1. 形式ベキ級数

定義 1.1. $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$ を第 0 項から始まる実数 $\mathbb{R}$（または複素数 $\mathbb{C}$）の無限列とする．このような 2 つの数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$ と $\{b_n\}_{n=0,1,\dots}$ と $r \in \mathbb{R}$（または $\in \mathbb{C}$）に対し，**和** $\{c_n\}_{n=0,1,\dots} = \{a_n\}_{n=0,1,\dots} + \{b_n\}_{n=0,1,\dots}$，**積** $\{d_n\}_{n=0,1,\dots} = \{a_n\}_{n=0,1,\dots} \cdot \{b_n\}_{n=0,1,\dots}$ および**スカラー倍** $\{e_n\}_{n=0,1,\dots} = r\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$ を

$$c_n = a_n + b_n, \quad d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}, \quad e_n = r a_n \qquad (n = 0, 1, \dots) \tag{1.1}$$

によって定義する．

上記の数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}$ を

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1.2}$$

のように表記し，**形式ベキ級数**という．このとき $a_m x^m$ を $f(x)$ の**第** m **項**といい，a_m を第 m 項または x^m の**係数**という．$a_m = 0$ ならば第 m 項の和は書かなくてもよい．またある N があって $m \geq N \Rightarrow a_m = 0$ となるとき，$f(x)$ を**多項式**という．

さらに $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ とおいたとき，上の記号のもとで以下のように定義する．

$$\begin{gathered}
f(0) = a_0, \\
f^{(1)}(x) = f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad f^{(m+1)}(x) = \bigl(f^{(m)}\bigr)'(x) \quad (m = 1, 2, \dots), \\
(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \\
(fg)(x) = f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \quad (rf)(x) = r(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n.
\end{gathered} \tag{1.3}$$

さらに $-f(x) = (-1)f(x)$，$f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)$ と書く．また，全ての a_n が 0 のとき $\{a_n\}_{n=0,1,\dots} = 0$，$f(x) \equiv 0$，$f = 0$ などと書く．また一般に $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ となる $f(x)$ のことを $o(x^{m-1})$ または $O(x^m)$ と書く．

形式ベキ級数 $f_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} x^n$（$m = 0, 1, 2, \dots$）と $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ があったとき，各 n に対し m を十分大きく取れば $a_{m,n}$ は m に依存せず c_n に等しくなるとき，以下のように書く．

$$h(x) = \lim_{m \to \infty} f_m(x). \tag{1.4}$$

例 1.2. i) $$(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = 1,$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2 = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots.$$

ii) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ のとき，第 $m{+}1$ 項以降を削除した多項式 $f_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$ に対し

$$f(x) = f_m(x) + O(x^{m+1}), \quad f(x) = \lim_{m \to \infty} f_m(x).$$

より一般に $g(x) = \lim_{m \to \infty} g_m(x)$，$h(x) = \lim_{m \to \infty} h_m(x)$ のとき

$$\begin{gathered}
g(x) + h(x) = \lim_{m \to \infty} \bigl(g_m(x) + h_m(x)\bigr), \\
r g(x) = \lim_{m \to \infty} r g_m(x), \\
g(x)h(x) = \lim_{m \to \infty} g_m(x) h_m(x), \\
f(x)(g(x) + h(x)) = (g(x) + h(x)) f(x) = f(x)g(x) + f(x)h(x).
\end{gathered} \tag{1.5}$$

定理 1.3. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x)$, $h(x)$ を形式ベキ級数とする．

i) $fg = 0$ ならば $f = 0$ または $g = 0$.

ii) $f_m(x)=\sum_{n=0}^m a_nx^n$ とおく．$h(0)=0$ ならば $f_m(h(x))=\sum_{n=0}^m a_n\bigl(h(x)\bigr)^n$ に対し $\lim_{m\to\infty} f_m(h(x))$ が存在するので，それを $f(h(x))$ あるいは $\sum_{n=0}^\infty a_nh(x)^n$ と書く．このとき

$$
\begin{aligned}
&(f+g)(h(x))=f(h(x))+g(h(x)),\\
(1.6)\qquad &(rf)(h(x))=rf(h(x)) \qquad (r\in\mathbb{R} \text{ または } \in\mathbb{C}),\\
&(fg)(h(x))=f(h(x))g(h(x)).
\end{aligned}
$$

iii) $f(0)\neq 0$ のとき，$f(x)\varphi(x)=1$ となる形式ベキ級数 $\varphi(x)$ がただ一つ存在する．それを $f^{-1}(x)$ または $\frac{1}{f(x)}$ と書く．$g(x)f^{-1}(x)$ のことを $\frac{g(x)}{f(x)}$ と書く．

特に $f(0)=1$ で $a_n\in\mathbb{Z}$（=整数の集合）のとき，$f^{-1}(x)$ は $f^{-1}(0)=1$ を満たす整数係数の形式ベキ級数となる．

証明. i) $f\neq 0$, $g\neq 0$ ならば $a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0$, $a_m\neq 0$，$b_0=b_1=\cdots=b_{m'-1}(0)=0$, $b_{m'}\neq 0$ となる m, m' が存在し

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x)&=(a_mx^m+a_{m+1}x^{m+1}+\cdots)(b_{m'}x^{m'}+b_{m'+1}x^{m'+1}+\cdots)\\
&=a_mb_{m'}x^{m+m'}+(a_{m+1}b_{m'}+a_mb_{m'+1})x^{m+m'+1}+\cdots\not\equiv 0.
\end{aligned}
$$

ii) $m\geq N$, $m'\geq N$ のとき $f_m(h(x))-f_{m'}(h(x))=O(x^{N+1})$ となるので，$\lim_{m\to\infty} f_m(h(x))$ が存在する．あとは

$$
\begin{gathered}
(f+g)_m(h(x))=(f_m+g_m)(h(x)),\quad (rf)_m(h(x))=rf_m(h(x)),\\
(fg)_m(h(x))=(f_mg_m)(h(x))+O(x^{m+1})
\end{gathered}
$$

などから分かる．

iii) $h(x)=1-f(0)^{-1}f(x)$ とおくと $h(0)=0$ を満たす．例 1.2 i) の x に $h(x)$ を代入すると，ii) より

$$f(0)^{-1}f(x)\Bigl(\sum_{n=0}^\infty h(x)^n\Bigr)=1.$$

よって $\varphi(x)=f(0)^{-1}\bigl(\sum_{n=0}^\infty h(x)^n\bigr)$ は $f(x)\varphi(x)=0$ を満たす．一方 $f(x)\psi(x)=1$ ならば $f(x)\bigl(\varphi(x)-\psi(x)\bigr)\equiv 0$ となり，i) より $\varphi=\psi$ が分かる．

また $f(x)$ が整数係数で $f(0)=1$ ならば $\sum_{n=0}^m h(x)^m$ は整数係数の多項式となるので，最後の主張が得られる． □

例 1.4. $$\frac{1}{(1-rx)^m}=\sum_{n=0}^\infty\frac{(n+1)(n+2)(n+m-1)}{(m-1)!}r^nx^n \qquad (m=1,2,\ldots).$$

定義 1.5. 形式ベキ級数 $f(x)=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ に対し，実数 $r>0$ で

$$0<r_1<r\Rightarrow\sum_{n=0}|a_n|r_1^n<\infty,\qquad r_2>r\Rightarrow\sum_{n=0}|a_n|r_2^n=\infty$$

となるものが存在するとき，r を $f(x)$ の**収束半径**という．全ての $r>0$ に対し $\sum_{n=0}^\infty a_nr^n$ が有限となるとき収束半径は ∞，また無限となるとき収束半径は 0 であるという．

非負実数あるいは ∞ の範囲で，収束半径は必ず存在する．収束半径が r のとき，$|x|<r$ ならば $\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ は収束する．

例 1.6. i) $c>0$ のとき形式ベキ級数 $f(x)=\frac{1}{1-cx}$ および $m\geq 1$ のときの $f^{(m)}(x)$ の収束半径は，共に $\frac{1}{c}$ である．

ii) $f(x)=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ の収束半径が r であったとする．$0<r_1<r$ と $r_2>r$ とに対して

$$
\begin{gathered}
|a_n|>C_1r_1^n \text{ を満たす } n \text{ は無限個ある},\\
\text{全ての } n \text{ に対し } |a_n|<C_2r_2^n.
\end{gathered}
$$

となる $C_1>0$, $C_2>0$ が存在する．

2. 分割数

$p_m(n)$ を，正整数 n を m 以下の正整数の和に分ける（順序は無視—以下同じ）場合の数とする．一方 $p^m(n)$ を，正整数 n を m 個以下の正整数の和に分ける場合の数とする．$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とおいたとき

$$p^m(n) = \#\{(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in \mathbb{N}^m;\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n,\ k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m\},$$
$$p_m(n) = \#\{(b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{N}^3;\ b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m = n\}.$$

上記で b_j は，和において j が b_j 個あるとしている．n を正整数の和に分ける場合の数を**分割数**といい，$p(n)$ と書くことにする．$m \geq n$ ならば，$p(n) = p_m(n) = p^m(n)$．なお，$p(0) = p_m(0) = p^m(0) = 0$ とおく．

問 2.1. $p_m(n) = p^m(n)$.

定義から

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)x^n &= \Bigl(\sum_{b_1=0}^{\infty} x^{1b_1}\Bigr)\Bigl(\sum_{b_2=0}^{\infty} x^{2b_2}\Bigr)\cdots\Bigl(\sum_{b_m=0}^{\infty} x^{mb_m}\Bigr)\\ &= \prod_{k=1}^{m}\Bigl(\sum_{b_k=0}^{\infty} x^{kb_k}\Bigr) = \prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-x^k}\end{aligned} \tag{2.1}$$

となるので，$m \to \infty$ のとき（形式ベキ級数として）収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}. \tag{2.2}$$

$-1 < x < 1$ のとき $\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^k} = \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-x^k}$ は収束して C^∞ 級の関数となる（$x = 0$ での n 次の微係数は $n!p(n)$）．

$-\frac{d}{dy}\log(1-y) = \frac{1}{1-y}$ より (平均値の定理から) $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ のとき $y \leq -\log(1-y) \leq 2y$ となる．$0 \leq x < 1$ となる実数 x を一つ取る．これに対して m を十分大きく取ると $0 \leq x^m \leq \frac{1}{2}$ となる．このとき

$$0 \leq \log\prod_{k=m}^{N}\frac{1}{1-x^k} \leq \sum_{k=m}^{N} 2x^k \leq \frac{1}{1-x}$$

$\prod_{k=m}^{N}\frac{1}{1-x^k}$ は N について単調増加で上から $e^{\frac{1}{1-x}}$ で押さえられているので、ある正の実数に収束する．

(2.2) より, $0 < x < 1$ を満たす実数 x に対し

$$p(n) < \Bigl(\frac{1}{x}\Bigr)^n \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)}. \tag{2.3}$$

右辺は対数をとって n で割って $n \to \infty$ の極限を考えると $-\log x$ に収束する．よって特に

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log p(n)}{n} = 0.$$

$n \to \infty$ のときの良い $p(n)$ の評価を得るには、(2.3) で n に応じて x をうまくとれば良いと考えらる．$x = e^{-t}$ とおいて

$$f(t) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - e^{-kt})$$

という関数の $(0 <)t \to 0$ の様子を調べることが重要になる．さて，$0 \leq y < 1$ のとき

$$-\log(1-y) = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \cdots \tag{2.4}$$

となることを使うと（これは、$\frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + s^3 + \cdots$ を 0 から y まで積分すれば分かる）、

$$
\begin{aligned}
-\log f(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-kt} + \frac{e^{-2kt}}{2} + \frac{e^{-3kt}}{3} + \cdots \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{e^{-k\ell t}}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{e^{-\ell t}}{\ell(1-e^{-\ell t})} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell(e^{\ell t}-1)} < \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2 t} = \frac{\pi^2}{6t}
\end{aligned}
$$

ここで, $e^{\ell t} - 1 > \ell t$ $(t > 0)$, $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$[1] を使った．従って

$$
p(n) = e^{nt} e^{-\log f(t)} < \exp\left(nt + \frac{\pi^2}{6t} \right)
$$

を得る．ここで $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ ととると

$$
p(n) < \exp\left(\pi \sqrt{\frac{2n}{3}} \right)
$$

が得られる．実際には Hardy-Ramanujan（1918 年）により

$$
p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} \exp\left(\pi \sqrt{\frac{2n}{3}} \right) \tag{2.5}
$$

が証明されている．これは、関数 $f(t) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-e^{-kt})$ のより深い解析に基づいている．たとえば

$$
f(\frac{2\pi}{t}) = \sqrt{t} e^{\frac{\pi}{12}(\frac{1}{t}-t)} f(2\pi t) \tag{2.6}
$$

$$
\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \big(x^{\frac{n(3n-1)}{2}} + x^{\frac{n(3n+1)}{2}} \big) \tag{2.7}
$$

などの不思議な等式が成立する．この下の式に $p(n)$ の生成関数を乗じて x^n 次の項の係数を比べると

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k p(n - \frac{k(3k-1)}{2}) = 0 \qquad \text{（Euler の五角数定理）} \tag{2.8}
$$

となる．ただし，$n < 0$ のとき $p(n) = 0$，および $p(0) = 1$ と定める．この漸化式は $p(n)$ を順に計算していくのに用いられる．すなわち

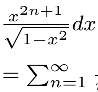
$$
\begin{aligned}
p(n) &= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) \\
&\quad - p(n-22) - p(n-26) + p(n-35) + p(n+40) - \cdots
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

そのほか Ramanujan は、$p(5m+4) \equiv 0 \mod 5$, $p(7m+5) \equiv 0 \mod 7$, $p(11m+6) \equiv 0 \mod 11$ などの不思議な関係式を発見している。

定義 2.1. n の分割 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_L$（$n_1 \geq n_2 \cdots \geq n_L > 0$）に対し，同じ大きさの正方形（箱）を座標平面の第 4 象限に，第 1 列に n_1 個，第 2 列に n_2 個，というように第 L 列まで左上に詰めて並べたものを **Young 図形**という．

Young 図形 Y に対し，箱の数を $|Y|$（今の場合 n），行の数を $\ell(Y)$ と書いて Y の長さという．

たとえば右図は $7 = 4 + 2 + 1$ という分割に対する Young 図形である．



---

[1] Euler による証明は $(\mathrm{Arcsin}\, x)' = \sqrt{1-x^2}$, $\mathrm{Arcsin}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, $\int_0^1 \frac{\mathrm{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\frac{(\mathrm{Arcsin}\, x)^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{8}$ より $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ となるので、$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ とおくと $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$ より，$S = \frac{\pi^2}{6}$ を得る．ここで、$(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots(2)$, $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots(1)$.

