

# 1 近似

## 1.1 テーラーの定理と近似

実数値関数  $f(x)$  が連続な 2 階までの導関数を持つとしよう. すると

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a), \quad (1)$$

$$\int_a^x (x-t)f''(t)dt = [(x-t)f'(t)]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x f'(t)dt = -f'(a)(x-a) + f(x) - f(a),$$
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (t-a)f''(t)dt. \quad (2)$$

特に,  $t \in [a, x]$  ( $x < a$  ならば,  $t \in [x, a]$ ) のとき, ある正数  $C$  に対して  $|f''(t)| \leq C$  となるとする. このとき  $|\int_a^x (x-t)f''(t)dt| \leq |\int_a^x C|t-a|dt| = \frac{C}{2}|x-a|^2$  であるので

$$|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)| \leq \frac{C}{2}|x-a|^2 \quad (3)$$

となる.

$|x-a|$  が小さいときは  $f(x)$  の近似値として  $f(a) + f'(a)(x-a)$  を用いると, 真の値との差 (すなわち誤差) が  $\frac{C}{2}|x-a|^2$  以下であることが分かる.

たとえば小さな正数  $x$  に対して  $\sqrt{1+x}$  の近似値を求めることを考えてみる.  $((1+x)^{1/2})' = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $((1+x)^{1/2})'' = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$  であるから (2), (3) より

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad (x > 0)$$

が分かる. たとえば

$$\sqrt{5} = 2(1 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{10} = 3(1 + \frac{1}{9})^{\frac{1}{2}}$$

に対して適用すると  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{10}$  の近似値として  $2(1 + \frac{1}{8}) = \frac{9}{4} = 2.25$ ,  $3(1 + \frac{1}{18}) \doteq 3.1667$  を得る. 真の値はこれより小さいことが分かるが, その誤差は  $2 \cdot \frac{1}{8}(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{64} \doteq 0.01625$ ,  $3 \cdot \frac{1}{8}(1 + \frac{1}{9})^2 \doteq 0.00463$  以下である. よって

$$2.22 < \sqrt{5} < 2.25, \quad 3.162 < \sqrt{10} < 3.166$$

が分かる. 実際の値は

$$\sqrt{5} = 2.2360679774997\dots, \quad \sqrt{10} = 3.1622776601683\dots$$

$x$  が負のときは

$$\sqrt{1+x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+x}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{-x}{1+x}}}$$

として (3) を使ってもよいが, たとえば  $-\frac{1}{3} \leq x < 0$  のときは,  $1 < (1+x)^{-\frac{2}{3}} < (\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{27}{8}} < 2$  であるから

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad (-\frac{1}{3} < x < 0) \quad (4)$$

を得る.

$\sqrt{5}$  の近似値として  $\frac{9}{4}$  を考えたが, これを使うと  $\sqrt{5} = \frac{9}{4}\sqrt{\frac{16}{81} \cdot 5} = \frac{9}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{81}}$  が得られて,  $\sqrt{5}$  の近似値  $\frac{9}{4}(1 - \frac{1}{162}) = \frac{161}{72} = 2.236111\dots$  を得る. 実際の値はこれより大きい誤差は  $\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{81^2} < 0.00008\dots$  以下である (小数点以下 4 桁程度まで正しい)\*1.

問. 勾配が  $1^\circ$  の坂道を車で 10km 走ると, 高さはどの程度上がるか.  $\sin 1^\circ$  の 1 次近似を用いて計算せよ. また, 誤差はどの程度か?

答.  $\sin x$  に対して (2) を適用すると  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$  なので,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  のとき,  $0 \leq \sin x \leq x$ . よって

$$|\sin x - x| \leq \left| \int_0^x (x-t) \sin t dt \right| \leq \left| \int_0^x (x-t)t dt \right| = \frac{|x|^3}{6}$$

よって

$$\sin 1^\circ \times 10^3 \text{km} \doteq \frac{\pi}{180} \times 10000 \text{m} \doteq 174.533 \text{m}$$

となり, 誤差は高々  $\frac{1}{6} \times \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \times 10^4 \text{m} \doteq 0.008861 \text{m}$  となり, 誤差は 1cm 以下. 高さは 174.5m 上がることになる. なお,  $\sin 1^\circ = 0.017452406437283\dots$ .

$f(x)$  の高階の導関数も存在するときは, (2) より

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt &= \left[ \frac{(x-t)^2}{2} f^{(2)}(t) \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x (x-t) f''(t) dt \\ &= -\frac{(x-a)^2}{2} f''(a) - f'(a)(x-a) + f(x) - f(a), \\ f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2) &= \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

$f(x) = \sqrt{1+x}$  に対して上を適用すると,  $f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ ,  $f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$  であるから

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \quad (x > 0)$$

が分かる.  $\sqrt{5} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}}$ ,  $\sqrt{10} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}}$  に対して上の 2 次の近似を使うと  $\sqrt{5} \doteq 2(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{128}) = \frac{143}{64} \doteq 2.23438$ ,  $\sqrt{10} \doteq 3(1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{648}) = \frac{683}{216} \doteq 3.16204$  を得る.

数学的帰納法を使うと, より一般に以下が分かる ( $n$  は正整数).

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[ \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \\ &= f(x) - f(a) - f'(a) \frac{x}{1!} - \dots - f^{(n-1)}(a) \frac{x^n}{n!}, \\ f(x) &= f(a) + f'(a) \frac{x-a}{1!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \quad (6) \\ &= f_n(x) + R_n(x), \\ f_n(x) &:= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad R_n(x) := \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

\*1 これ続けると,  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n+5}{2a_n}$  で定まり, 急速に  $\sqrt{5}$  に収束する有理数列ができる. 実際  $a_3 = 51841/23184 = 2.236067977915\dots$

(6) は  $f(x)$  に対する **Taylor の定理** で,  $f_n(x)$  は  $f(x)$  の  $a$  での値と,  $n+1$  階までの  $x=a$  での微係数が等しいので,  $x=a$  の近くでは  $f(x)$  に近いと考えられる. その差を表す  $R_n(x)$  を **剰余項** という\*2.

$f^{(n)}(t)$  が閉区間  $I := [a, x]$  ( $a < x$  のときは  $[x, a]$ ) で連続としよう. この区間で  $f^{(n)}(t)$  は最小値  $m$  と最大値  $M$  をもつ.  $m < M$  のときは

$$m = \frac{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} m dt}{\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}} < K := \frac{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) dt}{\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}} < \frac{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} M dt}{\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}} = M$$

となる. 中間値の定理から, ある  $c \in (a, x)$  または  $(x, a)$  において  $f^{(n)}(c) = K$  となる.  $\theta = \frac{c-a}{x-a}$  とおくと  $c = a + \theta(x-a)$  である. すなわち

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (7)$$

となる  $0 < \theta < 1$  が存在する. なお,  $m = M$  のときは  $f^{(n+1)}(t)$  は  $I$  で定数で, 上は任意の  $0 < \theta < 1$  に対して成り立つ\*3.

テイラーの定理は,  $x$  が  $a$  から (少し) 離れたときの  $f(x)$  の近似値を求めるのに用いられることが多い. すなわち,  $r$  を正数として  $(a-r, a+r)$  において

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad (a-r < \forall x < a+r) \quad (8)$$

となる正数  $M$  があるならば

$$\left| f(x) - \left( f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \leq \frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!} \quad (a-r < \forall x < a+r) \quad (9)$$

が成り立つ.

たとえば, 三角関数  $\sin x, \cos x$  や指数関数  $e^x$  において,  $M$  は  $n$  に依存しない定数にとれるので, (9) で  $n$  を大きく取ることにより  $f(x)$  の値をいくらでも高精度で求めることができ, 実際の  $f(x)$  の値との誤差も評価できる.

積分を用いないで同様な考察を行ってみよう.

実数値の関数  $f(x)$  が  $[-1, 1]$  で微分できるとしよう. このとき

$$f(0) = 0, f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [0, 1]) \quad (10)$$

が成り立つ\*4. さらに  $f'(x)$  も微分できるとき

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [0, 1]) \quad (11)$$

が成り立つ.

\*2 (5) 上の形の  $R_n(x)$  をベルヌーイの剰余という

\*3 (7) の形の剰余項をラグランジュの剰余という. 実際には  $f^{(n)}(t)$  の  $I$  での存在のみで示されるが, ここではその連続性を仮定して示した

\*4  $f(a) < 0$  となる  $a \in (0, 1]$  があつたとして,  $F(x) = f(x) - \frac{f(a)}{a}x$  とおくと,  $F(0) = F(a) = 0$  であるから,  $F(x)$  は, ある  $b \in (0, a)$  で極値を取る. このとき  $0 = F'(b) = f'(b) - \frac{f(a)}{a}$  で  $f'(b) = \frac{f(a)}{a} < 0$  となって矛盾.

それは  $F(x) = f'(x)$  とおくと,  $F(0) = 0, F'(x) \geq 0$  だから  $f'(x) = F(x) \geq 0$  ( $\forall x \in [0, 1]$ ) が (10) から分かる. よって再び (10) を使うと, (11) が分かる. これを続けると (正確には数学的帰納法により),  $f(x)$  が  $n+1$  回微分可能で

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0, f^{(n+1)}(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [0, 1]) \quad (12)$$

また,  $f(x)$  の代わりに  $-f(x)$  を考えれば

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0, f^{(n+1)}(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \quad (\forall x \in [0, 1]) \quad (13)$$

さらに

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(0) = c_\nu \quad (\nu = 0, \dots, n-1), \quad c_{n+1}^- \leq f^{(n+1)}(x) \leq c_{n+1}^+ \\ \Rightarrow c_{n+1}^- \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(x) - c_0 - \frac{c_1}{1!}x - \dots - c_n \frac{x^n}{n!} \leq c_{n+1}^+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (\forall x \in [0, 1]) \end{aligned} \quad (14)$$

これは,  $F(x) = f(x) - c_0 - c_1x - \dots - c_n \frac{x^n}{n!} - c_{n+1}^\pm \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$  とおけば上のことから分かる.

特に同じようにすれば

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(0) = c_\nu \quad (\nu = 0, \dots, n-), \quad |f^{(n+1)}(x)| \leq K \quad (\forall x \in [-L, L]) \\ \Rightarrow \left| f(x) - c_0 - c_1x - \dots - c_n \frac{x^n}{n!} \right| \leq K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (\forall x \in [-L, L]) \end{aligned} \quad (15)$$

問.  $0 < x \ll 1$  のとき,  $\sin x < x < \tan x$  となる.  $\tan x - x$  と  $x - \sin x$  はどちらが大きいのか?

