場合は正しい．
iv) ([5]) $\operatorname{idx}\tilde{\mathbf{m}}$ を定めると，変換により帰着されるスペクトル型は有限種（これを basic スペクトル型という）．
v) ([5]) $\operatorname{idx}\tilde{\mathbf{m}} \geq -2$ のときの basic スペクトル型の分類：

$\operatorname{idx}\tilde{\mathbf{m}} = -2$ のときは，Fuchs 型の 13 種とそれの Laplace 変換で得られるものの他，33 種ある．33 種のうち Laplace 変換で互いに移らないものは 18 種[13]．

なお $\operatorname{idx}\tilde{\mathbf{m}} = 0$ のときに対応するルート系は，Fuchs 型の $\tilde{D}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ の 4 種の他，$\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, $\tilde{A}_3$, $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_1$ の 4 種が現れる．

参考文献

[1] W. Crawley-Boevey, On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspaces and sum zero, Duke Math. J. **118** (2003), 339–352.

[2] Y. Haraoka and G. M. Filipuk, Middle convolution and deformation for Fuchsian systems, J. Lond. Math. Soc. **76** (2007), 438–450.

[3] K. Hiroe, Linear differential equations on $\mathbb{P}^1$ and root systems, J. Algebra **382** (2013), 1–38.

[4] K. Hiroe, Linear differential equations on the Riemann sphere and representaion of quivers, arXiv:1304.7048.

[5] K. Hiroe and T. Oshima, A classification of roots of symmetric Kac-Moody root systems and its application, Symmetries, Integrable Systems and Representations, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics **40**, 2012, 195–241.

[6] N. M. Katz, *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies **139**, Princeton University Press, 1995.

[7] T. Oshima, `muldif.rr`, A library of the calculation of differential operators for computer algebra `Risa/Asir`, `ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif/`,

[8] T. Oshima, Classification of Fuchsian systems and their connection problem, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B37** (2013), 163–192 (arXiv:0811.2916).

[9] T. Oshima, Katz's middle convolution and Yokoyama's extending operation, 2008, arXiv:0812.1135, 19pp.

[10] T. Oshima, *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations*, MSJ Memoirs **28** (2012), pp. ixi+203, 日本数学会.

[11] 大島利雄，特殊関数と代数的線型微分方程式，東京大学数理科学レクチャーノート **11**，廣惠一希記，2011，`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/publication/lecturenote.html`.

[12] T. Oshima, An elementary approach to the Gauss hypergeometric function, Josai Mathematical Monographs **6** (2013), 3–23 (UTMS 2013–2).

[13] H. Sakai, Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painlevé type equations, 2010, UTMS 2010–17, 21pp.

[14] T. Suzuki, Six-dimensional Painlevé systems and their particular solutions in terms of hypergeometric functions, arXiv:1212.5871v3.

[13] Laplace 変換は $x \mapsto -\partial$, $\partial \mapsto x$ という対応を与える