注意 2.2. $|Y|=n$ を満たす Young 図形の個数は，n の分割数 $p(n)$ に等しい：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \sum_{Y\in\mathcal{Y}} x^{|Y|}. \tag{2.10}$$

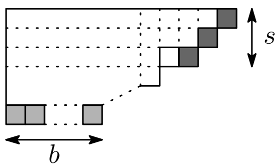
ここで $\mathcal{Y}$ を Young 図形全体の集合とする．ただし，箱の数が 0 のものも Young 図形の一つとみなし，それを $\emptyset$ で表す.

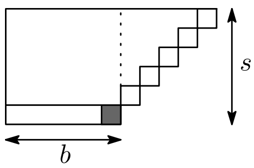
Euler の五角数定理の証明. 同様の考察をすると

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) &= 1+\lim_{L\to\infty}\sum_{\ell=1}^{L}(-1)^{\ell}\Bigl(\sum_{n_\ell=1}^{\infty}\ \sum_{n_{\ell-1}=n_\ell+1}^{\infty}\cdots\sum_{n_1=n_2+1}^{\infty} x^{n_1+\cdots+n_\ell}\Bigr)\\ &= \sum_{Y\in\mathcal{Y}'}(-1)^{\ell(Y)}x^{|Y|}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

ここで $\mathcal{Y}'$ とは，対応する分割 $n=n_1+\cdots+n_\ell$ が $n_1>n_2>\cdots>n_\ell>0$ を満たす（すなわち，列の数が全て異なる)Young 図形の集合とする（$\emptyset$ も含める）.

$\emptyset\neq Y\in\mathcal{Y}'$ が分割 $n=n_1+\cdots+n_\ell$（$n_1>n_2>\cdots>n_\ell>0$）に対応しているとする．このとき $b(Y)=n_\ell$ と置き，また $n_k=n_1-k+1$ を満たす最大の k ($1\le k\le\ell$）を $s(Y)$ とおく.





$\underline{b(Y)>s(Y)\text{ のとき}}$．$s(Y)<\ell(Y)$ ならば，各 $n_1,\ldots,n_{s(Y)}$ を 1 減らし，$s(Y)$ 個の箱で，新たに第 $\ell+1$ 列を作ることによって得られる Young 図形を Y' とおくと

$$|Y|=|Y'|,\ Y'\in\mathcal{Y}',\ \ell(Y')=\ell(Y)+1,\ b(Y')=s(Y)\le s(Y'). \tag{2.12}$$

$s(Y)=\ell(Y)$ のときは，同様の操作を行ったとき，$b(Y)>s(Y)+1$ のときのみが $Y'\in\mathcal{Y}'$ となり，(2.12) を満たす.

$\underline{b(Y)\le s(Y)\text{ のとき}}$．$s(Y)<\ell(Y)$ ならば第 ℓ 列の $b(Y)$ 個の箱を，第 1 列から第 $b(Y)$ 列までに一つずつ移す．こうして得られる Young 図形を Y'' とおくと

$$|Y|=|Y''|,\ Y''\in\mathcal{Y}',\ \ell(Y'')=\ell(Y)-1,\ b(Y'')>b(Y)=s(Y''). \tag{2.13}$$

$s(Y)=\ell(Y)$ のときは，$b(Y)<s(Y)$ のときのみこの操作が可能で，やはり (2.13) を満たす.

上の 2 つの操作は，互いに逆の操作で, $\emptyset$ と
i) $s(Y)=\ell(Y)=b(Y)-1$ （このとき $|Y|=\ell(Y)^2+\frac{(\ell(Y)+1)\ell(Y)}{2}=\frac{(3\ell(Y)+1)\ell(Y)}{2}$）
ii) $s(Y)=\ell(Y)=b(Y)$ （このとき $|Y|=\frac{(3\ell(Y)+1)\ell(Y)}{2}-\ell(Y)=\frac{(3\ell(Y)-1)\ell(Y)}{2}$）
を満たす $Y\in\mathcal{Y}'$ を全て除いた Y' の元は両者の操作で移り合うものが 2 つずつ組になっている．その 2 つの箱の数は同じで長さの差が 1 なので，(2.11) の最後の式における和でキャンセルし，残るのは $\emptyset$ と上の i) ii) の Y に対応するもののみなので,

$$\sum_{Y\in\mathcal{Y}'}(-1)^{\ell(Y)}x^{|Y|}=1+\sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell}x^{\frac{(3\ell+1)\ell}{2}}+\sum_{\ell=1}^{\infty}(-1)^{\ell}x^{\frac{(3\ell-1)\ell}{2}}.$$

3. 漸化式をもつ数列

数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\ldots}$ が m 項の漸化式

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ma_{n-m}\qquad(n=m,m+1,\ldots) \tag{3.1}$$

を満たすとする．ただし，$c_1, \ldots, c_m$ はある実数（あるいは複素数）とする．この数列は，初期値 $a_0, \ldots, a_{m-1}$ を（任意に）与えると一意に定まることは明らかである．

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3.2}$$

という形式ベキ級数を考えよう．$g(x) = 1 - c_1 x - c_2 x^2 - \cdots - c_m x^m$ という m 次多項式に対し，$g(x)f(x)$ の x^n の係数は，$a_n - c_1 a_{n-1} - \cdots - c_m a_{n-m}$ となり（$k < 0$ のとき，$a_k = 0$ とおく），それは $n \geq m$ のとき 0 となる．よって

$$g(x)f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1} x^{m-1}, \tag{3.3}$$

$$b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k} c_i a_{k-i}, \quad \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -a_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{m-1} & -a_{m-2} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

となり

$$f(x) = \frac{b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1} x^{m-1}}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \cdots - c_m x^m} \tag{3.5}$$

が得られる．$g(x) = \prod_{k=1}^{N} (1 - \lambda_k x)^{m_k}$ と因数分解すると（$i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$）

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_j} \frac{d_j}{(1 - \lambda_k x)^j} \tag{3.6}$$

と表せ（$m_1 + \cdots + m_N = m$），例 1.4 より一般項 a_n が分かる．特に

$$a_n = \sum_{k=1}^{N} (e_{k,0} + e_{k,1} n + \cdots + e_{k,m_k-1} n^{m_k-1}) \lambda_k^n \qquad \Bigl(\sum_{k=1}^{N} m_k = m\Bigr) \tag{3.7}$$

の形をしていることが分かる．

定理 3.1. 上の議論は逆にたどれるので

$$\begin{aligned} \{(3.1)\ \text{の漸化式をもつ数列}\ \} &\Leftrightarrow \Bigl\{\text{有理関数}\ \frac{g(x)}{h(x)}\ \text{で，}\deg g < \deg h = n,\ h(0) \neq 0\Bigr\} \\ &\Leftrightarrow \bigl\{(3.7)\ \text{の形に表せる数列}\bigr\}. \end{aligned}$$

数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\ldots}$ に対し，$a_n^{(0)} = a_n$ とおいて，階差 $m = 1, 2, \ldots$ を

$$a_n^{(m)} = a_{n+1}^{(m-1)} - a_n^{(m-1)}$$

とおき，数列 $\{a_n^{(m)}\}_{n=0,1,\ldots}$ を，もとの数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\ldots}$ の m 階の階差という．

このとき

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m-1)} x^m = a_0^{(m-1)} + \sum_{n=1}^{m} a_{n-1}^{(m)} x^n$$

となるので，$(1-x)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は，x の $m-1$ 次以下の多項式でなる．よって

$$\begin{aligned} \bigl\{\{a_n^{(m)}\}_{n=0,1,\ldots} = 0\ \text{となる数列}\bigr\} &\Leftrightarrow \Bigl\{\frac{h(x)}{(1-x)^m}; \deg h < m\Bigr\} \\ &\Leftrightarrow \bigl\{\text{一般項が}\ n\ \text{の}\ m-1\ \text{次以下の多項式となる数列}\bigr\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

例 3.2 (Fibonacci 数列)**.** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$（$n = 2, 3, \ldots$），$a_0 = a_1 = 1$ で定まる数列は，$(1 - x - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + (a_1 - a_0)x = 1$ を満たす．よって

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} x} - \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} x} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} x^n.$$

4. 有理数に近い実数と有理数から遠い実数

実数 r を有理数 $\frac{q}{p}$ で近似することを考えてみよう．p を正整数とするとき，q を適当に取れば

$$\left|r-\frac{q}{p}\right| \le \frac{1}{2p} \tag{4.1}$$

できるのは明らかであり，p を大きく取れば，実数 r の近似分数が得られる．分母 p をある正整数 n 以下の正整数に限ったとき，最適の近似分数の誤差がどの程度か考えてみよう．r が分母が n 以下の正整数の有理数となるなら，それは誤差なしに表せるので，そうではないとする．

$r = 0, 1, \ldots, n$ に対して pr の小数部分 $pr - [pr]$ を考える．このうち等しいものがあれば，たとえば $1 \le p_1 < p_2 \le n$ で $p_1 r - [p_1 r] = p_2 r - [p_2 r]$ となるものがあれば，$p_2 r - p_1 r = q \in \mathbb{Z}$ であるから，$r = \frac{q}{p_2 - p_1}$ となって仮定に反する．

$0, [r], [2r], \ldots, [nr]$ を小さい順に並べて，$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，$b_j = a_{j+1} - a_j$，$a_j = p_j r - [p_j r]$ （$j = 0, \ldots, n$，$a_{n+1} = 1$，$0 \le p_j \le n$）とおく．$b_0 + \cdots + b_n = 1$ であるから，$a_{m+1} - a_m = b_m \le \frac{1}{n+1}$ となる m がある．このとき $p = p_{m+1} - p_m$, $q = pr - b_m$ とおくと，q は整数で，以下をみたす．

$$\left|r-\frac{q}{p}\right| \le \frac{1}{p(n+1)}. \tag{4.2}$$

正整数 N に対し，$c_{N,r} = \min\{[kr], 1-[kr]; 1 \le k \le N\}$ とおく．$c_{N,r} > 0$ のとき（これは r が無理数なら常に正しい）$c_{N,r} > \frac{1}{n+1}$ となるように正整数 n を選んで上記の p, q を取れば，$p > N$ である．よって，任意の正整数 N に対し，$p > N$ で

$$\left|r-\frac{q}{p}\right| < \frac{1}{p^2} \tag{4.3}$$

をみたす有理数 $\frac{q}{p}$ が存在する．すなわち r の近似有理数の列 $\{\frac{q_n}{p_n}\}_{n=1,2,\ldots}$ で (4.3) を満たすものがある．

正整数 n に対し，有理数 $\{0,1\} \cup \{\frac{q}{p}; 1 \le q \le p-1,\ 2 \le p \le n\}$ の個数は，$2 + (1 + 2 + \cdots + (n-1)) = 2 + \frac{n^2-n}{2}$ 個以下である．よって

$$c_{n,r} \ge \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{n^2-n}{2}} = \frac{1}{n^2-n+2} \tag{4.4}$$

を満たす実数 $r \in (0,1)$ が存在する．よって，(4.3) において左辺を $\frac{1}{p^3}$ にすることは一般には無理なように思われるが，どうであろうか？

命題 4.1. 任意の単調増加の正の整数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ に対し

$$\left|r-\frac{q_n}{p_n}\right| < \frac{1}{a_{p_n}} \tag{4.5}$$

となる近似有理数列 $\{\frac{q_n}{p_n}\}_{n=1,2,\ldots}$ （$1 \le p_1 < p_2 < \cdots$）をもつ無理数 r が存在する (ex. $a_n = n^3$)．

証明. $p_1 = a_1$，$p_n = 3a_{p_{n-1}} \cdot p_{n-1}!$ （$n = 2, 3, \ldots$）とおくと $p_n > 2p_{n-1}! \ge 2p_{n-1} \ge 2^{n-1}$ となる．$r = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots$ と定義すると $q_n = \frac{p_n}{p_1} + \frac{p_n}{p_2} + \cdots + \frac{p_n}{p_n}$ は正整数である．このとき

$$0 < r - \frac{q_n}{p_n} = \frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + \cdots < \frac{2}{p_{n+1}} < \frac{1}{a_{p_n}}.$$

<u>r が無理数であること</u>．$r = \frac{q}{p}$ と表せたとする（$p > 0$）．$p_{n-1} \ge p$ となる n を取る．$[p_n r] = [3a_{p_{n-1}} \cdot p_{n-1}! r] = 0$ であるが，一方 $[p_n r] = [\frac{p_n}{p_{n+1}} + \frac{p_n}{p_{n+2}} + \cdots]$ で，$0 < \frac{p_n}{p_{n+1}} + \frac{p_n}{p_{n+2}} \cdots < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{1}{2}$ で矛盾． □

例 4.2. $$\left|\sqrt{2}-\frac{q}{p}\right| > \frac{1}{3p^2} \quad (\forall p,\, \forall q \in \{1,2,3,\dots\}).$$

実際，もし上が成り立たない $p,\, q$ があったとすれば，明らかに $p \geq 2$ であって

$$1 \leq |2p^2-q^2| = \left|p^2\bigl(\sqrt{2}-\frac{q}{p}\bigr)\right|\cdot\left|2\sqrt{2}-\bigl(\sqrt{2}-\frac{q}{p}\bigr)\right| \leq \frac{1}{3}\bigl(2\sqrt{2}+\frac{1}{3p^2}\bigr) \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{9\cdot 4} < 1.$$

無理数の存在について.

1. 有理数は，無限小数であらわすと循環小数となるから，循環しない小数は無理数（例：$1+10^{-1^2}+10^{-2^2}+10^{-3^2}+\cdots$）.

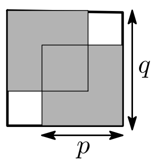
2. 命題 4.1 で構成したもの.

3. たとえば $\sqrt{2},\, e,\, \pi$ は無理数.

$\sqrt{2}$ が無理数であること.

3.1. $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$ と有理数に表せたとする．p または q は奇数であるとしてよい．$2p^2=q^2$ より q は偶数．そこで $q=2n$ とおくと，$p^2=2n^2$ であって p も偶数となるので矛盾.