問. 実数  $\alpha$  に対し,  $x > -1$  のとき以下を示せ.

$$\left| (1+x)^\alpha - \left( 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}x^n \right) \right| \leq \frac{\prod_{k=0}^n |\alpha-k|}{(n+1)!} \max\{(1+x)^{\alpha-n}, 1\} |x|^{n+1}$$

## 1.2 線形近似での誤差

定理.  $f(x)$  を  $C^2$  級の関数とし,  $[a, b]$  が  $f(x)$  の定義域に含まれるとすると

$$\left| f(x) - \left( f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)) \right) \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} |f''(t)| \cdot \frac{(b-a)^2}{8} \quad (a \leq x \leq b).$$

証明. まず

$$M = \max_{a \leq t \leq b} |f''(t)|$$

とおく. さらに  $F(x) = f(x) - \left( f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)) \right)$  とおくと,  $F(a) = F(b) = 0$  であるから

$$\max_{a \leq t \leq b} |F(t)| = |F(c)|$$

となる  $c \in (a, b)$  が存在する.

$F(x)$  に対して  $x = c$  で Taylor の定理から得られる (9) を適用すると,  $F'(c) = 0$  および  $F''(x) = f''(x)$  であるから

$$|F(x) - F(c)| \leq M \frac{(x-c)^2}{2}$$

となる.  $|c-a| \leq |b-c|$  ならば  $x = a$  とおくと,  $|c-a| < \frac{1}{2}(b-a)$  であるから

$$|F(c)| = M \frac{(c-a)^2}{2} \leq M \frac{(b-a)^2}{8}.$$

$|c-a| > |b-c|$  のときも  $x = b$  とおくと同様の結果を得る.

### 1.3 対数表

常用対数表は、正の実数  $x$  に対して  $\log_{10} x$  の値（の近似値）を求めるための表である。適当な整数  $n$  で  $x = \bar{x} \times 10^n$ ,  $1 \leq \bar{x} < 10$  と表しておくくと  $\log_{10} x = n + \log_{10} \bar{x}$  であるから、 $1 \leq \bar{x} < 10$  に対する  $\log_{10} \bar{x}$  の値が対数表から読み取ればよい。

たとえば、通常の 4 桁対数表では、 $1.00 \leq x < 9.99$  に対して、0.01 刻みで  $\log_{10} x$  の値が小数点以下 4 桁に丸めて書かれている（値は 0 以上 1 未満である）。

$[a, b] \subset [1, 10]$  に対して  $A = \log_{10} a$  と  $B = \log_{10} b$  が与えられたとき、 $x \in [a, b]$  の値を  $A + \frac{x-a}{b-a} B$  で近似したときの誤差は

$$\max_{a \leq x \leq b} |(\log_{10} x)''| \frac{(b-a)^2}{8}$$

以下であることを示した。ある自然数  $N$  によって  $|b-a| \leq 10^{-N}$  となっているとしよう。

$$|(\log_{10} x)''| = \left| \frac{1}{x^2 \log 10} \right| \leq \frac{1}{\log 10}$$

であるから、 $\log 10 = 2.3025850929940 \dots$ \*5であることを用いると、誤差は

$$\frac{10^{-2N}}{8 \log 10} < 0.543 \times 10^{-2N-1}$$

以下となる。4 桁対数表では  $N = 2$  で小数点以下 4 桁の精度で表が書かれているが、線形近似での誤差は無視できるほど小さく収まっている..

実際に、最も誤差が大きくなる  $x = 1$  付近で確かめてみると

$$\begin{aligned} \log_{10} 1.01 &= 0.004321373782642 \dots \\ \log_{10} 1.005 &= 0.002166061756507 \dots \\ \frac{1}{2} \log_{10} 1.01 &= 0.002160686891321 \dots \\ \frac{5}{10} \log_{10} 1.01 - \log_{10} 5 &= 0.0000053748651863 \dots \doteq 0.537 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

となって、上で求めた評価が妥当であることが分かる。

例えば、 $\log_{10} 34.56$  の値を表を使って求めてみよう。

$\log_{10} 34.56 = 1 + \log_{10} 3.456$  である。4 桁常用対数表から  $\log_{10} 3.45 = 0.5378$ ,  $\log_{10} 3.46 = 0.5391$  を得るが両者の差は 0.0013 である。この 13 は表の 3.4 の行の右の欄の外 2 つの数字の間に入るの欄外の数字は計算ミスを防ぐのに便利で、今の場合には 12 か 13 のどちらかであることが表から分かる。

最後の 1 桁の 6 については、線形近似で  $13 \times \frac{6}{10}$  に近い整数を求めることになるが、それは差分の線形近似表の下部に 13 がある列の 6 の行をみると 8 であることが分かる。これにより  $\log_{10} 31.56$  の近似値  $1 + 0.5378 + 0.0008 = 1.5386$  を得る。

$34.56^2$  の近似値を計算してみよう。  $\log_{10} 34.56^2 = 2 \times 1.5386 = 3.0772$  を得る。  $\log_{10} x = 0.0772$  となる  $x$  を求めたい。表を見ると  $\log_{10} 1.19 = 0.0755$ ,  $\log_{10} 1.20 = 0.0792$  の間の値で、この両者の差は 0.0037, 0.0772 と 0.0755 の差は 0.0017 である。  $\frac{170}{37}$  に近い整数を求めることになるが、再び差分の線形近似表の下部に 37 とある項で 17 に近いのは 4 と 5 である。よって  $x$  の近似値  $1.19 + 0.004 = 1.194$  を得るので

$$34.56^2 \doteq 1.194 \times 10^3 = 1194$$

---

\*5 これは後に計算する。

が分かる, なお実際の値は 1194.3936 である.

このようにして有効数字 4 桁程度で実数の掛け算, 割り算, べき場計算, 平方根などの計算ができる.

問. 1)  $\sqrt{34.56}$  と  $\sqrt{3.456}$  を 4 桁常用対数表を使って求めよ.

2) 4 桁常用対数表を使って  $\log_{10} 7.654$  を求め,  $34.567 \times 7.654$  と  $34.567 \div 7.654$  を計算せよ.

常用対数  $\log_{10} x$  の値を計算してみよう.  $|x| < 1$  とすると

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n + \cdots$$

となるが, この両辺を積分すると

$$\begin{aligned} -\log(1-x) &= \int_0^x (1 + x + \cdots + x^{n-1} + x^n + \cdots) dx \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \end{aligned} \quad (16)$$

$x$  を  $-x$  に置き換えて, 両辺を  $-1$  倍すると

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad (17)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x), \quad (18)$$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}. \quad (19)$$

である.  $R_n(x)$  は  $0 < x \leq 1$  のときは交代級数なので

$$\begin{aligned} (-1)^n R_n(x) &= \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right) + \left( \frac{x^{n+3}}{n+3} - \frac{x^{n+4}}{n+4} \right) + \cdots > 0, \\ (-1)^n R_n(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1} - \left( \frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{x^{n+3}}{n+3} \right) - \left( \frac{x^{n+4}}{n+4} - \frac{x^{n+5}}{n+5} \right) - \cdots < \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

より

$$0 < (-1)^n R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (0 < x \leq 1) \quad (20)$$

であって,  $x < 0$  のときは

$$0 < -R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)} \quad (-1 < x < 0). \quad (21)$$

4 桁常用対数表 (1/2)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	40	43
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	36	39
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	33	36
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	31	34
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	29	31
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014	27	29
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279	25	27
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529	24	26
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765	23	24
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989	21	23
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201	20	22
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404	19	21
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598	19	20
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784	18	19
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962	17	18
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133	17	18
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298	16	17
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456	15	16
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609	15	16
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757	14	15
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900	14	15
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038	13	14
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172	13	14
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302	13	13
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428	12	13
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551	12	13
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670	11	12
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786	11	12
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899	11	12
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010	11	11
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117	10	11
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222	10	11
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325	10	11
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425	10	10
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522	9	10
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618	9	10
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712	9	10
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803	9	10
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893	9	9
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981	8	9
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067	8	9
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152	8	9
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235	8	9
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316	8	9
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396	8	8

4 析常用对数表 (2/2)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474	7	8
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551	7	8
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627	7	8
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701	7	8
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774	7	8
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846	7	8
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917	7	8
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987	6	7
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055	6	7
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122	6	7
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189	6	7
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254	6	7
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319	6	7
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382	6	7
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445	6	7
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506	6	7
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567	6	6
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627	6	6
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686	5	6
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745	5	6
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802	5	6
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859	5	6
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915	5	6
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971	5	6
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025	5	6
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079	5	6
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133	5	6
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186	5	6
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238	5	6
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289	5	6
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340	5	6
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390	5	5
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440	5	5
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489	4	5
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538	4	5
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586	4	5
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633	4	5
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680	4	5
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727	4	5
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773	4	5
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818	4	5
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863	4	5
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908	4	5
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952	4	5
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996	4	5

差分の線形近似表

1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3
2	9	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	6	6
3	13	13	12	12	12	11	11	11	11	10	10	10	9
4	17	17	16	16	16	15	15	14	14	14	13	13	12
5	22	21	21	20	20	19	19	18	18	17	17	16	16
6	26	25	25	24	23	23	22	22	21	20	20	19	19
7	30	29	29	28	27	27	26	25	25	24	23	22	22
8	34	34	33	32	31	30	30	29	28	27	26	26	25
9	39	38	37	36	35	34	33	32	32	31	30	29	28
	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31

1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2
2	6	6	6	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4
3	9	9	8	8	8	8	7	7	7	6	6	6	5
4	12	12	11	11	10	10	10	9	9	8	8	8	7
5	15	15	14	14	13	13	12	12	11	11	10	10	9
6	18	17	17	16	16	15	14	14	13	13	12	11	11
7	21	20	20	19	18	18	17	16	15	15	14	13	13
8	24	23	22	22	21	20	19	18	18	17	16	15	14
9	27	26	25	24	23	23	22	21	20	19	18	17	16
	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18

1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
2	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	1
3	5	5	5	5	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2	1
4	7	7	6	6	6	5	5	4	4	4	3	3	2	2	2
5	9	9	8	8	7	7	6	6	5	5	4	4	3	3	2
6	11	10	10	9	8	8	7	7	6	5	5	4	4	3	2
7	13	12	11	11	10	9	8	8	7	6	6	5	4	4	3
8	14	14	13	12	11	10	10	9	8	7	6	6	5	4	3
9	16	15	14	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	5	4
	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4

(17)において  $x = 1$  とおくと右辺は  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  という交代級数となるので収束する. その値は左辺の  $\log 2$  に等しいであろうか? これは例えば以下のようにすれば示される.

$$(1+x)(1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^{n-1}x^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}x^n$$

より,  $x > -1$  ならば

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

この関数の 0 から  $x$  までの定積分より

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x), \\ R_n(x) &= \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt \end{aligned}$$

が得られる. ここで  $x \geq 0$  ならば

$$0 \leq (-1)^n R_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^x t^n dt \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

が成り立つ. 特に  $|R_n(1)| \leq \frac{1}{n+1}$  となる. よって  $n \rightarrow \infty$  として

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \quad (\text{ニュートン・メルカトル級数}) \quad (22)$$

が得られる. ただこれを用いて  $\log 2$  を求めるのは, 収束が遅いので実用的でない.