3.2. 上の記号を使う．$q>p>0$ としてよい．このような q で最小のものを取る．$2p^2=q^2$ であるから，右図の一辺が p の 2 つの正方形の面積の和が，一辺 q の正方形の面積に等しい．これらの正方形の重なりを調べると，一辺 $q-p$ の 2 つの正方形の面積の和が，中央の一辺 $2p-q$ の正方形の面積の和に等しい．$2p-q<2q-q=q$ であるから，最初の q の最小性に矛盾.



e が無理数であること は，命題 4.2 の証明と同様に示される.

π が無理数であること.

問 4.1. 以下を示せ.

i) $f(x)$ を多項式とするとき，$\int f(x)\sin x\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x)\sin\bigl(x+\frac{n+1}{2}\pi\bigr)+C$.

ii) π が有理数 $\frac{q}{p}$（$p>0$）に等しいならば，$I_m=\int_0^{\pi}\frac{x^m(px-q)^m}{m!}\sin x\,dx$ は正整数となることを示し，$m\to\infty$ とすることにより，矛盾を導け.

4. 個数（濃度）の違い.

集合 A から集合 B の上への写像があるとき，A の濃度は B の濃度と等しいか，より大きいという．B の濃度も A の濃度と等しいか，より大きいとき，A と B の濃度が等しいという．A が有限集合のとき，A と濃度が等しい集合とは，その要素（元）の個数が等しい集合のこと.

命題 4.3. 有理数全体の濃度は，自然数の濃度に等しい.

証明. p を正整数として，分子が $-p^2$ から p^2 までの有理数 $\frac{q}{p}$ は $2p^2+1$ 個あり，これを小さい順に並べておく．$p=1$ のもの 3 個，$p=2$ のもの 9 個 $,\dots$ と順に並べて無限数列 $\{a_n\}_{n=1,\dots}$ を作ると，これは自然数の集合から有理数集合の上への写像になる（先頭から順に並べて，同じ数が現れたときにそれを省けば，自然数から有理数全体の上への 1:1 の写像が出来る．$\frac{n}{m}=\frac{mn^2}{m^2n}$ かつ $|mn^2|\leq(m^2n)^2$ に注意）. □

一般に，無限集合のとき，真部分集合の上に 1:1 の写像が存在することがある（例: n が奇数のとき $a_n=\frac{n-1}{2}$, n が偶数のとき $a_n=-\frac{n}{2}$ とおけば，自然数から整数の上への 1:1 の写像となる）.

命題 4.4. 実数の集合の濃度は有理数の集合の濃度より真に大きい.

証明. もし等しいなら，数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ で，すべての実数を尽くすものがある.

$a_1 = a_1^{(0)}.a_1^{(1)}a_1^{(2)}a_1^{(3)}a_1^{(4)}\cdots$
$a_2 = a_2^{(0)}.a_2^{(1)}a_2^{(2)}a_2^{(3)}a_2^{(4)}\cdots$
$a_3 = a_3^{(0)}.a_3^{(1)}a_3^{(2)}a_3^{(3)}a_3^{(4)}\cdots$

のように無限小数の形で表わす．b_n を $a_n^{(n)}$ と異なる 1 と 8 の間の自然数とする．このとき $b=0.b_1b_2b_3b_4\cdots$ という無限小数で定義される実数は，いずれの a_n とも異なる（小数点以下の n 桁目を比較せよ）ので矛盾. □

5. 連分数

連分数 $$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{\cdots}{\cdots+\cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}+\cfrac{a_n}{b_n}}}}} = \frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\cdots+\frac{a_n|}{|b_n}$$

を $\Phi_{k=1}^{n}\frac{a_k|}{|b_k}$ と表記し，**無限連分数** $\lim_{n\to\infty}\Phi_{k=1}^{n}\frac{a_k|}{|b_k}$ のことを $\Phi_{k=1}^{\infty}\frac{a_k|}{|b_k}$ と表記する

連分数の値は，a_k, b_k, a_{k+1} に 0 でない同じ数をかけても変わらない．すなわち $\{c_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ を $c_0=1$, $c_n\neq 0$ を満たす数列とするとき，変換（**同値変換**という）

(5.1) $$(a_n,b_n)\mapsto(a_nc_{n-1}c_n,\, b_nc_n)\qquad(n=1,2,\dots)$$

でその値は不変である．特に $a_n\neq 0$，$b_n\neq 0$ が満たされていれば，全ての a_n が 1 の連分数（**正則連分数**という）に同値変換で変換できる．

(5.2) $$\Phi_{n=1}^{\infty}\frac{a_n|}{|b_n}=\Phi_{n=1}^{\infty}\frac{1|}{|b_nc_n},\qquad c_n=\frac{\prod_{0\le k<\frac{n-1}{2}}a_{n-1-2k}}{\prod_{0\le k<\frac{n}{2}}a_{n-2k}}=\frac{a_{n-1}a_{n-3}\cdots}{a_na_{n-2}\cdots}.$$

一次分数変換

$$T_{a,b}(z)=\frac{a}{b+z}\qquad\left(\tfrac{w_1}{w_2}=T_{a,b}\left(\tfrac{z_1}{z_2}\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\1&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}\right)$$

を用いると

$$\Phi_{k=1}^{n}\frac{a_k|}{|b_k}=T_{a_1,b_1}\circ T_{a_2,b_2}\circ\cdots\circ T_{a_n,b_n}(0)$$

となることに注意しよう．また，$T_{1,0}\circ T_{1,b}(z)=z+b$ および $T_{a,0}\circ T_{1,0}(z)=az$ に注意すれば，無限連分数は，無限級数や無限積の拡張と考えることができる．

$c_n=\Phi_{k=1}^{n}\frac{a_k|}{|b_k}$, $A_n=\begin{pmatrix}&a_n\\1&b_n\end{pmatrix}$，$S_n=A_1A_2\dots A_n$ とおく．$S_n=\begin{pmatrix}p'_n&p_n\\q'_n&q_n\end{pmatrix}$ と表すと $S_n=S_{n-1}A_n$ であるから $p'_n=p_{n-1}$, $q'_n=q_{n-1}$, $p_n=a_np'_{n-1}+b_np_{n-1}$, $q'_n=a_nq'_{n-1}+b_nq_{n-1}$ となるので，以下が得られる．

(5.3) $$S_n=\begin{pmatrix}p_{n-1}&p_n\\q_{n-1}&q_n\end{pmatrix}=S_{n-1}\begin{pmatrix}&a_n\\1&b_n\end{pmatrix},\quad S_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{cases}p_{-1}=1,\ p_0=0,\ p_n=a_np_{n-2}+b_np_{n-1},\\ q_{-1}=0,\ q_0=1,\ q_n=a_nq_{n-2}+b_nq_{n-1}.\end{cases}$$

正則連分数 $\Phi_{k=1}^{n}\frac{1|}{|b_k}=T_{S_n}(0)$ を考えよう．

(5.4) $$c_n=\frac{p_n}{q_n},\quad c_{n+1}-c_n=\frac{p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}}{q_nq_{n+1}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}}.$$

上式の最後の等式は，以下から分かる（特に p_n と q_n は互いに素）．

$$p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}=-\det(S_{n+1})=-\det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_{n+1})=-(-1)^{n+1}$$

定理 5.1 (正項正則連分数)．$\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ を正の実数からなる数列とする．
$c_n=\Phi_{k=1}^{n}\frac{1|}{|b_k}$ とおくと

(5.5) $$c_2<c_4<c_6<\cdots<c_{2n}<\cdots<c_{2n+1}<\cdots<c_7<c_5<c_3<c_1,$$

(5.6) $$c_\infty=\lim_{n\to\infty}c_n \text{ が存在 } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty.$$

特に $b_n \geq b$（$n=1,2,\ldots$）となる正数 b が存在するとき，$c_\infty = \Phi_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lceil b_n}\rfloor$ が存在して

$$|c_\infty - c_n| \leq \frac{1}{b(1+b^2)^n}. \tag{5.7}$$

証明. $n \geq 1$ のとき $q_n > 0$ となり，$\{c_n\}$ の収束は，交代級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{q_nq_{n+1}}$ の収束と同値になる．さらに (5.3) より，$\frac{1}{q_n} < \frac{1}{q_{n-2}}$ を得るので $|c_n - c_{n-1}| < |c_{n-1} - c_{n-2}|$ となって (5.5) が成立する．

(5.5) より，$\Phi_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lceil b_n}\rfloor$ が収束することは $\lim_{n\to\infty} q_nq_{n+1} = \infty$ と同値になる．$q_1 = b_1$ であるから，$c = \min\{1, b_1\}$ とおくと，$q_n \geq c > 0$ （$\forall n \geq 0$）で

$$q_nq_{n+1} = q_{n-1}q_n + b_{n+1}q_n^2 \geq q_{n-1}q_n + b_{n+1}c^2$$

より $q_nq_{n+1} \geq (b_1 + \cdots + b_{n+1})c^2$ となるので，$\Leftarrow$ が分かる．一方

$$q_n + q_{n+1} = q_{n-1} + (1+b_{n+1})q_n \leq (1+b_{n+1})(q_{n-1}+q_n) \leq e^{b_{n+1}}(q_{n-1}+q_n)$$

より $q_n + q_{n+1} \leq e^{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n+1}}(q_{-1}+q_0) \leq e^{\sum_{k=1}^{\infty} b_k}$ となるので $4q_nq_{n+1} \leq (q_n+q_{n+1})^2 \leq e^{2\sum_{k=1}^{\infty} b_k}$ より $\Rightarrow$ も分かる．

$b_n \geq b$ のとき $q_n = b_nq_{n-1} + q_{n-2} \geq bq_{n-1} + q_{n-2} \geq (1+b^2)q_{n-2}$ であるから $q_nq_{n+1} \geq (1+b^2)^n q_0q_1 = b(1+b^2)^n$．よって $|c_\infty - c_n| \leq |c_{n+1} - c_n| = \frac{1}{q_nq_{n+1}} \leq \frac{1}{b(1+b^2)^n}$． □

実数の連分数展開．実数 r の整数部分を $[r]$ と表し，$r_0 = r$, $r_n = \frac{1}{r_{n-1} - [r_{n-1}]}$ によって帰納的に r_n を定める．

<u>r は無理数であるとする．</u>このとき $r_n > 1$（$n=1,2,\ldots$）が順に定まり

$$r = [r_0] + \Phi_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lceil [r_n]}\rfloor \tag{5.8}$$

が成立する．また，正整数 $[r_n]$ を使ったこの表記は一意的である．

実際，$r = [r_0] + \frac{1}{\lceil [r_1]}\rfloor + \cdots + \frac{1}{\lceil [r_n]}\rfloor + \frac{1}{\lceil r_{n+1}}\rfloor$ であるから，$c_n = [r_0] + \Phi_{k=1}^{n}\frac{1}{\lceil [r_k]}\rfloor$ とおくと，r は c_n と c_{n+1} の間にあることが分かるが，$\{c_n\}$ は収束するので，その値は r である．先の記号を用いれば，$a_n = 1$, $b_n = [r_n]$ で，$\tilde{p}_n = b_0q_n + p_n$ とおくと，$|c_{n+2} - c_n| < |r - \frac{\tilde{p}_n}{q_n}| < |c_{n+1} - c_n|$ および (5.4) より，$n \geq 2$ のとき

$$c_n = b_0 + \Phi_{k=1}^{n}\frac{1}{\lceil b_n}\rfloor = \frac{\tilde{p}_n}{q_n}, \quad q_n \geq \Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)^{n-1}, \tag{5.9}$$

$$\Big(1 - \frac{q_n}{q_{n+2}}\Big)\frac{q_n}{q_{n+1}}\frac{1}{q_n^2} < \Big|r - \frac{\tilde{p}_n}{q_n}\Big| < \frac{1}{q_nq_{n+1}} < \frac{1}{b_{n+1}q_n^2} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

$r = a_0 + \Phi_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lceil b_n}\rfloor$ と表されていて，a_0 は整数，b_n は正整数とする．$0 < \Phi_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lceil b_n}\rfloor < 1$ に注意すれば，$a_0 = [r]$ が分かる．$\frac{1}{r-[r]}$ についての同様な考察により，連分数の最初の項が定まって $b_1 = [r_1]$ が分かり，以下同様にして $b_n = [r_n]$ が分かる．すなわち，この表記は一意的である．

<u>r が有理数 $\frac{p}{q}$ に等しい場合</u>は $p = b_0q + s_1$（$0 \leq s_1 < q$）を満たす整数 b_0 が a_0 で，$r_1 = \frac{q}{s_1}$ である（p, q, b_0, s_0 は整数）．以下同様に，$s_0 = q$ とおいて整数 $\{s_k\}$ によって $r_k = \frac{s_{k-1}}{s_k}$ と表すと $\frac{s_{k-1}}{s_k} = b_k + \frac{s_{k+1}}{s_k}$ と書けて，$0 \leq s_{k+1} < s_k$ となるので，この操作を続けると有限回で $s_{k+1} = 0$ となって終わる．すなわち

$$\begin{cases} s_{-1} = p, \quad s_0 = q, \\ s_{k-1} = b_ks_k + s_{k+1} \qquad (0 < s_{k+1} < s_k,\ k = 0,1,\ldots,n-1), \\ s_{n-1} = b_ns_n + 0, \end{cases} \tag{5.10}$$

$$\frac{s_{k-1}}{s_k} = b_k + \frac{1}{\lceil b_{k+1}}\rfloor + \cdots + \frac{1}{\lceil b_n}\rfloor = b_k + \frac{s_{k+1}}{s_k}.$$

s_k と s_{k+1} の最大公約数は，s_{k-1} と s_k の最大公約数に等しいので，s_n は p と q との最大公約数となり，それを求める上記のアルゴリズムは **Euclid の互除法**と呼ばれる．

行列の形で表示しておくと

$$\begin{pmatrix} s_k \\ s_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{k+1} \\ s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b_{k+1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_n \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

$b_n \geq 2$ に注意すると，r が無理数の場合の一意性と同様にして，$\frac{p}{q}$ をこのような連分数として表わす表し方（$b_1, b_2, \ldots$ は正整数）は，以下の 2 通りに限ることが分かる．

$$\frac{p}{q} = b_0 + \frac{1}{\lceil b_1} + \cdots + \frac{1}{\lceil b_n} = b_0 + \frac{1}{\lceil b_1} + \cdots + \frac{1}{\lceil b_n - 1} + \frac{1}{\lceil 1}. \tag{5.12}$$

特に $\frac{p}{q}$ が既約分数ならば，$s_n = 1$ であるから (5.3) と比較して（$a_k = 1$ に注意）

$$q = s_0 = q_n, \quad p = b_0 s_0 + s_1 = b_0 q_n + p_n. \tag{5.13}$$

定理 5.2. i) 実数 r の連分数展開による近似有理数列 $\{c_n = b_0 + \frac{p_n}{q_n}\}_{n=1,2,\ldots}$ において，c_n を既約分数 $\frac{p}{q}$ と表すと，$|r - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

ii) 任意の隣り合った c_n と c_{n+1} の少なくともいずれか一方の分数 $\frac{p}{q}$ は，次を満たす．

$$\left| r - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2} \tag{5.14}$$

逆にこれを満たす r の近似分数 $\frac{p}{q}$ は，c_n のいずれかに等しい．

証明. r はその連分数展開から作った c_n と c_{n+1} の間にあるが，(5.4) より

$$\frac{1}{2q_{n+1}^2} + \frac{1}{2q_n^2} - |c_{n+1} - c_n| = \frac{1}{2q_{n+1}^2} + \frac{1}{2q_n^2} - \frac{1}{q_{n+1}q_n} = \frac{(q_{n+1} - q_n)^2}{2q_{n+1}^2 q_n^2} \geq 0$$

であるから，c_n または c_{n+1} は (5.14) を満たす．

既約分数 $\frac{p}{q}$ の連分数展開 (5.12) に対し，$r_1 := b_0 + \frac{1}{\lceil b_1} + \cdots + \frac{1}{\lceil b_n} + \frac{1}{\lceil 1}$ と $\frac{p}{q}$ の間の実数の連分数展開から定義される c_n，および $r_2 := b_0 + \frac{1}{\lceil b_1} + \cdots + \frac{1}{\lceil b_n - \frac{1}{2}}$ と $\frac{p}{q}$ 間の実数の連分数展開から定義される c_{n+1} は $\frac{p}{q}$ と一致する（$\frac{1}{\lceil b_n - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\lceil b_n - 1} + \frac{1}{\lceil 2}$ に注意）．$q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$，$q'_n = q_{n-2} + (b_n - \frac{1}{2})q_{n-1} = q_n - \frac{1}{2}q_{n-1}$，$q'_{n+1} = q_{n-1} + 2q'_n$ とおき，$\{q_n\}$ が単調増加なことに注意すると，$|r_1 - \frac{p}{q}| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{1}{q(q+q_{n-1})} > \frac{1}{2q^2}$ および $|r_2 - \frac{p}{q}| = \frac{1}{q'_n q'_{n+1}} = \frac{1}{(q_n - \frac{1}{2}q_{n-1})(2q_n)} > \frac{1}{2q^2}$ となり，$\frac{p}{q}$ は r_1 と r_2 の間にあるので (5.14) より r も同様である．よって (5.14) を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ は，r の連分数による表示を途中で切って作った有理数になる． □

円周率を連分数で表すと

$$\begin{aligned} \pi &= 3.14159265358979323846264338327950 \cdots \\ &= 3 + \frac{1}{\lceil 7} + \frac{1}{\lceil 15} + \frac{1}{\lceil 1} + \frac{1}{\lceil 292} + \frac{1}{\lceil 1} + \frac{1}{\lceil 1} + \frac{1}{\lceil 1} + \frac{1}{\lceil 2} + \frac{1}{\lceil 1} + \frac{1}{\lceil 3} + \frac{1}{\lceil 1} + \frac{1}{\lceil 14} + \cdots \end{aligned}$$

のようになるが，無限連分数を途中で切った有理数による近似列は

$$\begin{aligned} c_1 &= \tfrac{22}{7} = 3.1428571428571 \cdots, \\ c_2 &= \tfrac{333}{106} = 3.1415094339622 \cdots, \\ c_3 &= \tfrac{355}{113} = 3.1415929203539 \cdots, \\ c_4 &= \tfrac{103993}{33102} = 3.1415926530119 \cdots, \\ c_{11} &= \tfrac{5419351}{1725033} = 3.1415926535898153 \cdots \end{aligned}$$

となり，15, 292 は大きな数となることから，$\frac{22}{7}$ や $\frac{355}{113}$ は，分母の大きさに比較してよい近似分数となる．

6. 2 次無理数と Pell 方程式

正整数 m と有理数 α, β によって $\alpha+\beta\sqrt{m}$ と表せる実数 r を 2 次の無理数という．2 次の無理数は整数 a, b, c を係数とする 2 次方程式によって

$$(6.1)\qquad ax^2+bx+c=0,\quad r=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad D=b^2-4ac>0$$

と表せる．$r'=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ を r と**共役**な 2 次の無理数という．$\{a,b,c\}$ の最大公約数を 1 にとったときの D を r の**判別式**という．$\tilde{r}=\frac{pr+p'}{qr+q'}$（$pq'-p'q=\pm1$, $p,q,p',q'\in\mathbb{Z}$）となる $\tilde{r}$ を r と**対等**な 2 次の無理数という．

補題 6.1. 対等な 2 次無理数の判別式は等しい．

証明．$r=\frac{m\tilde{r}+m'}{n\tilde{r}+n'}$ とおくと $mn'-m'n=\pm1$ であって $(am^2+bmn+cn^2)\tilde{r}^2+(2amm'+b(mn'+m'n)+2cnn')\tilde{r}+(am'^2+bm'n'+cn'^2)=0$ の判別式は b^2-4ac. よって $\tilde{r}$ の判別式は r の判別式の約数で，逆も成り立ち，両者は等しい． □

補題 6.2. 同一の判別式 D をもつ 2 次無理数 r で，$r>1$，$0>r'>-1$ となるもの（**簡約された 2 次無理数**という）は有限個.

証明．(6.1) において $r>r'$ より $a>0$. また $r+r'>0$, $rr'<0$ より $b<0$, $c<0$. $D=b^2-4ac=|b|^2+4|a||c|$ より明らか． □

補題 6.3. 2 次の無理数の連分数展開 $r=[r]+\frac{1|}{|[r_1]}+\cdots+\frac{1|}{|[r_n]}+\frac{1|}{|r_{n+1}}$ において n を十分大きく取れば r_{n+1} は r と対等で同一の判別式をもち，簡約された 2 次無理数.

証明．$r=[r]+\frac{p_nr_{n+1}+p_{n-1}}{q_nr_{n+1}+q_{n-1}}$，$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$ であるから，r と r_{n+1} は対等であって，$r_{n+1}>1$. よって $r_{n+1}=\frac{q_{n-1}(r-[r])-p_{n-1}}{-q_n(r-[r])+p_n}=-\frac{q_{n-1}}{q_n}\frac{r-[r]-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{r-[r]-\frac{p_n}{q_n}}$ であって，$n\to\infty$ のとき $\frac{p_n}{q_n}\to r-[r]$ であるから，$r'_{n+1}=-\frac{q_{n-1}}{q_n}\frac{r'-[r]-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{r'-[r]-\frac{p_n}{q_n}}$ は n が十分大きければ負になる．$r'_n=[r_n]+\frac{1}{r'_{n+1}}$ より $r'_{n+1}=\frac{1}{r'_n-[r_n]}$ で，$[r_n]\geq1$ であるから n が十分大きければ，$0>r'_{n+1}>-1$. □

定理 6.4 (Legendre)**.** 2 次の無理数は，無限循環連分数で表される．逆も正しい．

証明．2 次無理数を $r=[r]+\frac{1|}{|[r_1]}+\cdots+\frac{1|}{|[r_{n-1}]}+\frac{1|}{|r_n}$ と表すと，上の補題から $r_n=r_{n+m}$ となる正整数 n と m が存在する．すなわち $\frac{1}{r_n}=\frac{1|}{|[r_n]}+\cdots+\frac{1|}{|[r_{n+m-1}]}+\frac{1|}{|r_n}=\Phi_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1|}{|[r_n]}+\cdots+\frac{1|}{|[r_{n+m-1}]}\Big)$ となって $r=[r]+\frac{1|}{|[r_1]}+\cdots+\frac{1|}{|[r_{n-1}]}+\Phi_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1|}{|[r_n]}+\cdots+\frac{1|}{|[r_{n+m-1}]}\Big)$．一方 $\frac{1}{r}=\frac{1|}{|b_1}+\cdots+\frac{1|}{|b_k}+\frac{1|}{|r}$ となる r に対し $r=\frac{mr+m'}{nr+n'}$ を満たす整数 m,m',n,n' が存在するので，r は 2 次の無理数．これの有限連分数も同様． □

定理 6.5. 2 次の無理数 r が (6.1) で与えられているとする．

$$(6.2)\qquad r=\frac{mr+m'}{nr+n'},\quad mn'-m'n=\pm1\quad(m,m',n,n'\in\mathbb{Z})$$

に対し

$$(6.3)\qquad \begin{pmatrix} m & m' \\ n & n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{t-bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t+bu}{2} \end{pmatrix}$$

とおくと (t,u) は次の **Pell 方程式**の整数解であり，逆も成立する．

$$(6.4)\qquad t^2-Du^2=\pm4.$$

証明．$nr^2+(n'-m)r-m'=0$ に注意．$u=\frac{n}{a}=\frac{n'-m}{b}=\frac{-m'}{c}\in\mathbb{Z}$ で $t=m+n'$ とおくと $m=\frac{t-bu}{2}$, $m'=-cu$，$r=au$，$s=\frac{t+bu}{2}$．よって $mn'-m'n=\frac{t^2-b^2u^2}{4}+acu^2=\pm1$．これは逆もたどれる（$D$ が偶なら，b, t が偶，D が奇なら b が奇で $t-u$ が偶となることから，m,m',n,n' が整数となることに注意）． □

2 次の無理数 $r=\sqrt{D}$ の連分数展開で，$r_n=r_{n'}$ を満たす $1\le n<n'$ が存在する．このとき r_n の連分数展開から $r_n=\frac{pr_{n'}+p'}{qr_{n'}+q'}$（$pq'-p'q=(-1)^{n'-n}$, p, p', q, $q'\in\mathbb{Z}$）と表せて，$q\ne 0$ であることから

系 6.6. D が正整数で $\sqrt{D}$ が整数でないならば，Pell 方程式 (6.4) は正整数 (p,q) の解をもつ．

定理 6.7. m は正整数で，$\sqrt{m}$ は整数でないとする．任意の正整数 p, q に対し

$$\left|\frac{p}{q}-\sqrt{m}\right|>\frac{1}{2\sqrt{m}q^2+\frac{1}{2\sqrt{m}-1}} \tag{6.5}$$

である．一方

$$\left|\frac{p}{q}-\sqrt{m}\right|<\frac{1}{2\sqrt{m}q^2-\frac{1}{2\sqrt{m}-1}} \tag{6.6}$$

を満たす正整数 p, q は無限個あって，それは p, q が Pell 方程式

$$p^2-mq^2=\pm1 \tag{6.7}$$

を満たすことと同値である．この Pell 方程式の解に対応する $\frac{p}{q}$ は，$\sqrt{m}$ の連分数近似に全て現れる．さらに $\sqrt{m}$ の連分数展開

$$\sqrt{m}=b_0+\mathop{\Phi}_{k=1}^{\infty}\frac{1\rfloor}{\lfloor b_k},\quad r_0=\sqrt{m},\ r_{n+1}=\frac{1}{r_n-b_n},\ b_n=[r_n]. \tag{6.8}$$

で $\sqrt{m}-r_n$ が整数となる $n\ge1$ が存在する．その n のうちの最小の n に対して $\frac{p}{q}=b_0+\frac{1\rfloor}{\lfloor b_1}+\cdots+\frac{1\rfloor}{\lfloor b_{n-1}}$ とおき

$$(p+q\sqrt{m})^k=P_k+Q_k\sqrt{m}\quad(k=1,2,\ldots) \tag{6.9}$$

によって正整数 P_k, Q_k を定義すると

$$P_k^2-mQ_k^2=(-1)^{nk} \tag{6.10}$$

が成立し，Pell 方程式の全ての正整数解はこのようにして得られる．

証明. $u=p^2-mq^2=(p-q\sqrt{m})(p+q\sqrt{m})$ とおくと，u は 0 でない整数．

$$\frac{p}{q}-\sqrt{m}=\frac{u}{2\sqrt{m}q^2+(\frac{p}{q}-\sqrt{m})q^2}=\frac{u}{2\sqrt{m}q^2+\frac{u}{\frac{p}{q}+\sqrt{m}}} \tag{6.11}$$

となる．(6.5) は $|\frac{p}{q}-\sqrt{m}|<1$ と仮定して示せばよいが，$|u|\ge2$ のときと $|u|=1$ のときに分けて考えれば，共に明らか．Pell 方程式の解は $u=\pm1$ に対応し，$|\frac{p}{q}-\sqrt{m}|<1$ となるが，これは (6.11) より (6.6) が成り立つことと同値．

Pell 方程式の正整数解に対応する $\epsilon=p+q\sqrt{m}$ で最小のものを ϵ_0 とおく（$\epsilon^2>p^2+q^2$ より，そのようなものの存在が分かる）．一般に Pell 方程式の整数解に対し $\epsilon=p+q\sqrt{m}$ とおくと $\epsilon\epsilon'=1$ であるから，$\epsilon^k(\epsilon^k)'=1$ が成り立ち，(6.9) で与えられる $p_{(k)}$, $q_{(k)}$ も解になる．また $\epsilon>1$ なら $p\ge1$, $q\ge1$ も分かる．$\epsilon_0^n\le\epsilon<\epsilon_0^{n+1}$ となる正整数 n をとる．$\tilde\epsilon=\epsilon(\epsilon_0)^{-n}=\epsilon(\epsilon_0')^n=\tilde p+\tilde q\sqrt{m}$ とおくと，$\tilde\epsilon\tilde\epsilon'=1$ となるので，$\tilde p$, $\tilde q$ は Pell 方程式の解で，$1\le\tilde\epsilon<\epsilon_0$ を満たす．よって $\tilde\epsilon=1$ でなければならない．すなわち Pell 方程式の全ての正整数解は $\epsilon_0^k=P_k+Q_k\sqrt{m}$（$k=1,2,\ldots$）によって得られる．

Pell 方程式の解は (6.6) を満たすので，定理 5.2 ii) より $\sqrt{m}$ の連分数近似から得られる．それが $c_{k-1}=\frac{p}{q}$ であったならば，$(-1)^k(c_{k-1}-\sqrt{m})>0$ であるから

$$\sqrt{m}=\frac{p\sqrt{m}+mq}{q\sqrt{m}+p}\qquad(p\cdot p-mq\cdot q=(-1)^k)$$

となり，$p=q_{k-1}+b_0q_{k-1}$, $q=q_{k-1}$ である．書き直せば

$$\sqrt{m}-b_0=\frac{ar_1+p_{k-1}}{br_1+q_{k-1}}\qquad(bp_{k-1}-aq_{k-1}=(-1)^k)$$