$\log 2 = -\log \frac{1}{2} = -\log(1 - \frac{1}{2})$  を用いれば, より実用的な  $\log 2$  に収束する級数

$$\log 2 = \frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots \quad (23)$$

が得られ, (21) より次の評価が分かる

$$0 < \log 2 - \left( \frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} \right) < \frac{1}{(n+1)2^n} \quad (24)$$

この方法で  $x \geq 2$  のときも  $\log x$  が計算できるが\*6, より収束の速いものを考えよう.

$n$  を  $2n$  に置き換えて (17) と (16) を足すと

$$\begin{aligned} \log \frac{1+x}{1-x} &= \log(1+x) - \log(1-x) = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) \\ &= 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right) + U_n(x) \end{aligned} \quad (25)$$

となる. ここで

$$U_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2x^{2k+1}}{2k+1} \quad (26)$$

\*6  $\log 2$  の計算では,  $n = 10$  で 4 桁,  $n = 20$  で 7 桁,  $n = 100$  で 32 桁程度の精度. 7 桁の精度を得るには, (22) では 2 項ずつまとめても 1000 項以上必要.

で

$$0 \leq U_n(x) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2|x|^{2k+1}}{2k+1} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2|x|^{2k+1}}{2n+1} = \frac{2|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-|x|^2)} \quad (|x| < 1) \quad (27)$$

を満たす. なお  $\frac{1+x}{1-x} = 1+y$  とすると  $1+x = 1-x+y-xy$  より

$$\frac{1+x}{1-x} = 1+y \Rightarrow x = \frac{y}{2+y} \quad (28)$$

が分かる.

例えば  $\log 2$  の計算では,  $y = 1$  とおくと  $x = \frac{1}{3}$  となるので

$$0 < \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k-1)3^{2k-1}} = U_n\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}}. \quad (29)$$

$n = 3$  では

$$\begin{aligned} |U_3\left(\frac{1}{3}\right)| &< \frac{1}{6804} = 1.46 \cdots \times 10^{-4}, \\ \log 2 &= \frac{2}{1 \cdot 3^1} + \frac{2}{3 \cdot 3^2} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} \\ &= \frac{842}{1215} = 0.69300 \cdots, \\ \log 2 &\in (0.69300, 0.69316) \end{aligned}$$

$n = 4$  では

$$\begin{aligned} |U_4\left(\frac{1}{3}\right)| &< \frac{1}{78732} = 1.27 \cdots \times 10^{-5}, \\ \log 2 &= \frac{2}{1 \cdot 3^1} + \frac{2}{3 \cdot 3^2} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} \\ &= \frac{53056}{76545} = 0.693134 \cdots, \\ \log 2 &\in (0.693134, 0.693148) \end{aligned}$$

$n = 5$  では

$$\begin{aligned} |U_5\left(\frac{1}{3}\right)| &< \frac{1}{866052} = 1.15 \cdots \times 10^{-6}, \\ \log 2 &= \frac{2}{1 \cdot 3^1} + \frac{2}{3 \cdot 3^2} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \frac{2}{9 \cdot 3^9} \\ &= \frac{4297606}{6200145} = 0.69314604 \cdots, \\ \log 2 &\in (0.6931460, 0.6931472) \end{aligned} \quad (30)$$

というように計算できる (実際の値は  $0.69314718 \cdots$ ).

常用対数  $\log_{10} x$  ( $x = 2, 3, 4, \dots, 9$ ) の値を計算してみよう (小数点以下 4 桁程度の精度を念頭に).  $\log 2$  は既に計算したものを使おう.

$\log_{10} x = \frac{\log x}{\log 10}$  であるから,  $\log 10$  をまず計算しよう.  $2^{10} = 1024$  は  $1000 = 10^3$  に近いことより

$$10 \log 2 - 3 \log 10 = \log \frac{1024}{1000} = \log(1 + \frac{24}{1000}),$$

$$\log 10 = \frac{1}{3}(10 \log 2 - \log(1 + \frac{24}{1000}))$$

となり, さらに

$$\log_{10} 2 = \frac{\log 2}{\log 10},$$

$$\log_{10} 3 = \frac{1}{2} \log_{10} 9 = \frac{1}{2}(1 + \log_{10}(1 - \frac{1}{10}))$$

または

$$\log_{10} 3 = \frac{1}{4} \log_{10} 81 = \frac{1}{4}(1 + 3 \log_{10} 2 + \log_{10}(1 + \frac{1}{80})),$$

$$\log_{10} 4 = 2 \log_{10} 2,$$

$$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2,$$

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3,$$

$$\log_{10} 7 = \frac{1}{2} \log_{10} 49 = \frac{1}{2}(2 - \log_{10} 2 + \log_{10}(1 - \frac{1}{50})),$$

$$\log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2,$$

$$\log_{10} 9 = 2 \log_{10} 3$$

であるから,  $\log(1 + \frac{24}{1000})$ ,  $\log(1 + \frac{1}{80})$ ,  $\log(1 - \frac{1}{50})$  を計算すればよい.

$$|R_2(\frac{24}{1024})| < \frac{0.024^3}{3} = 4.608 \times 10^{-6},$$

$$|R_2(\frac{1}{80})| < \frac{1}{3 \cdot 80^3} < 6.52 \times 10^{-7},$$

$$|R_2(-\frac{1}{50})| < \frac{1}{(3 \cdot 50^3)(1 - \frac{1}{50})} < 2.73 \times 10^{-6}$$

より, それぞれ (17) の最初の 2 項を求めれば十分で

$$\log(1 + \frac{24}{1000}) \doteq 0.024 - \frac{0.024^2}{2} = 0.023712,$$

$$\log(1 + \frac{24}{1000}) \in (0.023712, 0.023717),$$

$$\log(1 + \frac{1}{80}) \doteq \frac{1}{80} - \frac{1}{2 \cdot 80^2} = 0.012421875$$

$$\log(1 + \frac{1}{80}) \in (0.012421, 0.012423),$$

$$-\log(1 - \frac{1}{50}) \doteq \frac{1}{50} + \frac{1}{2 \cdot 50^2} = 0.0202$$

$$-\log(1 - \frac{1}{50}) \in (0.020200, 0.020203).$$

$$\frac{1}{3}(0.693146 \cdot 10 - 0.023717) = 2.30258, \quad \frac{1}{3}(0.693148 \cdot 10 - 0.023712) = 2.30259$$

より

$$\log 10 \in (2.30258, 2.30259)$$

が, さらに

$$\frac{0.693146}{2.30259} > 0.301028, \quad \frac{0.693148}{2.30258} < 0.301032$$

より

$$\log_{10} 2 \in (0.301028, 0.301032)$$

が分かる. 他も同様に計算していくと

$$\begin{aligned}\log_{10} 3 &\in (0.477120, 0.477123), \\ \log_{10} 4 &\in (0.602056, 0.602062), \\ \log_{10} 5 &\in (0.698968, 0.698972), \\ \log_{10} 6 &\in (0.778148, 0.778155), \\ \log_{10} 7 &\in (0.845097, 0.845100), \\ \log_{10} 8 &\in (0.903084, 0.903093), \\ \log_{10} 9 &\in (0.954240, 0.954246)\end{aligned}$$

が得られる\*7. 誤差は  $10^{-5}$  以下に収まっていることが分かる

実数の加減乗除が高精度でできるコンピュータがあるとして,  $1 \leq x < 10$  を満たす  $x$  に対して,  $\log_{10} x$  を計算するコンピュータ・プログラムの一例を考えてみよう.

既に述べた方法で, あらかじめ  $\log 2$  と  $\log 10$  は高精度で計算しておく.  $\log x$  が高精度で計算できればよい. 必要なら  $x$  を 2, 4, 8 で割ることにより,  $0.707 \leq t < 1.414$  として,  $\log t$  を求めればよい.  $y = t - 1$ ,  $x = \frac{y}{2+y}$  とおいて  $\log \frac{1+x}{1-x}$  を計算すればよい. このとき  $|x| < 0.172$  となるので  $1/x^2 > 32$  となる. 従って, (25) の級数を  $n$  項まで計算したとして,  $n$  を 2 つ増やす毎に求められる近似値の精度は (10 進法で) 3 桁以上増える.

$\log m$  を  $m = 2, \dots, 10$  に対して正確に用意していたとする.  $\frac{m}{10}$  を掛けることにより,  $1 \leq x < 1.1$  としてよい. 必要ならさらに  $\frac{9}{10}$  を掛けることにより,  $0.945 \leq t < 1.055$  として  $\log t$  を求めればよい. 上と同様な方法で  $\log \frac{1+x}{1-x}$  の級数を使って計算すれば, 項数を 1 つ増やす毎に求められる近似値の精度は 3 桁以上増えることが分かる.

問. 上を示せ.

問. 上のようなやり方で  $\log_{10} x$  を計算するプログラムを作れ.

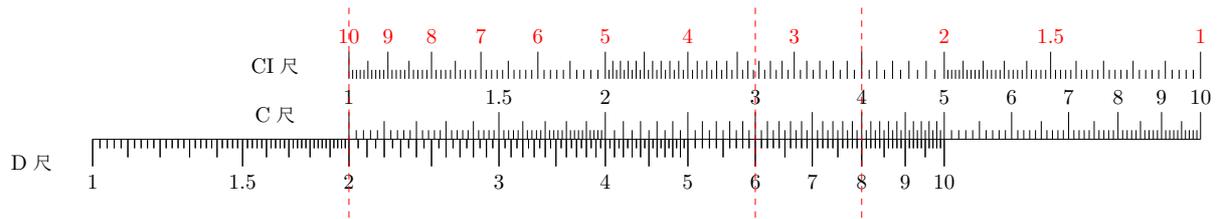
## 1.4 計算尺

数直線上は数字 0, 1, 2, ... にあたる点が等間隔に並んでいる. それとは異なって  $\log_{10} x$  の位置に数字  $x$  の目盛りが降られた定規を考えよう.  $x$  は 1 から 10 まで, 0.1 刻みで目盛りが刻まれているとする. 1 は  $\log_{10} 1 = 0$  の位置に, 10 は 1 の位置に目盛りが描かれ, 2 は  $\log_{10} 2 = 0.3010\dots$  の位置に描かれる. このような定規を 2 つ用意し, C 尺と D 尺いう. D 尺の方は固定し (固定尺という), C 尺は (滑尺という) D 尺に並べてスライドして動かして考える. たとえば 1 の長さは 20cm 程度と想像するとよい.