となる整数 a, b がある．一方

$$\sqrt{m} - b_0 = \frac{p_k r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k r_{k+1} + q_{k-1}} \qquad (p_{k-1}q_k - p_k q_{k-1} = (-1)^k)$$

であるから，$(p_k - a)q_{k-1} = (q_k - b)p_{k-1}$ となり，p_{k-1} と q_{k-1} は互いに素であるから，$p_k - a = sp_{k-1}$, $q_k - b = sq_{k-1}$ となる整数 s が存在する．よって

$$\big((a + sp_{k-1})r_{k+1} + p_{k-1}\big)(br_1 + q_{k-1}) = \big((b + sq_{k-1})r_{k+1} + q_{k-1}\big)(ar_1 + p_{k-1})$$

より $r_{k+1} - r_1 = sr_1r_{k+1}$，すなわち $s = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{k+1}}$ となるが，$r_1 > 1$, $r_{k+1} > 1$, $s \in \mathbb{Z}$ より，$s = 0$, $r_1 = r_{k+1}$． □

例 6.8. i) $\underline{m = 2}$. $b_0 = 1$, $r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$ より $n = 1$ で $c_0 = \frac{1}{1}$．よって

$$\epsilon_0 = 1 + \sqrt{2}, \quad 1^2 - 2 \cdot 1 = (-1)^n = -1.$$

$p^2 - 2q^2 = 1$ の正整数解は

$$\begin{cases} p_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{(2k)!2^j}{(2j)!(2k-j)!} = 3p_{k-1} + 4q_{k-1}, \\ q_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2k)!2^j}{(2j+1)!(2k-2j-1)!} = 2p_{k-1} + 3q_{k-1} \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\begin{aligned}(p_k, q_k) = (3, 2), (17, 12), (99, 70), (577, 408), (3363, 2378), (19601, 13860),\\ (114243, 80782), (665857, 470832), (3880899, 2744210), \ldots\end{aligned}$$

$p^2 - 2q^2 = -1$ の正整数解は，$(1, 1)$ から始まって，同じ漸化式が成り立ち

$$(1, 1), (7, 5), (41, 29), (239, 169), (1393, 985), (8119, 5741), (47321, 33461), \ldots$$

ii) $\underline{m = 3}$．$b_0 = 1$, $r_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $b_1 = 1$，$r_2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$ より，$n = 2$, $c_1 = \frac{2}{1}$ となって

$$\epsilon_0 = 2 + \sqrt{3}, \quad 2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1 \tag{6.12}$$

が最小解．一方 $p^2 - 3q^2 = -1$ は整数解を持たない．特に $\sqrt{3} = 1 + \Phi_{k=1}^{\infty}\big(\frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2}\big)$.

iii) $\underline{m = 7}$.

$$\begin{aligned} b_0 &= [\sqrt{7}] = 2, & r_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{7}-2} = \tfrac{\sqrt{7}+2}{3}, \\ b_1 &= [r_1] = 1, & r_2 &= \tfrac{3}{\sqrt{7}-1} = \tfrac{\sqrt{7}+1}{2}, \\ b_2 &= [r_2] = 1, & r_3 &= \tfrac{2}{\sqrt{7}-1} = \tfrac{\sqrt{7}+1}{3}, \\ b_3 &= [r_3] = 1, & r_4 &= \tfrac{3}{\sqrt{7}-2} = \sqrt{7} + 2 \end{aligned}$$

より $n = 4$ で，$2 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} = 2 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$ より Pell 方程式の最小解は

$$\epsilon_0 = 8 + 3\sqrt{7}, \quad 8^2 - 3^2 \cdot 7 = 1.$$

特に $\sqrt{7} = 2 + \Phi_{k=1}^{\infty}\big(\frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|4}\big)$.

問 6.1. 判別式 28 をもつ全ての簡約された 2 次無理数とその連分数展開を求めよ．

問 6.2. $m = 5$, $m = 6$, $m = 11$, $m = 13$ のときに例 6.8 と同様の考察を行え．

問 6.3 (Fermat が Wallis に出した問題)**.** 以下の正整数解 (p, q) を求めよ．

i) $p^2 - 61q^2 = 1$ ii) $p^2 - 109q^2 = 1$

7. 三角形による平面の敷き詰め

平面上の一つの三角形を，各辺に関して次々折り返していって，平面を敷き詰めることを考えてみよう．三角形の内角を α, β, γ とおく（$\alpha \ge \beta \ge \gamma$）．内角 α の周りで折り返していって元に戻ってくるためには，$\alpha = \frac{2\pi}{p}$（p は 3 以上の整数）という形をしていなければならない．また p が奇数ならば，それを挟む両辺の長さは等しくなければならない．すなわち p が奇数ならば $q = r$．同様に $\beta = \frac{2\pi}{q}$，$\gamma = \frac{2\pi}{r}$ とおくと

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{p} \ge \frac{1}{q} \ge \frac{1}{r}. \tag{7.1}$$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{3}{p}$ より，$p \le 6$.

$\underline{p = 6}$．$q = r = 6$ で，三角形は正三角形.

$\underline{p = 5}$．$q = r$ であるから $\frac{2}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ で不適.

$\underline{p = 4}$．$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \ge \frac{2}{q}$ より $4 \le q \le 8$ より $(q, r) = (4, \infty), (5, 20), (6, 12), (7, \frac{28}{3}), (8, 8)$ で条件に合うのは，$(q, r) = (6, 12), (8, 8)$ のみ.

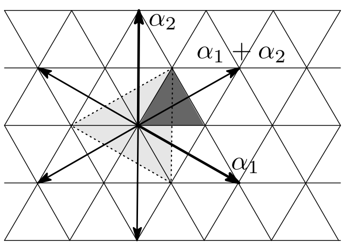
$\underline{p = 3}$．$\frac{2}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ より $q = r = 12$.

以上より，内角は $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$，$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$，$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$，$(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ の 4 通りがあり，実際にこの場合には折り返しによる敷き詰めが可能である.

敷き詰めた図形は，いくつかの線で区切られ，その線に関して対称になっているが，最も直線の集まった点（全ての方向の直線が交わった点）を頂点とすると，それらの直線は $\mathbb{R}^2$ の有限個のベクトル $\alpha \in F$ によって，次のように表せる.

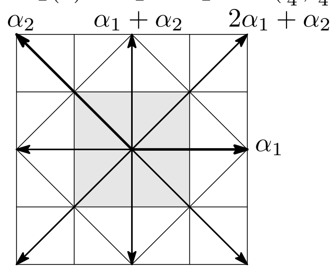
$$L_{\alpha,k} := \left\{x \in \mathbb{R}^2;\, 2\frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = k\right\} \qquad (k \in \mathbb{Z},\ \alpha \in F). \tag{7.2}$$

$I_2(3)$: A_2 型 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$



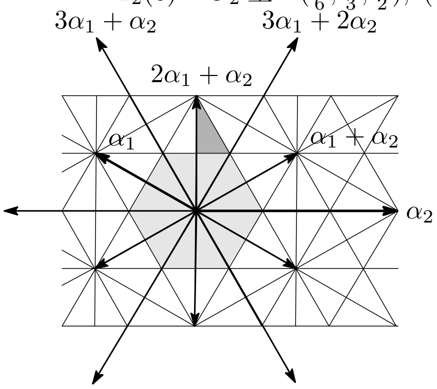
$F = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}$,
$|\alpha_1| = |\alpha_2|$, $\theta_{12} = \frac{2}{3}\pi$, $(s_1 s_2)^3 = 1$.

$I_2(4)$: $B_2 = C_2$ 型 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$



$F = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(2\alpha_1 + \alpha_2)\}$,
$\sqrt{2}|\alpha_1| = |\alpha_2|$, $\theta_{12} = \frac{3}{4}\pi$, $(s_1 s_2)^4 = 1$.

$I_2(6)$: G_2 型 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$，$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$



$F = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2),$
$\pm(2\alpha_1 + \alpha_2), \pm(3\alpha_1 + \alpha_2),$
$\pm(3\alpha_1 + 2\alpha_2)\}$,
$\sqrt{3}|\alpha_1| = \alpha_2$, $\theta_{12} = \frac{5}{6}\pi$, $(s_1 s_2)^6 = 1$.

$I_2(m)$:
2 面体群（正 m 角形の合同変換群）
$\theta_{12} = \frac{m-1}{m}\pi$, $s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^m = 1$.

θ_{12}: α_1 と α_2 のなす角.
s_j: 原点を通り α_j に垂直な直線に関する対称（鏡映）変換.

1．原点を通る直線に関する対称性.

$L_{\alpha_1,0}$ と $L_{\alpha_2,0}$ に対する対称性（s_1 と s_2 に関する不変性）から，角度 $\frac{2\pi}{m}$ の回転不変性，角度 $\frac{2k\pi}{m}$ の回転不変性，$L_{\alpha,0}$ に対する対称性が従う．

s_1 と s_2 から生成される変換（線形変換）は

$$W := \{s_1,\, s_1s_2,\, s_1s_2s_1, \ldots, \underbrace{s_1s_2\cdots s_1s_2}_{2\cdot m} = 1\} \tag{7.3}$$

で $\#W = 2m$．これは $\frac{2k\pi}{m}$ 回転（$k = 0, 1, \ldots, m-1$）と，$L_{\alpha,0}$ （$\alpha \in F$）に対する鏡映変換（s_α）．偶数個の積は回転で，奇数個の積は鏡映変換（行列式を考えよ）．特に $\#F = \#W$．また $F = \{w\alpha_1,\, w\alpha_2;\, w \in W\}$.

W は，正 m 角形の合同変換群（頂点または辺の中点—これらは $2m$ 個—と中心とを通る直線に関する対称性と，角度 $\frac{2k}{m}\pi$ 回転）と見なせる．

原点に頂点をもつ任意の 2 つの三角形は，W の元によって移り合うが，その元は 2 つの三角形によって一意に定まる．よって原点の周りに三角形は $\#W$ 個ある．

2．原点を通るとは限らない $L_{\alpha,k}$ での対称性.

$L_{\alpha,0}$ による鏡映変換と $L_{\alpha,1}$ による鏡映変換の合成は，α だけの平行移動になる．よって $\alpha \in F$ に対し，α の周りも原点の周りと同じ形をしている．これを合成すれば，一般に $m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2$（$m_1,\, m_2 \in \mathbb{Z}$）による**平行移動**で不変.

α は鏡映変換を与える直線の交点であるから

$$2\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Z} \qquad (\forall \alpha, \beta \in F) \tag{7.4}$$

でなければならない.

$s_\beta(x) = x - 2\frac{(x,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta$ であるから，s_β は格子点の集合 $\{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2;\, m_1,\, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ を不変にしている．

原点に頂点をもつ三角形（G_2 では小さい方の三角形）を $\#W$ 個集めた図形を各格子点が中心となるように平行移動したもので，平面が丁度埋め尽くされる．

8. 鏡映変換

平面上の点や空間上の点は，座標を用いて (x_1, x_2)，(x_1, x_2, x_3) のように表せる．より一般に n 次元ユークリッド空間上の点は，$(x_1, \ldots, x_n)$ （$x_j \in \mathbb{R}$）と表せ，2 点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ と $y = (y_1, \ldots, y_n)$ の距離は，以下のように与えられる．

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}. \tag{8.1}$$

x と y の内積を

$$(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \tag{8.2}$$

と定義し，原点を $O = (0, \ldots, 0)$ とおき，$\angle xOy$ を θ とすると

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cos\theta, \quad (x, x) = |x|^2. \tag{8.3}$$

$\mathbb{R}^n$ の異なる 2 点 a, b から等距離にある点の集合は，a と b を結ぶ線分を垂直 2 等分する超平面である:

$$|x - a|^2 = |x - b|^2 \Leftrightarrow (x - a, x - a) = (x - b, x - b) \Leftrightarrow (x - \tfrac{a+b}{2}, b - a) = 0. \tag{8.4}$$

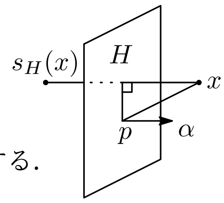
一般に超平面 H は，それに属する点 p と，その超平面と直交するベクトル α によって

$$H_{\alpha,p} := \{x \in \mathbb{R}^n;\, (x - p, \alpha) = 0\} \tag{8.5}$$

と表せる（超平面は，$n = 2$ のとき直線，$n = 3$ のとき平面となる）．

定義 8.1. 超平面 H に対し，H 上にない点 x に対し，H が x と y の中点で交わって x と y を結ぶ線分に直交するとき，点 y は H に対して**鏡映**の位置にあるといって，

$y=s_H(x)$ と表す．$x\in H$ のときは，$s_H(x)=x$ と定める．$s_H:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ という写像を**鏡映変換**という．$H=H_{\alpha,p}$ と表すと



$$s_{H_{\alpha,p}}(x)=x-2\frac{(x-p,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha. \tag{8.6}$$

命題 8.2 (2 つの鏡映の合成)**.** $H_{\alpha,p}$ と $H_{\beta,q}$ を $\mathbb{R}^n$ の超平面とする．
i) $H_{\alpha,p}=H_{\alpha',p'}$ のときは，すなわち一般に

$$s_H^2=\mathrm{id}$$

ii) $H_{\alpha,p}$ と $H_{\beta,q}$ が平行なときは，$\alpha=\beta$，$p+\alpha\in H_{\beta,q}$ と仮定してよいが，このとき

$$s_{H_{\alpha,p+\alpha}}\circ s_{H_{\alpha,p}}(x)=x+2\alpha. \tag{8.7}$$

すなわち合成は，2α の**平行移動**.
iii) $H_{\alpha,p}$ と $H_{\beta,q}$ が異なっていて，平行ではないとき．共通点をもつので，$p=q$ としてよい．p を原点に平行移動すると，$V_{\alpha,\beta}=H_{\alpha,0}\cap H_{\beta,0}$ は $(n-1)$-次元部分空間で

$$V_{\alpha,\beta}:=\{x\in\mathbb{R}^n;\,(x,\alpha)=(x,\beta)=0\},\quad H_{\alpha,p}\cap H_{\beta,p}=\{p+v;\,v\in V_{\alpha,\beta}\}.$$