CI 尺と DI 尺は, それぞれ滑尺, 固定尺の  $1 - \log_{10} x$  の位置に 1 から 10 まで目盛りが描かれている. また滑尺にある A 尺と固定尺にある B 尺は,  $\frac{1}{2} \log_{10} x$  の位置に 1 から 100 までの目盛りが描かれている. また, K 尺は,  $\frac{1}{3} \log_{10} x$  の位置に 1 から 1000 までの目盛りが描かれ, L 尺は  $\frac{x}{10}$  の位置に 0 から 10 まで目盛りが描かれている. また, 横が同じ位置の目盛りを読むために縦の線が引かれた可動のカーソルがある.

掛け算: D 尺の目盛り 2 の位置に C 尺の目盛り 1 をスライドさせると C 尺の目盛り 3 の位置は D 尺では  $\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \log_{10} 6$  の位置に来るので, D 尺の目盛りを読むと 6 となっている. このようにして  $2 \times 3$  の値が, 滑尺をスライドさせ, 目盛りを読むことで得られる. このような仕組みで掛け算が計算できる.

\*7 実際には,  $\log_{10} 2 = 0.30102999\dots$ ,  $\log_{10} 3 = 0.47712125\dots$ ,  $\log_{10} 4 = 0.6020599\dots$ ,  $\log_{10} 5 = 0.69897000\dots$ ,  $\log_{10} 6 = 0.77815125\dots$ ,  $\log_{10} 7 = 0.84509804\dots$ ,  $\log_{10} 8 = 0.90308998\dots$ ,  $\log_{10} 9 = 0.95424250\dots$  である

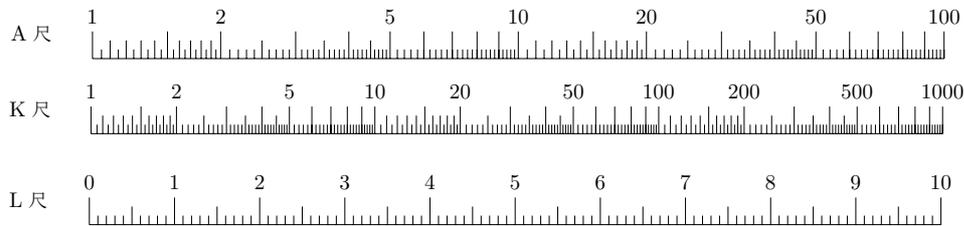


また、D 尺の目盛り 2 の位置に CI 尺の目盛り 3 を合わせると、CI 尺の目盛り 1 の位置で D 尺を読むことによって、積の値 6 が得られる。このとき CI 尺の目盛り 1.5 の位置は D 尺では、 $2 \times 3 \div 1.5$  に、C 尺の目盛り 5 は D 尺では  $2 \times 3 \times 5$  になる。

同様に D 尺の目盛り 8 の位置に CI 尺の 2.5 を合わせ、C 尺の目盛り 3 位置を D 尺で読むと、 $8 \times 2.5 \times 3 = 60$  が分かる。D 尺の目盛り 6 の位置に C 尺の目盛り 3 を合わせて CI 尺の目盛り 2.5 の位置の D 尺を読むと  $6 \div 3 \div 2.5 = 0.8$  が分かる。

カーソルを使って滑尺を動かすことによって、掛け算や割り算の連続計算ができる。

さらに A 尺、B 尺、K 尺を合わせて使うと、上の計算に合わせて、2 乗や平方根を含む計算ができる。



その他、以下のような尺が用いられる。

$$S \text{ 尺} : \log_{10} \frac{\sin x^\circ}{0.1} \quad (5.74^\circ \doteq \sin^{-1} 0.1 \leq x \leq 90^\circ)$$

$$T1 \text{ 尺} : \log_{10} \frac{\tan x^\circ}{0.1} \quad (5.71^\circ \doteq \tan^{-1} 0.1 \leq x \leq 45^\circ)$$

$$T2 \text{ 尺} : \log_{10} \tan x^\circ \quad (45^\circ \leq x \leq \tan^{-1} 10 \doteq 84.3^\circ)$$

$$ST \text{ 尺} : \log_{10} \frac{\pi x}{18} \doteq \log_{10} \frac{\sin x^\circ}{0.01} \quad (34.3' \leq x \leq \frac{18^\circ}{\pi} \doteq 5.73^\circ)$$

$$LLm \text{ 尺} : \log_{10} \frac{\log x}{0.1^{3-m}} \quad \begin{cases} 2.72 \doteq e \leq x \leq e^{10} \doteq 22026 & (m = 3) \\ 1.11 \doteq e^{\frac{1}{10}} \leq x \leq e \doteq 2.72 & (m = 2) \\ 1.01 \doteq e^{\frac{1}{100}} \leq x \leq e^{\frac{1}{10}} \doteq 1.11 & (m = 1) \\ 1.001 \doteq e^{\frac{1}{1000}} \leq x \leq e^{\frac{1}{100}} \doteq 1.01 & (m = 0) \end{cases}$$

$$LL0m \text{ 尺} : \log_{10} \frac{-\log x}{0.1^{3-m}} \quad \begin{cases} 0.368 \doteq e^{-1} \geq x \geq e^{-10} \doteq 4.5 \times 10^{-5} & (m = 3) \\ 0.905 \doteq e^{-\frac{1}{10}} \geq x \geq e^{-1} \doteq 0.368 & (m = 2) \\ 0.990 \doteq e^{-\frac{1}{100}} \geq x \geq e^{-\frac{1}{10}} \doteq 0.905 & (m = 1) \end{cases}$$

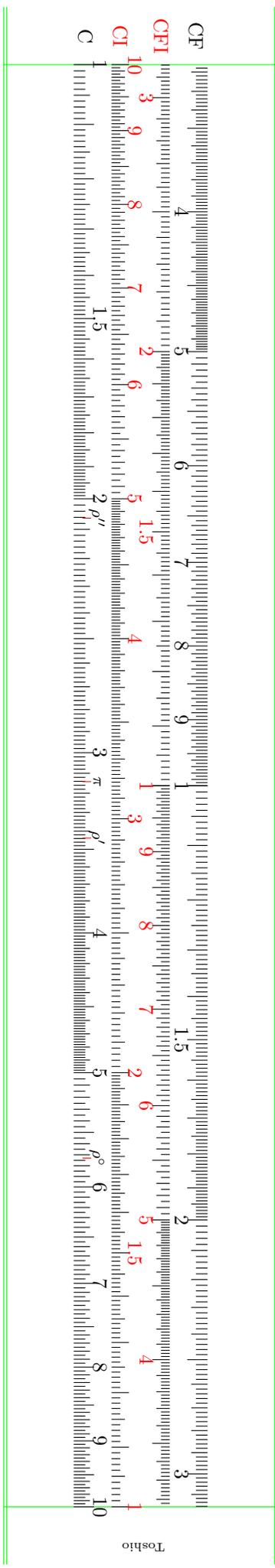
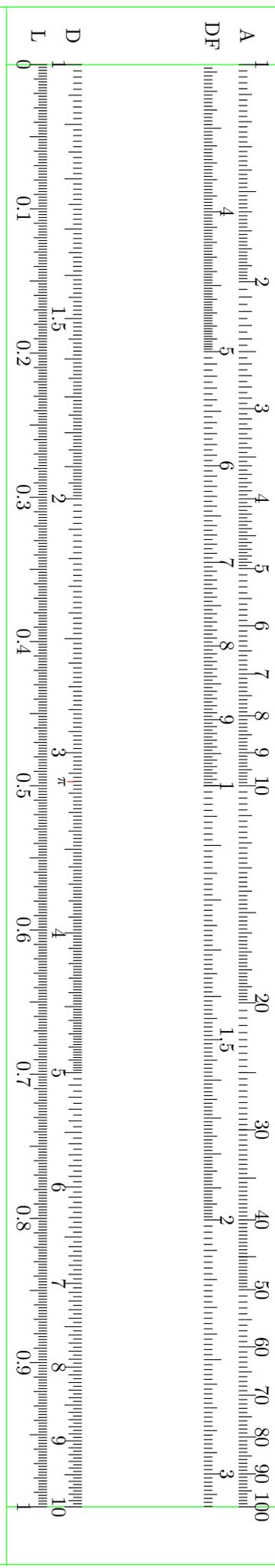
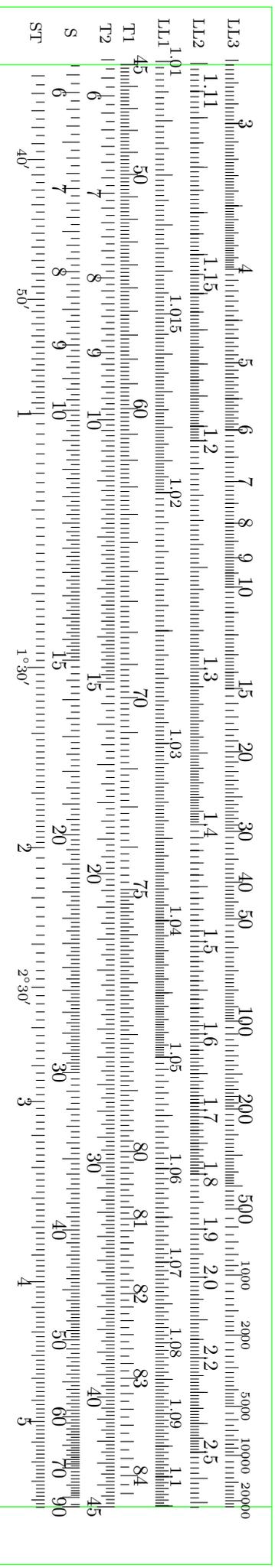
CF 尺, DF 尺, CIF 尺 : C 尺, D 尺, CI 尺を  $\sqrt{10}$  または  $\pi$  だけずらしたもの。

問.  $1.3 \times 8.7 \times 1.4 \times 6.5 \times 1.5$  を計算尺で求めるにはどうすればよいか (滑尺を 2 回動かす)。

問. 上の各種の尺を使って  $\pi \times 3.45^2$ ,  $1.02^{123}$ ,  $\log_{1.02} 123$ ,  $\arctan \frac{123}{456}$  を求めるにはどうすればよいか。

問. ST 尺を使って正弦や正接を求めたときの最大相対誤差はどの程度か?

問.  $1.0003^{2345}$  は上の尺では対応できないので、 $1.003^{234.5}$  とした。相対誤差はどの程度か?