α, β で張られる空間の正規直交基底 e_1，e_2 を固定し（たとえば $e_1=\frac{\alpha}{|\alpha|}$，$\beta'=\beta-(\beta,e_1)e_1$, $e_2=\frac{\beta'}{|\beta'|}$），$\alpha=|\alpha|(\cos\theta_\alpha e_1+\sin\theta_\alpha e_2)$, $\beta=|\beta|(\cos\theta_\beta e_1+\sin\theta_\beta e_2)$ と表示する．$\mathbb{R}^n$ の点 x を，$x=p+v+r(\cos\theta e_1+\sin\theta e_2)$（$v\in V$）と表わしたとき，

$$\begin{aligned}(8.8)\quad & s_{H_{\beta,p}}\circ s_{H_{\alpha,p}}\big(p+v+r(\cos\theta e_1+\sin\theta e_2)\big)\\ &=p+v+r(\cos\big(\theta+2(\theta_\beta-\theta_\alpha)\big)+\sin\big(\theta+2(\theta_\beta-\theta_\alpha)\big)e_2).\end{aligned}$$

これは，$H_{\alpha,p}\cap H_{\beta,p}$ の周りの角度 $2(\theta_\beta-\theta_\alpha)$ の**回転**となる．

$n=2$ のときは，$H_{\alpha,p}\cap H_{\beta,p}$ は一点となるので，それを**回転の中心**，$n=3$ のときは，$H_{\alpha,p}\cap H_{\beta,p}$ は直線となるので，それを**回転軸**という．

注意 8.3. 最も広い意味での**原点を中心とする回転**とは，単位球面 $S^{n-1}:=\{x;\,|x|=1\}$ を単位球面に移す線形変換のことをいう．その全体を $O(n)$ とかく（直交群）．原点を中心とする回転とは，その線形変換のうちで，行列式が 1 となるものをいう．その全体を $SO(n)$ とかく（特殊線形群）．

問 8.1. $\mathbb{R}^n$ の 2 点間の距離を変えない変換は，広い意味での原点を中心とする回転と平行移動との合成で表せることを示せ（$n=2$, $n=3$，一般の場合）．

問 8.2. $\mathbb{R}^n$ の 2 点間の距離を変えない変換は，鏡映変換の合成で表せることを示せ（$n=2$, $n=3$，一般の場合）．鏡映変換をいくつ合成すれば，任意の 2 点間の距離を変えない変換が表せるか？（$n=2$, $n=3$，一般の場合）．

問題．有限個の鏡映 $\{s_{H_j};\,j=1,\dots,m\}$ の合成で表せる写像の全体 $\langle s_{H_j};\,j=1,\dots,m\rangle$ が有限集合となる場合を全て求めて分類せよ．

以下，原点を通る超平面に関する鏡映変換を考察する．$p=0$ のときは $H_{\alpha,p}$ を単に H_α と書き，$s_{H_{\alpha,0}}$ を単に s_α と書く．

命題 8.4. $\mathcal{T}$ が 2 点間の距離を変えない線形変換のとき，

$$\mathcal{T}\circ s_\alpha\circ\mathcal{T}^{-1}=s_{\mathcal{T}(\alpha)} \tag{8.9}$$

証明．$x\in\mathbb{R}^n$ に対し

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\circ s_\alpha\circ\mathcal{T}^{-1}(x)&=\mathcal{T}\big(\mathcal{T}^{-1}(x)-2\frac{(\mathcal{T}^{-1}(x),\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\big)\\ &=x-2\frac{\big(x,\mathcal{T}(\alpha)\big)}{\big(\mathcal{T}(\alpha),\mathcal{T}(\alpha)\big)}\mathcal{T}(\alpha).\end{aligned}$$

□

注意 8.5. ベクトル $u,\, v$ の内積は

$$2(u,v) = (u+v, u+v) - (u,u) - (v,v)$$

を満たす．よって T がベクトルの長さを変えない線形変換ならば，T はベクトルの内積も変えない．

定義 8.6. $\mathbb{R}^n$ を張る $\mathbb{R}^n$ の 0 でないベクトル $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ （一次独立性は仮定しない）に対し，鏡映の任意個の合成全体の集合 $R := \langle s_{\alpha_j};\, j = 1, \ldots, m\rangle$ の元の数が有限となる場合，R を階数（rank）n の**有限鏡映群**といい，s_{α_j}（$j = 1, \ldots, m$）を生成元という．

命題 8.7. R を有限鏡映群とする．

$$F_R = \{\alpha \in \mathbb{R}^n;\, |\alpha| = 1,\, s_\alpha \in R\} \tag{8.10}$$

とおくと，$F = F_R$ に対し

$$s_\alpha(F) = F \quad (\forall \alpha \in F). \tag{8.11}$$

逆に，長さ 1 のベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の有限集合 F で $\mathbb{R}^n$ を張るものがあって，(8.11) を満たしているなら，$\langle s_\alpha;\, \alpha \in F\rangle$ は有限鏡映群となる．

証明. R が有限集合であるから，F_R も有限集合である．また命題 8.4 より $s_\alpha \circ s_\beta \circ s_\alpha = s_{s_\alpha(\beta)}$ であるから，$s_\alpha(F) = F$.

$\forall w \in \langle s_\alpha;\, \alpha \in F\rangle$ は $w(F) = F$ を満たす．また $w' \in \langle s_\alpha;\, \alpha \in F\rangle$ が，$w(\alpha) = w'(\alpha)$（$\forall \alpha \in F$）を満たすならば，$w = w'$ である（$\because\, w,\, w'$ は線形変換なので，$\mathbb{R}^n$ における基底の作用が同じならば一致する）．よって $\langle s_\alpha;\, \alpha \in F\rangle$ の元の数は，高々 $(\#F)!$ 個. $\square$

3 次元の有限鏡映群の分類問題は以下の問題と同値である．

問 8.3. 球面 S^2 上に有限個の点 F を取る．F の点 p に対し，p を北極とみなしたときに，経度は変えずに緯度のみを反転（北緯 $\leftrightarrow$ 南緯）する変換 T_p を考える．$T_p(F) = F$ が全ての $p \in F$ に対して成り立つような F を分類せよ）．

<u>2 次元</u>. $\beta = (1,0),\, \alpha = (\cos\theta, \sin\theta)$ ととると，$S_\beta \circ S_\alpha$ は原点中心の角度 2θ の回転となる．これを m 回合成すると角度 $2m\theta$ の回転である．よって $\langle s_\alpha,\, s_\beta\rangle$ が有限集合となるための必要十分条件は，$\theta = \frac{p}{q}\pi$ となる整数 $p,\, q$（$q \geq 1$）が存在することである．このことから，2 次元の有限鏡映群は，2 面体群 $I_2(m)$（$m = 2, 3, \ldots$）のいずれかになることが分かる．

問 8.4. 上を（直接）示せ．

$I_2(m)$ を生成する $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ は

$$2(\alpha, \beta) = -\cos\tfrac{\pi}{m} \cdot |\alpha| \cdot |\beta| \tag{8.12}$$

となるように選べばよい．

この生成元を $\circ$ で表して，その関係を $\underset{\alpha}{\circ}\overset{m}{\text{—}}\underset{\beta}{\circ}$ と表示する．なお，$m = 2$ のときは，通常は線を書かずに $\underset{\alpha}{\circ}\quad\underset{\beta}{\circ}$ と表し，$m = 3$ のときは単に $\underset{\alpha}{\circ}\text{—}\underset{\beta}{\circ}$，$m = 4$ および $m = 6$ のときはそれぞれ $\underset{\alpha}{\circ}\!=\!\underset{\beta}{\circ}$，$\underset{\alpha}{\circ}\!\equiv\!\underset{\beta}{\circ}$ のように表すことが多い．

定義 8.8. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の有限集合 Σ が有限鏡映群を生成し，(7.4) を満たすとき，Σ を階数（rank）n の**ルート系** (root system)，Σ の元を**ルート**，$W = \langle s_\alpha;\, \alpha \in \Sigma\rangle$ を **Weyl 群**という．さらに

$$k\alpha \in \Sigma,\ k \in \mathbb{R},\ \alpha \in \Sigma \ \Rightarrow\ k = \pm 1 \tag{8.13}$$

が成り立つとき，Σ を**被約ルート系** (reduced root system) という．

定義 8.9. 有限鏡映群 R に対し F_R が直交するベクトルの集合に分割できる（すなわち，$\alpha \in F'_R,\, \beta \in F''_R \Rightarrow (\alpha, \beta) = 0$ となるような F_R の分割 $F_R = F'_R \cup F''_R,\, F'_R \neq \emptyset,\, F''_R \neq \emptyset$ が存在する）とき，R は**可約**であるという．そうでないとき**既約**という．

注意 8.10. i) n_1 次元の有限鏡映群 R_1 と n_2 次元の有限次元鏡映群 R_2 とから，自然に $n_1 + n_2$ 次元の有限次元鏡映群 $R = R_1 \times R_2$ が定義される．R の全ての元 s は一意的に $s = s_1 s_2$（$s_1 \in R_1,\, s_2 \in R_2$）と書けて，$s_1 s_2 = s_2 s_1$ を満たす．
ii) n 次元の有限鏡映群 R を生成する $F \in \mathbb{R}^n$ が直交するものに $F = F_1 \cup F_2$ と分解されるならば，F_1，F_2 で張られる空間の次元をそれぞれ $n_1,\, n_2$ とおくと $n = n_1 + n_2$ で，F_1 と F_2 とはそれぞれ n_1 次元，n_2 次元の有限次元鏡映群 $R_1,\, R_2$ を生成し，もとの R は $R_1 \times R_2$ と見なせる（$\because (\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow s_\alpha(\beta) = \beta$).
　よって，有限鏡映群やルート系の分類は，既約なものの分類に帰着される．

補題 8.11. Σ をルート系とする．
i)　$\alpha \in \Sigma \ \Rightarrow\ -\alpha \in \Sigma$.
ii)　$\alpha \in \Sigma,\ k\alpha \in \Sigma,\ k \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ k = \pm 1,\, \pm 2,\, \pm\frac{1}{2}$.
　また $\Sigma_0 := \{\alpha \in \Sigma;\, \frac{\alpha}{2} \notin \Sigma\}$ は被約ルート系となる．
iii) $\alpha,\, \beta \in \Sigma$ が一次独立で $(\alpha, \beta) < 0,\, |\alpha| \leq |\beta|$ を満たすならば，α と β のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = -\cos\frac{\pi}{m},\ -2\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 1,\ -2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = [\frac{m}{2}]$$

を満たす $m \in \{3, 4, 6\}$ が存在する．

　証明. i) $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ から明らか．
　ii) $\alpha \in \Sigma,\, k\alpha \in \Sigma,\, k > 1$ とすると $2\frac{(\alpha, k\alpha)}{(k\alpha, k\alpha)} = \frac{2}{k}$ が整数なので，$k = 2$ を得る．
　Σ の Weyl 群を W とおくと，$w \in W$，$\alpha \in \sigma$ に対し，$\frac{\alpha}{2} \notin \Sigma \Leftrightarrow \frac{1}{2}w(\alpha) \notin \Sigma$ であるから，$w(\Sigma_0) = \Sigma_0$．よって Σ_0 はルート系．
　iii) $(\alpha, \beta)^2 < (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$ より

$$4\cos^2\theta = 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \cdot 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} < 4.$$

左辺は負の整数の積となっていることに注意すると，その積の形は $(-1)\cdot(-1),\, (-1)\cdot(-2),\, (-1)\cdot(-3)$ のいずれかに限る．このとき $\cos\theta$ の値は，$-\frac{1}{2},\, -\frac{\sqrt{2}}{2},\, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ でそれぞれ，$A_2,\, B_2,\, G_2$ になる．$\square$

系 8.12. 可約な 2 次元鏡映群は直交する 2 つのベクトルによる鏡映 $s_1,\, s_2$ で生成され $s_1^2 = s_2^2 = 1,\, s_1 s_2 = s_2 s_1$ を満たす．
　既約な 2 次元鏡映群で Weyl 群に対応するものは，$A_2,\, C_2,\, G_2$ に限る．このうちで被約でないルート系は BC_2 に限る．BC_2 は適当な直交系を取れば，全体のルートの同じスカラー倍を除いて

$$BC_2 : \{\pm e_1,\, \pm e_2,\, \pm 2e_1,\, \pm 2e_2,\, \pm(e_1 + e_2),\, \pm(e_1 - e_2)\}$$

となる．$C_2,\, G_2$ のルート系は，ルートの長さを考慮して $|\alpha| < |\beta|$ のとき，それぞれ $\underset{\alpha}{\circ}\!\Leftarrow\!\underset{\beta}{\circ}$, $\underset{\alpha}{\circ}\!\Lleftarrow\!\underset{\beta}{\circ}$ と表す．BC_2 のときは $\underset{\alpha}{\circ}\!\Leftrightarrow\!\underset{\beta}{\circ}$ と表そう．

定義 8.13. F を n 次元の有限鏡映群 R から作成された F_R または n 次元のルート系 Σ とする．$\rho \in \mathbb{R}^n$ で $(\rho, \alpha) \neq 0$（$\forall\alpha \in F$）となるものを任意に選んでおく．F の元に対し，ρ との内積の正負に対応して，正または負と定義し，F の正の元全体を F^+，負の元全体を F^- とおく．
　このとき $\alpha \in F^+ \Rightarrow -\alpha \in F^-$ であって，$F = F^+ \cup F^-$，$F^+ \cap F^- = \emptyset$.
　$D^+ := \{x \in \mathbb{R}^n;\, (\alpha, x) \geq 0 \quad (\forall\alpha \in F^+)\}$ を **Weyl の部屋**という（$\rho \in D$ に注意）．一般に各 $\alpha \in F$ との内積が 0 または一定符号，という集合を**部屋**といい，部屋は $L_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n;\, (\alpha, x) = 0\}$（$\alpha \in F$）という**壁**（*wall*）で分けられている．**Weyl の部屋**はこのような部屋の一つ．

ある部屋 D の 2 点 $x,\ x'$ をとると x と x' を結ぶ線分 $\{tx+(1-t)x';\ t\in[0,1]\}$ は D に含まれる．$\forall\alpha\in F$ に対し，もし (α,x) と (α,x') が共に負にならないならば，この線分上の点も同様であるので．それは D に属する．同様に $x\in D$ ならば，$tx\in D$（$t>0$）である．

一方，$0\neq x\in D$ とすると，$(\alpha,x)>0$ となる $\alpha\in F$ が存在するが，$(\alpha,-x)<0$ となるから $-x\notin D$ である．