6 桁正弦関数表 (1/2)

	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'		
0°	.000000	.001454	.002909	.004363	.005818	.007272	.008727	.010181	.011635	.013090	.014544	.015998	1454	1455
1°	.017452	.018907	.020361	.021815	.023269	.024723	.026177	.027631	.029085	.030539	.031992	.033446	1453	1455
2°	.034899	.036353	.037806	.039260	.040713	.042166	.043619	.045072	.046525	.047978	.049431	.050883	1452	1454
3°	.052336	.053788	.055241	.056693	.058145	.059597	.061049	.062500	.063952	.065403	.066854	.068306	1450	1453
4°	.069756	.071207	.072658	.074108	.075559	.077009	.078459	.079909	.081359	.082808	.084258	.085707	1449	1451
5°	.087156	.088605	.090053	.091502	.092950	.094398	.095846	.097293	.098741	.100188	.101635	.103082	1446	1449
6°	.104528	.105975	.107421	.108867	.110313	.111758	.113203	.114648	.116093	.117537	.118982	.120426	1443	1447
7°	.121869	.123313	.124756	.126199	.127642	.129084	.130526	.131968	.133410	.134851	.136292	.137733	1440	1444
8°	.139173	.140613	.142053	.143493	.144932	.146371	.147809	.149248	.150686	.152123	.153561	.154998	1436	1440
9°	.156434	.157871	.159307	.160743	.162178	.163613	.165048	.166482	.167916	.169350	.170783	.172216	1432	1437
10°	.173648	.175080	.176512	.177944	.179375	.180805	.182236	.183665	.185095	.186524	.187953	.189381	1428	1432
11°	.190809	.192237	.193664	.195090	.196517	.197942	.199368	.200793	.202218	.203642	.205065	.206489	1423	1428
12°	.207912	.209334	.210756	.212178	.213599	.215019	.216440	.217859	.219279	.220697	.222116	.223534	1417	1422
13°	.224951	.226368	.227784	.229200	.230616	.232031	.233445	.234859	.236273	.237686	.239098	.240510	1412	1417
14°	.241922	.243333	.244743	.246153	.247563	.248972	.250380	.251788	.253195	.254602	.256008	.257414	1405	1411
15°	.258819	.260224	.261628	.263031	.264434	.265837	.267238	.268640	.270040	.271440	.272840	.274239	1398	1405
16°	.275637	.277035	.278432	.279829	.281225	.282620	.284015	.285410	.286803	.288196	.289589	.290981	1391	1398
17°	.292372	.293762	.295152	.296542	.297930	.299318	.300706	.302093	.303479	.304864	.306249	.307633	1384	1390
18°	.309017	.310400	.311782	.313164	.314545	.315925	.317305	.318684	.320062	.321439	.322816	.324193	1375	1383
19°	.325568	.326943	.328317	.329691	.331063	.332435	.333807	.335178	.336547	.337917	.339285	.340653	1367	1375
20°	.342020	.343387	.344752	.346117	.347481	.348845	.350207	.351569	.352931	.354291	.355651	.357010	1358	1367
21°	.358368	.359725	.361082	.362438	.363793	.365148	.366501	.367854	.369206	.370557	.371908	.373258	1349	1357
22°	.374607	.375955	.377302	.378649	.379994	.381339	.382683	.384027	.385369	.386711	.388052	.389392	1339	1348
23°	.390731	.392070	.393407	.394744	.396080	.397415	.398749	.400082	.401415	.402747	.404078	.405408	1329	1339
24°	.406737	.408065	.409392	.410719	.412045	.413369	.414693	.416016	.417338	.418660	.419980	.421300	1318	1328
25°	.422618	.423936	.425253	.426569	.427884	.429198	.430511	.431823	.433135	.434445	.435755	.437063	1308	1318
26°	.438371	.439678	.440984	.442289	.443593	.444896	.446198	.447499	.448799	.450098	.451397	.452694	1296	1307
27°	.453990	.455286	.456580	.457874	.459166	.460458	.461749	.463038	.464327	.465615	.466901	.468187	1285	1296
28°	.469472	.470755	.472038	.473320	.474600	.475880	.477159	.478436	.479713	.480989	.482263	.483537	1273	1283
29°	.484810	.486081	.487352	.488621	.489890	.491157	.492424	.493689	.494953	.496217	.497479	.498740	1260	1271
30°	.500000	.501259	.502517	.503774	.505030	.506285	.507538	.508791	.510043	.511293	.512543	.513791	1247	1259
31°	.515038	.516284	.517529	.518773	.520016	.521258	.522499	.523738	.524977	.526214	.527450	.528685	1234	1246
32°	.529919	.531152	.532384	.533615	.534844	.536072	.537300	.538526	.539751	.540974	.542197	.543419	1220	1233
33°	.544639	.545858	.547076	.548293	.549509	.550724	.551937	.553149	.554360	.555570	.556779	.557987	1206	1219
34°	.559193	.560398	.561602	.562805	.564007	.565207	.566406	.567604	.568801	.569997	.571191	.572384	1192	1205
35°	.573576	.574767	.575957	.577145	.578332	.579518	.580703	.581886	.583069	.584250	.585429	.586608	1177	1191
36°	.587785	.588961	.590136	.591310	.592482	.593653	.594823	.595991	.597159	.598325	.599489	.600653	1162	1176
37°	.601815	.602976	.604136	.605294	.606451	.607607	.608761	.609915	.611067	.612217	.613367	.614515	1146	1161
38°	.615661	.616807	.617951	.619094	.620235	.621376	.622515	.623652	.624789	.625923	.627057	.628189	1131	1146
39°	.629320	.630450	.631578	.632705	.633831	.634955	.636078	.637200	.638320	.639439	.640557	.641673	1115	1130
40°	.642788	.643901	.645013	.646124	.647233	.648341	.649448	.650553	.651657	.652760	.653861	.654961	1098	1113
41°	.656059	.657156	.658252	.659346	.660439	.661530	.662620	.663709	.664796	.665882	.666966	.668049	1082	1097
42°	.669131	.670211	.671289	.672367	.673443	.674517	.675590	.676662	.677732	.678801	.679868	.680934	1064	1080
43°	.681998	.683061	.684123	.685183	.686242	.687299	.688355	.689409	.690462	.691513	.692563	.693611	1047	1063
44°	.694658	.695704	.696748	.697790	.698832	.699871	.700909	.701946	.702981	.704015	.705047	.706078	1029	1046

6 桁正弦関数表 (2/2)

	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'		
45°	.707107	.708134	.709161	.710185	.711209	.712230	.713250	.714269	.715286	.716302	.717316	.718329	1011	1027
46°	.719340	.720349	.721357	.722364	.723369	.724372	.725374	.726375	.727374	.728371	.729367	.730361	993	1009
47°	.731354	.732345	.733334	.734323	.735309	.736294	.737277	.738259	.739239	.740218	.741195	.742171	974	991
48°	.743145	.744117	.745088	.746057	.747025	.747991	.748956	.749919	.750880	.751840	.752798	.753755	955	972
49°	.754710	.755663	.756615	.757565	.758514	.759461	.760406	.761350	.762292	.763232	.764171	.765109	935	953
50°	.766044	.766979	.767911	.768842	.769771	.770699	.771625	.772549	.773472	.774393	.775312	.776230	916	935
51°	.777146	.778060	.778973	.779884	.780794	.781702	.782608	.783513	.784416	.785317	.786217	.787114	897	914
52°	.788011	.788905	.789798	.790690	.791579	.792467	.793353	.794238	.795121	.796002	.796882	.797759	877	894
53°	.798636	.799510	.800383	.801254	.802123	.802991	.803857	.804721	.805584	.806445	.807304	.808161	856	874
54°	.809017	.809871	.810723	.811574	.812423	.813270	.814116	.814959	.815801	.816642	.817480	.818317	835	854
55°	.819152	.819985	.820817	.821647	.822475	.823302	.824126	.824949	.825770	.826590	.827407	.828223	815	833
56°	.829038	.829850	.830661	.831470	.832277	.833082	.833886	.834688	.835488	.836286	.837083	.837878	793	812
57°	.838671	.839462	.840251	.841039	.841825	.842609	.843391	.844172	.844951	.845728	.846503	.847276	772	791
58°	.848048	.848818	.849586	.850352	.851117	.851879	.852640	.853399	.854156	.854912	.855665	.856417	750	770
59°	.857167	.857915	.858662	.859406	.860149	.860890	.861629	.862366	.863102	.863836	.864567	.865297	728	748
60°	.866025	.866752	.867476	.868199	.868920	.869639	.870356	.871071	.871784	.872496	.873206	.873914	706	727
61°	.874620	.875324	.876026	.876727	.877425	.878122	.878817	.879510	.880201	.880891	.881578	.882264	684	704
62°	.882948	.883629	.884309	.884988	.885664	.886338	.887011	.887681	.888350	.889017	.889682	.890345	662	681
63°	.891007	.891666	.892323	.892979	.893633	.894284	.894934	.895582	.896229	.896873	.897515	.898156	638	659
64°	.898794	.899431	.900065	.900698	.901329	.901958	.902585	.903210	.903834	.904455	.905075	.905692	616	637
65°	.906308	.906922	.907533	.908143	.908751	.909357	.909961	.910563	.911164	.911762	.912358	.912953	592	614
66°	.913545	.914136	.914725	.915311	.915896	.916479	.917060	.917639	.918216	.918791	.919364	.919936	569	591
67°	.920505	.921072	.921638	.922201	.922762	.923322	.923880	.924435	.924989	.925541	.926090	.926638	546	567
68°	.927184	.927728	.928270	.928810	.929348	.929884	.930418	.930950	.931480	.932008	.932534	.933058	522	544
69°	.933580	.934101	.934619	.935135	.935650	.936162	.936672	.937181	.937687	.938191	.938694	.939194	499	521
70°	.939693	.940189	.940684	.941176	.941666	.942155	.942641	.943126	.943609	.944089	.944568	.945044	475	496
71°	.945519	.945991	.946462	.946930	.947397	.947861	.948324	.948784	.949243	.949699	.950154	.950606	451	472
72°	.951057	.951505	.951951	.952396	.952838	.953279	.953717	.954153	.954588	.955020	.955450	.955879	426	448
73°	.956305	.956729	.957151	.957571	.957990	.958406	.958820	.959232	.959642	.960050	.960456	.960860	402	424
74°	.961262	.961662	.962059	.962455	.962849	.963241	.963630	.964018	.964404	.964787	.965169	.965548	378	400
75°	.965926	.966301	.966675	.967046	.967415	.967782	.968148	.968511	.968872	.969231	.969588	.969943	353	375
76°	.970296	.970647	.970995	.971342	.971687	.972029	.972370	.972708	.973045	.973379	.973712	.974042	328	351
77°	.974370	.974696	.975020	.975342	.975662	.975980	.976296	.976610	.976921	.977231	.977539	.977844	304	326
78°	.978148	.978449	.978748	.979045	.979341	.979634	.979925	.980214	.980500	.980785	.981068	.981349	278	301
79°	.981627	.981904	.982178	.982450	.982721	.982989	.983255	.983519	.983781	.984041	.984298	.984554	254	277
80°	.984808	.985059	.985309	.985556	.985801	.986045	.986286	.986525	.986762	.986996	.987229	.987460	228	251
81°	.987688	.987915	.988139	.988362	.988582	.988800	.989016	.989230	.989442	.989651	.989859	.990065	203	227
82°	.990268	.990469	.990669	.990866	.991061	.991254	.991445	.991634	.991820	.992005	.992187	.992368	178	201
83°	.992546	.992722	.992896	.993068	.993238	.993406	.993572	.993735	.993897	.994056	.994214	.994369	153	176
84°	.994522	.994673	.994822	.994969	.995113	.995256	.995396	.995535	.995671	.995805	.995937	.996067	128	151
85°	.996195	.996320	.996444	.996566	.996685	.996802	.996917	.997030	.997141	.997250	.997357	.997462	102	125
86°	.997564	.997664	.997763	.997859	.997953	.998045	.998135	.998223	.998308	.998392	.998473	.998552	78	100
87°	.998630	.998705	.998778	.998848	.998917	.998984	.999048	.999111	.999171	.999229	.999285	.999339	52	75
88°	.999391	.999441	.999488	.999534	.999577	.999618	.999657	.999694	.999729	.999762	.999793	.999821	27	50
89°	.999848	.999872	.999894	.999914	.999932	.999948	.999962	.999974	.999983	.999990	.999996	.999999	1	24

## 1.5 三角関数表

5' 刻みの三角関数表を考えてみよう.

5' は  $\frac{\pi}{180} \times \frac{5}{60} = \frac{\pi}{2160}$  ラジアンであるから, 正弦関数  $\sin x$  を線形近似した場合の誤差は

$$\frac{1}{8} \times \left( \frac{\pi}{2160} \right)^2 = 2.64 \dots \times 10^{-7}$$

以下となるので, 線形近似を行っても, 小数点以下 6 桁程度は正しい.

1° 刻みの場合では

$$\frac{1}{8} \times \left( \frac{\pi}{180} \right)^2 = 3.80 \dots \times 10^{-5}$$

であるから, 4 桁程度は正しい.

4 桁正弦関数表

	+0°	+1°	+2°	+3°	+4°	+5°	+6°	+7°	+8°	+9°
0°	.0000	.0175	.0349	.0523	.0698	.0872	.1045	.1219	.1392	.1564
10°	.1736	.1908	.2079	.2250	.2419	.2588	.2756	.2924	.3090	.3256
20°	.3420	.3584	.3746	.3907	.4067	.4226	.4384	.4540	.4695	.4848
30°	.5000	.5150	.5299	.5446	.5592	.5736	.5878	.6018	.6157	.6293
40°	.6428	.6561	.6691	.6820	.6947	.7071	.7193	.7314	.7431	.7547
50°	.7660	.7771	.7880	.7986	.8090	.8192	.8290	.8387	.8480	.8572
60°	.8660	.8746	.8829	.8910	.8988	.9063	.9135	.9205	.9272	.9336
70°	.9397	.9455	.9511	.9563	.9613	.9659	.9703	.9744	.9781	.9816
80°	.9848	.9877	.9903	.9925	.9945	.9962	.9976	.9986	.9994	.9998

三角関数の和公式

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x$$

より

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y))$$

が得られる. この関係式と三角関数表を用いて, 数の積を求めてみよう.

$34.56 \times 7.654$  を考えてみる. これは  $0.3456 \times 0.7654 \times 10^3$  と考えて,  $\sin x = 0.3456$ ,  $\cos y = 0.7654$  となる角度  $x, y$  を 6 桁正弦表から求めてみる.

$$x = 20^\circ 10' + 5' \times \frac{5600 - 4752}{1365} = 20^\circ 13.11' = 20^\circ 13' 7'',$$

$$90^\circ - y = 49^\circ 55' + 5' \times \frac{400 - 109}{935} = 49^\circ 56.56' = 49^\circ 56' 33''$$

実際の正確な値は,  $x = 20^\circ 13.10557 \dots'$ ,  $90^\circ - y = 49^\circ 56.55545 \dots'$  であるので, 6 桁程度の精度があることが分かる.

$$x - y = -19^\circ 50.33', \sin 19^\circ 50.33' = 0.339285 + \frac{0.33}{5} \times 0.001368 = 0.339376$$

$$x + y = 60^\circ 16.55', \sin 60^\circ 16.55' = 0.868199 + \frac{1.55}{5} \times 0.000721 = 0.868423$$

$$\frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y)) = \frac{1}{2} (0.868423 - 0.339376) = 0.264523.$$

実際は、 $0.3456 \times 0.7654 = 0.26452224$  であるが、三角関数表を用いて上のように積の近似値が計算できる。常用対数表が用いられる以前には、数の積の近似値の計算に、三角関数表が用いることがあった。

有効数字の桁が大きくなると線形近似の部分の計算がより複雑になるが、4桁程度ならば実用になるであろう。逆三角関数の数表も用意しておくとう便利である。

## 1.6 円周率の計算

### 1.6.1 単位円に内接・外接する正多角形

半径1の円の円周の長さは $2\pi$ である。この単位円に内接する正六角形の一辺の長さは1であるから、周の長さは6である。これは単位円周の長さより短いから、 $\pi > 3$ である。一方、外接する正六角形の一辺の長さは $\frac{2}{\sqrt{3}}$ であるから、その周の長さは $4\sqrt{3}$ で、これは円周の長さより長いので $\pi < 2\sqrt{3}$ となる。よって

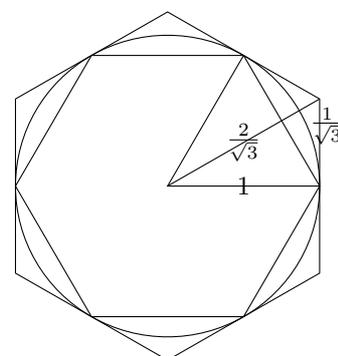
$$3 < \pi < 2\sqrt{3} = 3.46410\dots$$

が分かる。

単位円に内接する正 $n$ 角形の周の長さの半分を $l_n$ 、外接する正 $n$ 角形の周の長さの半分を $L_n$ とおくと、 $l_n = n \sin \frac{\pi}{n}$ 、 $L_n = n \tan \frac{\pi}{n}$ となる。

$n$ を大きくしていけば、 $l_n$ は単調に増加して、また $L_n$ は単調に減少して $\pi$ に近づいていく。

$l_n$ と $L_n$ が分かっているとして、 $l_{2n}$ と $L_{2n}$ を求めてみよう。



$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\sin^2 2\theta = 4 \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta),$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \sin^2 2\theta} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 2\theta}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\theta}},$$

$$\sin \theta = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 - \sin^2 2\theta}}},$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta},$$

$$\tan \theta = \frac{1 - \sqrt{1 + \tan^2 2\theta}}{\tan 2\theta} = \frac{\tan 2\theta}{1 + \sqrt{1 + \tan^2 2\theta}}$$

となるので

$$l_{2n} = \frac{l_n}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{l_n^2}{n^2}}}}, \quad L_{2n} = \frac{L_{2n}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{L_n^2}{n^2}}}.$$

$n = 6, 12, 24, 48, \dots$  と順に計算していくと\*8

	6	12	24	48	96	192	384
$l_n$	3	3.105...	3.132...	3.139...	3.1410...	3.14145...	3.14155...
$L_n$	3.46...	3.215...	3.159...	3.146...	3.1427...	3.14187...	3.14166...

\*8 ギリシャ時代には、正96角形を使って円周率が約3.14であることが知られていた。

### 1.6.2 マチンの公式

$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$  であるから  $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$  となり

$$\begin{aligned} \arctan' x &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \cdots, \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \end{aligned} \quad (31)$$

となって、特に  $x = 1$  とすると、 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$  であるから以下が得られる

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad (\text{グレゴリー・ライプニッツ級数}). \quad (32)$$

$\tan \frac{\pi}{4} = 1$  より、前ページの計算から  $\tan \frac{\pi}{8} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 = 0.4142 \cdots$ .  $\tan \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = 0.1989 \cdots$  となって、これは  $\frac{1}{5}$  に近い。そこで  $a = \arctan \frac{1}{5}$  とおくと  $4a$  は  $\frac{\pi}{4}$  に近いが若干それより大きいことがわかる。 $\tan a = \frac{1}{5}$  であるから

$$\tan 2a = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{5}{12}, \quad \tan 4a = \frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \frac{5^2}{12^2}} = \frac{120}{119}.$$

よって  $4a - \frac{\pi}{4}$  はかなり小さい。実際

$$\tan(4a - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan(4a) - 1}{1 + \tan(4a)} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$  であるから

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239} = 16 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)5^{2k+1}} - 4 \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(2k+1)239^{2k+1}} \quad (33)$$

となって、 $\pi$  への収束が早い級数が得られる (マチンの公式 1706 年)\*<sup>9</sup>.  $n = 3m+2$  とおいて、 $m = 0, 1, 2, \dots$  とした上の右辺の値を計算すると

$$\begin{aligned} m = 0: & \quad \underline{3.14162} \cdots \\ m = 1: & \quad \underline{3.1415926526} \cdots \\ m = 2: & \quad \underline{3.14159265358983} \cdots \\ m = 3: & \quad \underline{3.1415926535897932363} \cdots \\ m = 4: & \quad \underline{3.14159265358979323846275} \cdots \\ m = 5: & \quad \underline{3.141592653589793238462643377} \cdots \end{aligned}$$

### 1.6.3 $\sin x$ のマクローリン展開

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$  であり、これは  $0 < x < 1$  のとき交代級数となっている。このことから

$$\begin{aligned} s_n(x) &:= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ s_{2k-1}(x) &< \sin x < s_{2m}(x) \quad (x > 0) \end{aligned} \quad (34)$$

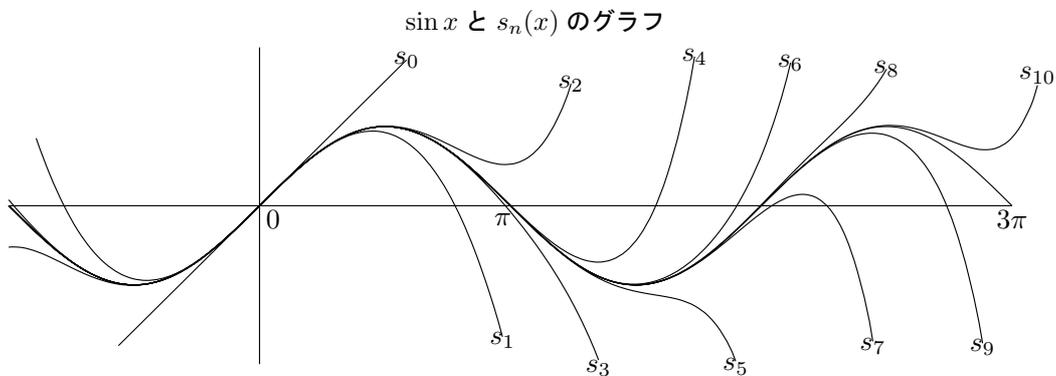
\*<sup>9</sup> マチンの公式に類する関係式は沢山知られている。たとえば  $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$ .