ある部屋 D の壁 L_α とは，$\exists p\in L_\alpha,\ \exists\epsilon>0$（$|x-p|<\epsilon,\ x\in L_\alpha\Rightarrow x\in D$）となるときをいう．$L_\alpha$ が D^+ の壁となる $\alpha\in F^+$ で $\frac{1}{2}\alpha\notin F$ となるものの集合を Ψ とおき，F の**基本系**（*funfamental system*）という．

定理 8.14. Ψ は n 個の一次独立な元 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ からなり

$$D^+=\{x\in\mathbb{R}^n;\ (x,\alpha)\geq 0\quad(\forall\alpha\in\Psi)\}, \tag{8.14}$$

$$(\alpha_i,\alpha_j)\leq 0\qquad(1\leq i<j\leq n). \tag{8.15}$$

F の元 β を Ψ の元の一次結合として表したとき，その係数は全て非負か，あるいは全て非正となる．前者は $\beta\in F^+$，後者は $\beta\in F^-$ を意味する．

証明. (8.14)．F^+ の元を $\{\beta_1,\dots,\beta_N\}$，(8.14) の右辺を D_0 とおき，$D_j=\{x\in D_{j-1};\ (\beta_j,x)\geq 0\}$ によって $D_1,\dots,D_N=D^+$ を定義する．$D_m=D^+$ となる最小の m を取る．もし $m\geq 1$ ならば D_{m-1} の内部の点 q で $(\beta_m,q)<0$ となるものがある．q と ρ を結ぶ線分は D_{m-1} の内部にあるから，それと L_{β_m} の交点 p は D_{m-1} の内部の点である．よって p の近くの L_{β_m} の点は D^+ に属するので，L_{β_m} は D^+ の壁となり，Ψ と D_m の定義に矛盾する．よって $m=0$ であって，(8.14) が成立する．

Ψ が $\mathbb{R}^n$ を張る．Ψ が $\mathbb{R}^n$ を張らないとするならば，$(\alpha,x)=0$（$\forall\alpha\in\Psi$）を満たす $0\neq x\in\mathbb{R}^n$ が存在し，(8.14) より $\pm x\in D^+$．一方 F^+ は $\mathbb{R}^n$ を張るから，$(\beta,x)\neq 0$ を満たす $\beta\in F^+$ が存在する．$x\notin D^+$ または $-x\notin D^+$ となって矛盾．

$\alpha=c_1\beta_1+\cdots+c_m\beta_m\in F^+$（$c_j>0,\ \beta_j\in F^+,\ \beta_1$ と β_2 は一次独立で $m\geq 2$）$\Rightarrow\alpha\notin\Psi$．$\alpha\in\Psi$ と仮定する．$p\in L_\alpha,\ \epsilon>0$ を $|x-p|<\epsilon,\ x\in L_\alpha\Rightarrow x\in D^+$ となるように選ぶ．この x に対し $0=(\alpha,x)=\sum c_j(\beta_j,x)$ であるから $(\beta_j,x)=0$ が成り立つ．p の近くの L_α の点が L_{β_j} の点であるということは，$L_\alpha=L_{\beta_j}$ を意味する．これは β_1 と β_2 が一次従属を意味し，矛盾．

(8.15)．一次独立な $\alpha,\beta\in\Psi$ が $(\alpha,\beta)>0$ を満たしたと仮定する．$F\in\gamma:=s_\alpha(\beta)=\alpha-c\beta$ で $c>0$ となる．$\gamma\in F^+$ ならば，$\alpha=\gamma+c\beta$ であるから，前項より $\alpha\notin\Psi$ となって矛盾．よって $-\gamma\in F^+$ であるが，このときも $\beta=\frac{1}{c}\alpha+\frac{1}{c}(-\gamma)$ となって同様に矛盾．

Ψ の元は一次独立．$\Psi=\{\alpha_1,\dots,\alpha_N\}$ とおき，$\sum c_j\alpha_j=0$ と仮定する．適当に番号を付け替えて，$c_i\geq 0$（$1\leq i\leq m$），$c_j\leq 0$（$m<j\leq N$）と仮定してよい．$\beta=\sum_{i=1}^m c_i\alpha_i$ とおくと，$-\beta=\sum_{j=m+1}^n c_j\alpha_j$ であるから $0\leq(\beta,\beta)=-\sum_{i=1}^m\sum_{j=m+1}^N c_ic_j(\alpha_i,\alpha_j)\leq 0$ より $\beta=0$ が分かる．よって $0=\sum_{i=1}^m c_i(\alpha_i,\rho)=\sum_{j=m+1}^N(-c_j)(\alpha_j,\rho)$ であるが和の各項は非負実数なので各項が 0 で，$c_i=c_j=0$．

$F^+\ni\beta=\sum c_j\alpha_j\Rightarrow c_j\geq 0$．内積に関する $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ の相対基底を $\{\varpi_1,\dots,\varpi_n\}$ とおく．すなわち $(\alpha_i,\varpi_j)=\delta_{ij}$（$1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n$）．このとき $\varpi_j\in D^+$ かつ $\beta\in F^+$ であるから $c_j=(\beta,\varpi_j)\geq 0$． □

定理 8.15. i) 鏡映群 R の任意の 2 つの部屋 $D_1,\ D_2$ に対し，$w(D_1)=D_2$ となる $w\in R$ がただ 1 つ存在する．特に鏡映群の部屋の数と鏡映群の元の数とは等しい．
ii) 鏡映群 R は，基本系 Ψ の元による鏡映 $\{s_j:=s_{\alpha_j};\ j=1,\dots,n\}$ で生成される．
iii) $w\in R$ に対し，

$$w=s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_m} \tag{8.16}$$

という表示で m が最小となるものを w の**極小表示**（*minimal expression*）といい，m を w の**長さ**といって $L(w)$ と書く．

$F=F_R$ または，F が被約ルート系ならば，(8.16) が w の極小表示のとき $L(w)=\#(F^+\cap wF^-)$ で

$$F^+\cap wF^-=\{\alpha_{j_1},\,s_{j_1}\alpha_{j_2},\,s_{j_1}s_{j_2}\alpha_{j_3},\,\ldots,\,s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_{m-1}}\alpha_{j_m}\}. \tag{8.17}$$

証明．鏡映群の元は F を変えないので，部屋はある部屋に移ることに注意．

s_j（$j=1,\ldots,n$）の合成で表せる R の部分集合の全体を R' とおく．

$w\in R'\Rightarrow w^{-1}\in R'$ に注意．

任意の部屋 D に対し，$wD=D^+$ となる $w\in R'$ がある．D の内部の点 p に対し，$|wp-\rho|$（$w\in R'$）を考えて，それが最小となる w を取り，$q=wp$ とおく．

$$0\le|s_jq-\rho|^2-|q-\rho|^2=|s_jq|^2-|q|^2-2(s_jq-q,\rho)=2\frac{(\alpha_j,q)}{(\alpha_j,\alpha_j)}(\alpha_j,\rho)$$

より $(\alpha_j,q)\ge0$ を得る．q は壁の上にはないので，$(\alpha_j,q)>0$（$j=1,\ldots,n$）となって，q は D^+ の内部の点である．よって $wD=D^+$ でなければならない．

ii) $R=R'$．$\beta\in R$ に対し L_β を壁とする部屋のひとつを D とおくと，$wD=D^+$ となる $w\in R'$ が存在する．wL_β は D^+ の壁に移るので，$wL_\beta=L_{\alpha_j}$ となる $\alpha_j\in\Psi$ が存在する．よって $s_{w\beta}=s_j$ であるから，$ws_\beta w^{-1}=s_j$ すなわち $s_\beta=w^{-1}s_jw\in R'$．したがって s_β（$\beta\in F$）の合成も R' の元であり，$R=R'$ が分かる．

iii)．$L(w)$ についての帰納法で示す．

$L(w)=0\Leftrightarrow w=1$ なので，$L(w)=0$ のときは明らか．

$L(w)=1$ のとき：$\beta\in F^+$ は $\beta=\sum c_i\alpha_i\in F^+$（$c_j\ge0$）と表せるが，$s_j(\beta)=\sum c_i'\alpha_i$ とおくと，$i\ne j\Rightarrow c_i=c_i'$ であるから，$F^+\ni\beta\ne\alpha_j\Rightarrow s_j(\beta)\in F^+$．よって $F^+\cap s_jF^-=\{\alpha_j\}$．

$L(w)<m$ のとき正しいとすると，帰納法の仮定から $s'=s_{j_2}\cdots s_{j_m}$ に対し $F^+\cap s'F^-=\{\alpha_{j_2},\,s_{j_2}\alpha_{j_3},\,\ldots,\,s_{j_2}s_{j_3}\ldots s_{j_{m-1}}\alpha_{j_m}\}$．もし $\alpha_{j_1}=s_{j_2}s_{j_3}\ldots s_{j_{k-1}}\alpha_{j_k}$ となる $2\le k\le m$ が存在するならば，$s_{j_1}=s_{j_2}s_{j_3}\ldots s_{j_{k-1}}s_{j_k}s_{j_{k-1}}\ldots s_{j_3}s_{j_2}$ より

$$\begin{aligned}s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_m}&=s_{j_2}s_{j_3}\ldots s_{j_{k-1}}s_{j_k}s_{j_{k-1}}\ldots s_{j_3}s_{j_2}\cdot s_{j_2}\cdots s_{j_m}\\&=s_{j_2}s_{j_3}\cdots s_{j_{k-1}}s_{j_{k+1}}\cdots s_{j_m}\end{aligned}$$

となるので，$L(w)=m$ に反す．よって $\alpha_{j_1}\notin s'F^-$，すなわち $-\alpha_{j_1}\in s'F^-$．一方 s_{j_1} で F^+ と F^- が入れ替わるのは $\pm\alpha_{j_1}$ のみなので，

$$\begin{aligned}F^+\cap sF^-&=\big(F^+\cap s_{j_1}(F^-\cap s'F^-)\big)\cup\big(F^+\cap s_{j_1}(F^+\cap s'F^-)\big)\\&=\{\alpha_{j_1},\,s_{j_1}\alpha_{j_2},\,s_{j_1}s_{j_2}\alpha_{j_3},\,\ldots,\,s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_{m-1}}\alpha_{j_m}\}.\end{aligned}$$

$wD^+=D^+\Rightarrow w=1$．$wD^+=D^+$ であるから $w\rho\in D^+$．よって $\alpha\in F^-\Rightarrow(w\alpha,\rho)=(\alpha,w^{-1}\rho)\le0$ なので $w\alpha\in F^-$．すなわち $wF^-\subset F^-$ なので $F^+\cap wF^-=\emptyset$ であり，iii) から $L(w)=0$ となって $w=1$．

i)．$w_1D_1=D^+$, $w_2D_2=D^+$ となる w_1, $w_2\in R$ が存在するので，$w_2^{-1}w_1D_1=D_2$．一方 $wD_1=D_2$ ならば $ww^{-1}D^+=w_2^{-1}D^+$ なので $w_2ww^{-1}D^+=D^+$．よって $w_2ww^{-1}=1$ となって $w=w_2^{-1}w$．□

系 8.16. 鏡映群 R には，その長さがもっとも長い元がただ一つ存在する．それを**最長元**とよび w^* と書くと，$L(w^*)=\frac12\#F_R$．

証明．部屋 D^+ を $-D^+$ に移す元 w^* は $w^*F_R^+=F_R^-$ を満たすので，$F_R^+\cap w^*F_R^-=F_R^+$ となり，これが最長元．一意性も前定理の i) から分かる．□

注意 8.17. i) $n=2$ とする．α_1 と α_2 のなす角を $(1-\frac{1}{m_{12}})\pi$ とおく（$m_{12}\ge2$）と Weyl の部屋 D^+ は，角度 $\frac{\pi}{m_{12}}$ の開きをもった原点を端点とする半直線とその角の内部とである．各部屋はこれと同型な図形で，$\mathbb{R}^2$ は壁を境として部屋に分かれるから $2m_{ij}$ は整数でなければならない．一方 $-D^+$ も部屋であるから，$2m_{ij}$ は偶数である．よって m_{ij} は 2 以上の整数で，鏡映群は $I_2(m)$ となる．
ii) $\alpha_i,\ \alpha_j\in\Psi$ とし，α_i と α_j が 2 次元の線形空間を張るとすると，$R_F':=R_f\cap(\mathbb{R}\alpha_i+\mathbb{R}\alpha_j)$ は階数 2 の鏡映群を生成し，R_F' の元を α_i と α_j の一次結合で書いたと

き，その係数は共に非負または共に非正であるから，$\{\alpha_i, \alpha_j\}$ はこの階数 2 の鏡映群の基本系である．よって α_i と α_j のなす角は $(1 - \frac{1}{m_{ij}})\pi$（$m_{ij}$ は 2 以上の整数）となる．

9. 古典型ルート系

$\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ を $\mathbb{R}^m$ における正規直交基底とする．

定義 9.1. 古典型の既約かつ被約な階数 n のルート系とは，以下のものである．

A_n：$\Psi = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_n - e_{n+1}\}$,
$\Sigma^+ = \{e_i - e_j;\ 1 \le i < j \le n\}$.
$\mathbb{R}^n \simeq \{x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n;\ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ におけるルート系とみなす．
Weyl 群は，基底の順序の入れ替えの全体，すなわち置換群と見なせる．

$$\underset{\alpha_1}{\circ} - \underset{\alpha_2}{\circ} - \underset{\alpha_3}{\circ} - \cdots - \underset{\alpha_{n-1}}{\circ} - \underset{\alpha_n}{\circ}$$

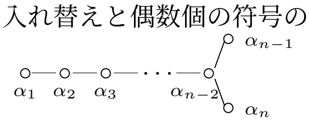
B_n：$\Psi = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n\}$,
$\Sigma^+ = \{e_i - e_j,\ e_i + e_j,\ e_k;\ 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$.
Weyl 群は，基底の順序の入れ替えと符号の反転．

$$\underset{\alpha_1}{\circ} - \underset{\alpha_2}{\circ} - \underset{\alpha_3}{\circ} - \cdots - \underset{\alpha_{n-1}}{\circ} \Rightarrow \underset{\alpha_n}{\circ}$$

C_n：$\Psi = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, 2e_n\}$,
$\Sigma^+ = \{e_i - e_j,\ 2e_k;\ 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$.
Weyl 群は，基底の順序の入れ替えと符号の反転．

$$\underset{\alpha_1}{\circ} - \underset{\alpha_2}{\circ} - \underset{\alpha_3}{\circ} - \cdots - \underset{\alpha_{n-1}}{\circ} \Leftarrow \underset{\alpha_n}{\circ}$$