となっている (たとえば, (12), (13) から分かる). また  $s_n(x)$  は  $0 \leq x \leq 1$  では単調増加である.  $\sin \frac{\pi}{6} = 0.5$  であるから

$$a, b \in (0, 1) \text{ が } s_{2k}(a) \leq \frac{1}{2}, s_{2m-1}(b) \geq \frac{1}{2} \text{ を満たすなら } 6a < \pi < 6b$$

が分かる.  $s_0(x) = x$  なので  $s_0(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ , よって  $\pi > 3$ .  $s_1(3.144/6) - 0.5 = 3.144/6 - (3.144/6)^3/6 - 0.5 = 2.0 \dots \times 10^{-5}$  より  $\pi < 3.144$ ,  $s_2(3.14157/6) < 0.5$  より  $\pi > 3.14157$  など続けると同様に以下が分かる.

	$x : s_{2m}(\frac{x}{6}) \leq 0$	$x : s_{2m+1}(\frac{x}{6}) \geq 0$
$m = 0$	3	3.144
$m = 1$	3.14157	3.1415928
$m = 2$	3.1415926534	3.14159265359
$m = 3$	3.141592653589792	3.141592653589793239



問. (34) を示せ.

#### 1.6.4 算術幾何平均

$n = 0, 1, 2, \dots$  に対して以下のように定義すると,  $\pi$  に収束する数列が得られることが知られている\*10.

$$\pi_n = \frac{2a_{n+1}^2}{1 - \sum_{k=0}^n 2^k c_k^2}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, & a_0 = 1, \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, & b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}, & c_0 = \sqrt{a_0^2 - b_0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad (35)$$

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n.$$

上記方法による  $\pi$  の計算は,

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 2.9142135623730950488016887242096980 \dots, \\ \pi_1 &= 3.1405792505221682483113312689758233 \dots, \\ \pi_2 &= 3.1415926462135422821493444319826957 \dots, \\ \pi_3 &= 3.1415926535897932382795127748018639 \dots, \\ \pi_4 &= 3.1415926535897932384626433832795028 \dots \end{aligned}$$

\*10 実数  $a_0, b_0$  ( $a_0 \geq b_0$ ) を与えたとき,  $a_n, b_n$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき急速にある値  $M(a, b)$  に収束するが, それを  $a$  と  $b$  の算術幾何平均という. このとき  $\frac{\pi}{M(a, b)}$  は完全楕円積分  $I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}$  に等しい.  $I(a, b) = I(a_n, b_n)$  となるので,  $I(a, b)$  の計算に有効.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = \pi$  は, このことと完全楕円積分についてのルジャンドルの関係式から得られる.

のように極めて急速に収束し（上の  $\pi_4$  の表示された部分は  $\pi$  と一致）、誤差が  $10^{-m}$  以下となる最大の整数  $m$  を  $n = 1$  の場合から順に書くと

$$2, 8, 18, 40, 83, 170, 344, 694, \dots$$

となる（例えば  $\pi_8$  の誤差は、 $10^{-694}$  以下となる）。実際、有効桁数が、各ステップでほぼ倍増されている。

上記計算は、有理数の範囲では済まず  $\sqrt{a_n b_n}$  を計算する必要があるが、1000 桁の精度を得るには、 $\pi_9$  の計算で十分であり、よって  $\pi_{19}$  は  $10^6$  桁以上、 $\pi_{29}$  は 1 億桁以上の精度の  $\pi$  の近似値である。一方マチンの公式を用いる方法で 1000 桁の精度を得るには、 $\arctan x$  の Taylor 展開を、 $x = \frac{1}{5}$  については、 $x^{1441}$  の項程度まで 700 項以上、 $x = \frac{1}{239}$  については  $x^{425}$  の項程度まで 200 項以上を計算する必要がある。

## 1.7 ホイヘンスの近似

**定理.** 半径  $R$  の円の長さ  $L$  の円弧を考える。その円弧に対する弦の長さを  $a$ 、その円で半分の長さ  $\frac{L}{2}$  の弦の長さを  $b$  とすると、 $L$  の近似値  $\tilde{L}$  が

$$\tilde{L} = \frac{8b - a}{3}$$

で与えられる（ホイヘンスの近似<sup>\*11</sup>）。実際、長さ  $L$  の円弧の中心角が  $\frac{\pi}{2}$  以下ならば、相対誤差が  $\frac{1}{1000}$  以下となる。すなわち

$$\left| \frac{\tilde{L}}{L} - 1 \right| < \frac{1}{1000}.$$

**証明.**  $\phi = \frac{L}{R}$  とおくと

$$\begin{aligned} a &= 2R \sin \frac{\phi}{2}, & b &= 2R \sin \frac{\phi}{4}, \\ \frac{\tilde{L}}{L} - 1 &= \frac{8b}{3L} - \frac{a}{3L} - 1 = \frac{16}{3\phi} \sin \frac{\phi}{4} - \frac{2}{3\phi} \sin \frac{\phi}{2} - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{\cos \theta x}{120}x^5 \quad (0 < \exists \theta < 1)$$

を用いると ( $8 \sin \frac{\pi}{2} - \sin x = 3x + o(x^4)$  に注意しよう)

$$\frac{\tilde{L}}{L} - 1 = \frac{16}{3} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6.4} \left( \frac{\phi}{4} \right)^2 + o(\phi^3) \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6.2} \left( \frac{\phi}{2} \right)^2 + o(\phi^3) \right) - 1 = o(\phi^3).$$

よって 5 階微分で表せる剰余項から

$$\frac{\tilde{L}}{L} - 1 = \frac{16}{3} \cdot \frac{\cos \theta_1 \frac{\phi}{4}}{120 \cdot 4} \left( \frac{\phi}{4} \right)^4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\cos \theta_2 \frac{\phi}{2}}{120 \cdot 2} \left( \frac{\phi}{2} \right)^4 = -\frac{\phi^4}{3 \cdot 120 \cdot 2^4} (\cos \theta_2 \frac{\phi}{2} - \frac{1}{4} \cos \theta_1 \frac{\phi}{4})$$

となる 1 以下の正数  $\theta_1, \theta_2$  がある。

$0 < \phi < \frac{\pi}{2} < 1.6$  に注意すると、 $0 < \psi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 > \cos \psi > 1 - \frac{1}{2}\psi^2$  であるから

$$1 > \cos \theta_2 \frac{\phi}{2} > \cos \frac{\pi}{4} = 0.70 \dots > \frac{1}{4} \cos \theta_1 \frac{\phi}{4} > \frac{1}{4} \cos 0.4 > \frac{1}{4} (1 - \frac{1}{2} \cdot 0.4^2) = 0.23$$

よって

$$\left| \frac{\tilde{L}}{L} - 1 \right| < \frac{1.6^4}{360 \cdot 2^4} (1 - 0.23) = 0.000876 \dots < \frac{1}{1000}.$$

<sup>\*11</sup> 波の伝播に関するホイヘンスの原理などで知られるオランダのホイヘンスが 1654 年に発表した。

## 1.8 地球の大きさ

地球は完全な球体であって、その赤道の長さはぴったり 40,000km であると仮定する。赤道は平坦で起伏がないとする。その赤道の周りにロープをぴったり張ると、その長さは 40,000km となる。(ロープの太さは無視する)。このとき以下の 3 つの問題に答えよ。

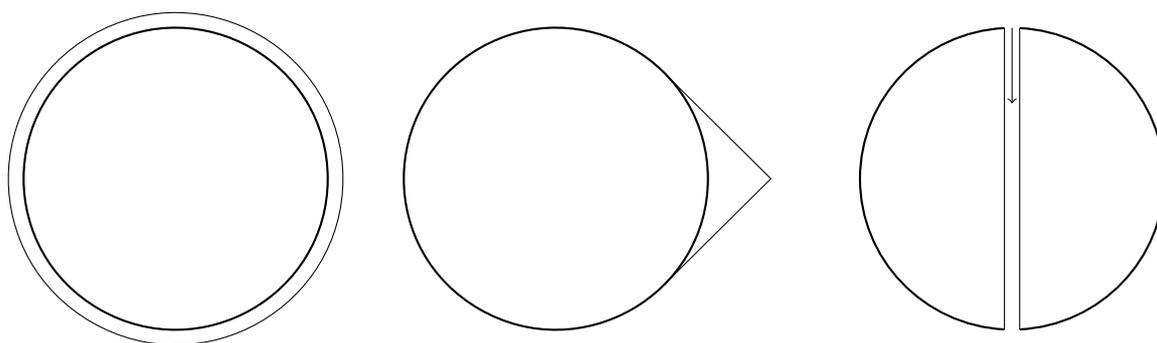
1. このロープを 1m 伸ばしたロープの輪を赤道の周りに地球上様な幅が空くように配置したとすると、このロープは赤道から程度離れるか(上になるか)?

適当な近似計算で求めよ。またその近似の相対誤差を評価せよ。

2. 1m 伸ばしたロープの輪の一点を引っ張って、その点が地球から最も離れるようにする。その点は何の程度赤道から離れるか(上になるか)?

3. 地表から地球の中心に向かって穴を掘り、そのまま真っ直ぐ地球の裏側まで掘り進んだとする。地表からその穴にりんごが落ちたとき、裏側に到達するのにかかる時間はどの程度か?