D_n（$n \ge 3$）：$\Psi = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n\}$,
$\Sigma^+ = \{e_i - e_j,\ e_i + e_j,\ 2e_k;\ 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$.
Weyl 群は，基底の順序の入れ替えと偶数個の符号の反転．



上の Ψ の性質を表す図式を Dynkin 図式という．

2 つの階数 n の既約なルート系 Σ，Σ' は，$\mathbb{R}^n$ の線形変換 $\mathcal{T}$ と実数 $C > 0$ で

$$\mathcal{T}(\Sigma) = \Sigma', \quad |\mathcal{T}(x)| = C|x| \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n) \tag{9.1}$$

を満たすものがあるとき，同じものとみなす．このとき

$$A_1 = B_1 = C_1,\ B_2 = C_2,\ A_3 = D_3 \tag{9.2}$$

10. 有限鏡映群の分類

既約な有限鏡映群 R を分類しよう．そのためには F_R の基本形 Ψ を分類すればよい（$R = \langle s_\alpha;\ \alpha \in \Psi \rangle$）．$\Psi = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ とおくと，これは以下の条件を満たす．

(A1)：　$\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ は一次独立．

(A2)：　$(\epsilon_i, \epsilon_j) = \begin{cases} 1 & (1 \le i = j \le n) \\ -2\cos\frac{\pi}{m_{ij}}, \quad m_{ij} \in \{2, 3, 4, \dots\} & (1 \le i < j \le n) \end{cases}$

(A3)：　各 i に対し $(\epsilon_i, \epsilon_j) \ne 0$ となる j が存在する．

(A1), (A2), (A3) を満たす $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ を ϵ-系と呼ぶことにする．

このとき次は明らか．

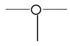
補題 10.1. Γ を ϵ-系とするとき，$\Gamma' \subset \Gamma$ も ϵ-系．

補題 10.2. ϵ-系 $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ に対し $\#\{(i,j);\ (\epsilon_i, \epsilon_j) \ne 0,\ 1 \le i < j \le n\} < n$.

証明. $0 < |\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n|^2 = n + 2\sum_{1 \le i < j \le n} (\epsilon_i, \epsilon_j)$．$(\epsilon_i, \epsilon_j) \ne 0$ ならば $2(\epsilon_i, \epsilon_j) \le 2\cos\frac{2}{m}\pi \le -1$ であるから結論を得る． □

系 10.3. i) ϵ-系の Dynkin 図式には，閉じた道（ループ）はない．
ii) Γ を ϵ-系とする．ϵ_i が ϵ_j, ϵ_k と線で繋がっているなら，ϵ_j と ϵ_k とは直交している．

補題 10.4. ϵ 系の Dynkin 図式に対し，一つの $\circ$ に繋がる線は以下のいずれか．

$\circ\overset{m}{—}$ （$m \geq 3$）　　$—\circ\overset{m}{—}$ （$3 \leq m \leq 5$）　　

証明．$\epsilon \in \Gamma$, $\{\eta_1, \ldots, \eta_k\} = \{\eta \in \Gamma; (\epsilon, \eta) \neq 0,\ \eta \neq \epsilon\}$ とおく．$c_j = (\epsilon, \eta)$, $\epsilon' = \epsilon - \sum c_j \eta_j$ とおくと $1 = |\epsilon|^2 = |\epsilon'|^2 + c_j^2 > c_j^2$. c_j^2 は $\cos^2 \frac{1}{m_j}\pi$（m_j は 3 以上の整数）の形をしているので，$c_j \geq \frac{1}{4}$．$m_j = 4$ のとき $c_j^2 = \frac{1}{2}$ となるので，$m \leq 3$ で $m = 3$ のときは，$m_1 = m_2 = m_3 = 3$ でなければならない．$m = 2$ のとき，$m_1 \geq m_2$ とすると $m_2 = 3$ で，このとき $\cos^2 \frac{\pi}{m_1} < \frac{2}{3}$ より $3 \leq m_1 \leq 5$. □

系 10.5. $\circ\overset{m}{—}$ （$m \geq 6$）を含む ϵ-系は $\circ\overset{m}{—}\circ$ に限る．

注意 10.6. $z = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$ とおくと $z^5 = -1$ より $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ なので $x = z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{\pi}{5}$ とおくと，$x^2 - x - 1 = 0$ となり $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を得る．よって $\cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{3+\sqrt{5}}{8} = 0.6545\ldots$ となる．一方 $\cos^2\frac{\pi}{3} = 0.25$, $\cos^2\frac{\pi}{4} = 0.5$, $\cos^2\frac{\pi}{6} = 0.75$.

補題 10.7. ϵ-系 Γ が A_k 型の ϵ-系 $\Gamma' = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\}$ を含めば，$\Gamma'' = \{\epsilon := \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k\} \cup \Gamma \setminus \Gamma'$ も ϵ-系となり，Γ'' の Dynkin 図式は Γ' を一点にまとめたものになる．

証明．$|\epsilon|^2 = k - 2\sum_{1\leq i<j\leq k}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 1$ であって，Γ'' の各元は一次独立で長さは 1 となる．$\eta \in \Gamma \setminus \Gamma'$ に対し (η, ϵ_j) となる j は高々1 つであるから，(A2) および (A3) も正しく，補題が成立する． □

補題 10.8. $\circ\overset{m}{—}$ （$m \geq 4$）を含む階数 3 以上の ϵ-系は $B_n = C_n$ と以下のものに限る．

F_4 : $\circ—\circ=\!=\circ—\circ$　　H_3 : $\circ—\circ\overset{5}{—}\circ$　　H_4 : $\circ—\circ—\circ\overset{5}{—}\circ$

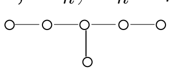
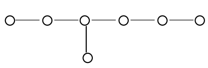
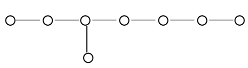
証明．階数が 3 以上であるから $m = 4$ または $m = 5$ で，補題 10.4，10.7 より $\underset{\epsilon_1}{\circ}—\underset{\epsilon_2}{\circ}—\cdots—\underset{\epsilon_p}{\circ}\overset{m}{—}\underset{\eta_q}{\circ}—\cdots—\underset{\eta_2}{\circ}—\underset{\eta_1}{\circ}$ に限る（$p \geq 2$, $p \geq q \geq 1$）．このとき $\epsilon = \sum_{i=1}^{p} i\epsilon_i$, $\eta = \sum_{j=1}^{q} j\eta_j$ とおくと $|\epsilon|^2 = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2}$ で，同様に $|\eta|^2 = \frac{q(1+1)}{2}$．また $(\epsilon, \eta) = (p\epsilon_p, q\eta_q) = -pq\cos\frac{\pi}{m}$ であるから $(\epsilon, \eta)^2 < |\epsilon|^2|\eta|^2$ より

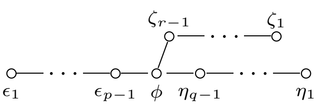
$$p^2q^2\cos^2\tfrac{\pi}{m} < \tfrac{1}{4}pq(p+1)(q+1).$$

$m = 4$ のとき $2pq < (p+1)(q+1)$ より $(p-1)(q-1) < 2$ となり，$p \geq q \geq 2$ のときは $q = 2$ かつ $p = 2$ を得て F_4 となり，$q = 1$ のときは $B_n = C_n$ である．

$m = 5$ のときは $\frac{3+\sqrt{5}}{2}pq < (p+1)(q+1)$ より $\frac{\sqrt{5}+1}{2}pq < p+q+1$ となる．$p \geq q \geq 2$ ならば $\frac{\sqrt{5}+1}{2}pq > (\sqrt{5}+1)p > 3p > p+q+1$ で矛盾．よって $q = 1$ となる．このとき $\frac{\sqrt{5}+1}{2}p < p+2$ より $p < \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5}+1$ となって $p \leq 3$. □

補題 10.9. 既約な ϵ-系 Γ で，Γ のいずれの 2 元も直交するかあるいは角度 $\frac{2\pi}{3}$ をなすものは，A_n, D_n の他は以下に限る．

E_6 : 　E_7 : 　E_8 : 

証明．補題 10.4，10.7 より 

としてよい．ただし $p \geq q \geq r \geq 2$．$\epsilon = \sum_{i=1}^{p-1} i\epsilon_i$，$\eta = \sum_{j=1}^{q-1} j\eta_j$，$\zeta = \sum_{k=1}^{r-1} k\zeta_k$ とおくと $|\epsilon|^2 = \frac{1}{2}p(p-1)$，$|\eta|^2 = \frac{1}{2}q(q-1)$，$|\zeta|^2 = \frac{1}{2}r(r-1)$．また $(\epsilon, \phi) = \big((p-1)\epsilon_{p-1}, \phi\big) = -\frac{p-1}{2}$ で，同様

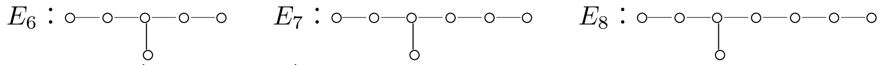
に $(\eta,\phi)=-\frac{q-1}{2}$，$(\zeta,\phi)=-\frac{r-1}{2}$．一方 ϵ, η, ζ は直交することから

$$
\begin{aligned}
0 &< \left|\phi-\frac{(\epsilon,\phi)}{(\epsilon,\epsilon)}\epsilon-\frac{(\eta,\phi)}{(\eta,\eta)}\eta-\frac{(\zeta,\phi)}{(\zeta,\zeta)}\zeta\right|^2 = 1-\frac{(\epsilon,\phi)^2}{(\epsilon,\epsilon)}-\frac{(\eta,\phi)^2}{(\eta,\eta)}-\frac{(\zeta,\phi)^2}{(\zeta,\zeta)}\\
&= 1-\tfrac{p-1}{2p}-\tfrac{q-1}{2q}-\tfrac{r-1}{2r}=\tfrac12\left(\tfrac1p+\tfrac1q+\tfrac1r-1\right)
\end{aligned}
$$

であるから $1<\frac1p+\frac1q+\frac1r\le\frac3r$．よって $r=2$ で $\frac12<\frac1p+\frac1q\le\frac2q$．よって $q\le 3$. $q=2$ のときは，$p\ge 2$ は任意で，D_n 型となる．$q=3$ とおくと $\frac16<\frac1p$ であるから $p\le 5$ で $p=3,\,4,\,5$ となり，それぞれ E_6, E_7, E_8 となる． □

定理 10.10. 既約な鏡映群は，A_1, $I_2(m)$ $(m\ge 3)$, A_n $(n\ge 3)$, B_n $(n\ge 3)$, D_n $(n\ge 4)$, E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4 のいずれかである．

定理 10.11. 既約でかつ被約なルート系は，古典型の A_n, B_n, C_n, D_n の他，以下の**例外型**がある．



E_n : $\Psi=\{\frac12(e_1+e_8)-\frac12(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5+e_6+e_7),\, e_1+e_2,\, e_2-e_1,\, e_3-e_2,\, e_4-e_3,\,\ldots,\, e_{n-1}-e_{n-2}\}$

F_4 : ∘—∘⇐∘—∘　$\Psi=\{\frac12(e_1-e_2-e_3-e_4),\, e_4,\, e_3-e_4,\, e_2-e_3\}$

G_2 : ∘⇚∘　$\Psi=\{e_1-e_2,\, -2e_1+e_2+e_3\}$

既約でかつ被約でないルート系は BC_n のみである．

$\Sigma^+=\{e_i-e_j,\, e_k,\, 2e_k;\, 1\le i<j\le n,\, 1\le k\le n\}$　BC_n : ∘—∘—$\cdots$—∘—∘⇐⇒∘

証明. 階数が 2 の既約かつ被約なルート系は A_2, $B_2=C_2$, G_2 のみであり，任意の Ψ の 2 つの元は，互いに直交しなければ，これらのルート系の基本系となる．よって有限鏡映群分類から，既約かつ被約なルート系の分類が分かる．同様に，既約であるが被約でないルート系も階数 2 の結果から BC_n に限ることが分かる． □

定理 10.12. i) 既約鏡映群 R が，$I_2(m)$（m は奇数），A_n, D_n $(n\ge 3)$, E_6, E_7, E_8, H_3, H_5 のいずれかであれば，任意の $\alpha,\beta\in F_R$ に対し $w\alpha=\beta$ となる $w\in R$ が存在する．
ii) 既約鏡映群 R が $I_2(m)$（m は偶数），$B_n=C_n$，F_4，G_2 のいずれかであれば，F_R の基本系の中の 2 元 α_1, α_2 によって $F_R=W\alpha_1\cup W\alpha_2$，$W\alpha_1\cap W\alpha_2=\emptyset$ となる．Dynkin 図式において $\circ\overset{m}{—}\circ$ の m が偶数の線を切り離すと 2 つに分かれるので，α_1, α_2 はその両方から一つずつ任意に選んだものでよい．
iii) ルート系 Σ に対し，Weyl の部屋 D^+ を定義する Σ の元の集合 $\Psi=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ を $D^+=\{x\in\mathbb{R}^n;\, (\alpha_j,x)\ge 0\quad (j=1,\ldots,n)\}$ かつ $\frac12\alpha_j\notin\Sigma$ となるように定めると，Σ の元は Ψ の元の整数倍の一次結合として一意的に表され，その整数は同時に全て非負，または全て非正である．

証明. 階数が 2 の $I_2(m)$ に対して主張が正しいことは，容易に分かる（m が奇数のときルートは部屋の内部にあり，m が偶数の時は壁上にある）．よって Ψ の 2 元が m が奇数の線で結ばれていれば，その一方の元を他方に移す $w\in W$ が存在する．

$\forall\alpha\in F_R$ に対し，L_α を壁に持ち，$(x,\alpha)\ge 0$ に含まれる一つの部屋 D をとると，$wD=D^+$ をみたす $w\in F_R$ が存在する．これは $w\alpha\in\Psi$ を意味する．よって最初の主張と合わせて，i) が得られる．一方，階数が 2 以上で ii) の場合は，鏡映群は長さが異なる基本ルート系をもつ Weyl 群に対応することに注意すれば，ii) も分かる．

iii) ルート系の定義の $2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbb{Z}$ と i), ii) の主張から分かる（$s_\alpha(x)=x-2\frac{(\alpha,x)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ に注意）． □