地表での重力加速度は、 $9.8 \text{ m/s}^2$  とする。地球の内部は等質で等密度とし、地球の自転などは無視する。このとき、地中での地球の引力は、地球の中心からの距離に比例する。



### 問題の解答

地球の半径を  $R\text{m}$  とする。ロープを  $r\text{m}$  伸ばしたとする。

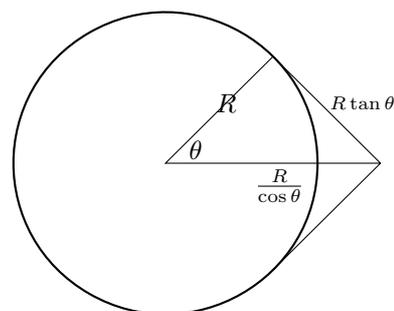
赤道の長さは  $4 \times 10^4 \times 10^3 \text{ m} = 4 \times 10^7 \text{ m}$  であるから半径は  $\frac{4 \times 10^7}{2\pi} \text{ m} = \frac{2 \times 10^7}{\pi} \text{ m}$

1. 赤道の長さは  $2\pi R\text{m}$  で、地球の半径より  $H\text{m}$  大きい円周の長さは  $2\pi(R + H)\text{m}$  であるから、 $r = 2\pi(R + H) - 2\pi R = 2\pi H$  より  $H = \frac{r}{2\pi} \approx 0.16$ 。よって約 16cm

2. 中心角  $2\theta$  の赤道がロープから離れたとする。

$2R(\tan \theta - \theta) = r$  であって、求める高さ  $H$  は  $H = R(\frac{1}{\cos \theta} - 1)$  となる。 $\frac{r}{R}$  はとても小さいので、 $\theta$  も同様である。このとき

$$\begin{aligned} \tan \theta - \theta &= \frac{\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \dots}{1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \dots} - \theta \\ &= \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{6})\theta^3 - (\frac{1}{24} - \frac{1}{120})\theta^5 + \dots}{1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \dots} \\ &= \frac{1}{3}\theta^3 + (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{30})\theta^5 + \dots \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \dots \doteq \frac{\theta^3}{3}, \\
\frac{1}{\cos\theta} - 1 &= \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} + \dots\right) + \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24} + \dots\right)^2 + \dots \\
&= \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{5}{24}\theta^4 + \dots \doteq \frac{\theta^2}{2}
\end{aligned}$$

であるから

$$\theta \doteq \left(\frac{3r}{2R}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad H \doteq \frac{R\theta^2}{2} \doteq \frac{R}{2} \left(\frac{3r}{2R}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{R}}{2} \left(\frac{3r}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

となって, m 単位では,  $R = 4 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \cdot (2\pi)^{-1} = \frac{2}{\pi} \cdot 10^7$  であるから\*12

$$H \doteq \frac{1}{\pi} \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{3\pi}{4} \cdot 10^{-7}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{10}{\pi} \left(\frac{300\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \doteq 121.4295 \dots$$

すなわち, 約 121.43m.

この近似による計算を評価してみよう.

$$y := \tan\theta - \theta = \frac{r}{2R} \doteq 7.85 \dots \times 10^{-8}, \quad \theta \doteq 0.00617 \dots \text{ ととても小さい.}$$

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \tan^2 x + 1, \\
(\tan x)'' &= 2 \tan x (\tan^2 x + 1) = 2 \tan^3 x + 2 \tan x, \\
(\tan x)''' &= 6 \tan^4 x + 8 \tan^2 x + 2, \\
(\tan x)^{(4)} &= 24 \tan^5 x + 40 \tan^3 x + 16 \tan x, \\
(\tan x)^{(5)} &= 120 \tan^6 x + 240 \tan^4 x + 136 \tan^2 x + 16, \\
\left(\frac{1}{\cos x}\right)' &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{-1} \tan x, \\
\left(\frac{1}{\cos x}\right)'' &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{-1} (3 \tan^2 x + 1), \\
\left(\frac{1}{\cos x}\right)''' &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{-1} (6 \sin^3 x + 5 \tan x), \\
\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{(4)} &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{-1} (24 \tan^4 x + 28 \tan^2 x + 5)
\end{aligned}$$

より

$$0 < \tan x < 10^{-2}, \quad 0 < x < 10^{-2}$$

とすると,  $1 < \frac{1}{\cos x} < \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} < 1 + 10^{-4}$  であるから  $16 < (\tan x)^{(5)} < 17$ ,  $5 < \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{(4)} < 6$  が分かるので

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{3} < \tan x - x < \frac{x^3}{3} + \frac{17}{120}x^5 < \frac{x^3}{3} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right), \\
\frac{x^2}{2} < \frac{1}{\cos x} - 1 < \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = \frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

$\theta_0 := \left(\frac{3r}{2R}\right)^{1/3} = 0.00617 \dots$  に注意すると

$$(1 - 10^{-5})^3 \cdot \left(1 + \frac{\theta_0^2}{2}\right) < 1$$

となるが,  $\tan x - x$  は  $0 < x < 10^{-2}$  のとき単調増加であるので

$$(1 - 10^{-5}) \cdot \theta_0 < \theta < \theta_0$$

---

\*12 なお, 正しい値は約 121.43019... m.

が分かる.

$(1 - 10^{-5})^2 > 1 - 2 \times 10^{-5}$ ,  $\frac{\theta_0^2}{2} < 2 \times 10^{-5}$  より近似で求めた値の相対誤差は  $2 \times 10^{-5}$  以下であることが分かる.

**注意.**  $\frac{\tan \theta - \theta}{\tan \theta} \doteq \frac{1}{3} \theta^2 \doteq 1.3 \times 10^{-5}$  となるので,  $\tan x$  を  $10^{-8}$  程度の相対誤差で求められる関数電卓で  $\tan x - x$  を計算したとしても,  $\theta$  近辺での相対誤差は  $10^{-3}$  程度になってしまう.

**3.** 地球の中心を原点, 地表の穴のある地点を  $R$  とする数直線を考える. 落下するリングの  $t$  秒後の位置を  $x(t)$  とおく. このときのリングの加速度は  $-9.8 \times \frac{x(t)}{R}$  となるので微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{9.8}{R} x$$

が成り立つ. 初期条件  $x(0) = R$ ,  $x'(0) = 0$  を満たす解は  $x(t) = R \cos \sqrt{\frac{9.8}{R}} t$  となる. よって求める時間は

$$\begin{aligned} \frac{\pi \sqrt{R}}{\sqrt{9.8}} \text{ sec} &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 10^7}}{\sqrt{9.8}} \text{ sec} = \sqrt{\frac{20\pi}{9.8}} \cdot 10^3 \text{ sec} = \sqrt{\frac{200\pi}{9.8 \times 3.6}} \cdot 10 \text{ min} \\ &\doteq 42.2 \text{ min.} \end{aligned}$$

一般に  $c > 0$  に対して

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -c^2 x$$

という微分方程式を考察してみよう (これを満たす  $t$  の関数  $x(t)$  を考える).

$$x_{\pm}(t) = cx(t) \mp ix'(t)$$

とおくと

$$x'_{\pm}(t) = cx'(t) \mp ix''(t) = cx'(t) \pm c^2 ix(t) = \pm ci(cx(t) \mp ix'(t)) = \pm cix_{\pm}(t)$$

となるので, さらに

$$y_{\pm}(t) = (\cos ct \mp i \sin ct)x_{\pm}(t)$$

とおくと

$$y'_{\pm}(t) = c(-\sin ct \mp i \cos ct)x_{\pm}(t) \pm ci(\cos ct \mp i \sin ct)x_{\pm}(t) = 0.$$

よって  $y_{\pm}(t)$  は定数となることが分かるので,  $y_{\pm}(t) = C_{\pm}$  とおくと

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2c}(x_+(t) + x_-(t)) = \frac{C_+}{2c}(\cos ct + i \sin ct) + \frac{C_-}{2c}(\cos ct - i \sin ct) \\ &= A \cos ct + B \sin ct \quad (A = \frac{C_+ + C_-}{2c}, B = \frac{(C_+ - C_-)i}{2c}). \end{aligned}$$

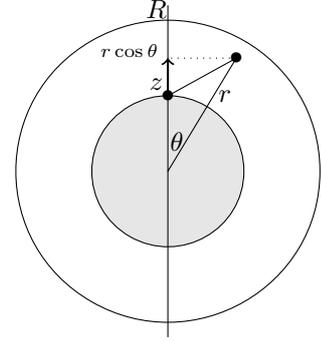
万有引力によって質量が  $m$  と  $M$  の 2 つの物体が互いに引き合う力は

$$\frac{mMG}{r^2}$$

により与えられる. ここで  $G > 0$  は万有引力定数で,  $r$  は 2 つの物体間の距離であり, 2 つの物体の大きさは  $r$  に比べて十分に小さいとしている.

地球の中心を原点にとって点  $(0, 0, z)$  にある質量  $m$  の物体に作用する地球の引力を考察する ( $z \geq 0$ ,  $R \geq 0$ ). 原点方向に引力が作用するので, その引力の大きさを極座標  $(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi)$  を用いて計算しよう.  $z$  軸の方向の成分を計算すればよいので, 地球の密度を  $\rho$  とすると

$$\begin{aligned}
F &:= \iiint_{\substack{0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi}} \frac{m\rho(r \cos \varphi - z)}{\left((z - r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi\right)^{\frac{3}{2}}} r^2 \sin \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi \\
&= 2\pi m \int_0^R \rho \, dr \int_0^\pi \frac{r^2 \sin \varphi (r \cos \varphi - z)}{(z^2 - 2zr \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi
\end{aligned}$$



となる。そこで

$$t = z^2 - 2zr \cos \varphi + r^2, \quad r \cos \varphi = \frac{z^2 + r^2 - t}{2z}, \quad \frac{dt}{d\varphi} = 2zr \sin \varphi$$

と変数変換をすると

$$\begin{aligned}
f(r) &:= \int_0^\pi \frac{r^2 \sin \varphi (r \cos \varphi - z)}{(z^2 - 2zr \cos \varphi + r^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi = - \int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \frac{r^2}{2rz} \left(z - \frac{z^2 + r^2 - t}{2z}\right) t^{-\frac{3}{2}} dt \\
&= - \int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \left(\frac{r(z^2 - r^2)}{4z^2} t^{-\frac{3}{2}} + \frac{r}{4z^2} t^{-\frac{1}{2}}\right) dt = - \left[ -\frac{r(z^2 - r^2)}{2z^2} t^{-\frac{1}{2}} + \frac{r}{2z^2} t^{\frac{1}{2}} \right]_{t=(z-r)^2}^{t=(z+r)^2} \\
&= \frac{r(z^2 - r^2)}{2z^2|z+r|} - \frac{r(z^2 - r^2)}{2z^2|z-r|} + \frac{r|z-r|}{2z^2} - \frac{r|z+r|}{2z^2} \\
&= \begin{cases} \frac{r((z-r) - (z+r) + (z-r) - (z+r))}{2z^2} = -\frac{2r^2}{z^2} & (z \geq r \geq 0) \\ \frac{r((z-r) + (z+r) - (z-r) - (z+r))}{2z^2} = 0 & (0 \leq z \leq r) \end{cases}
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
F &= -2m\pi \int_0^R \rho f(r) dr = -2\pi m \int_0^{\min\{z, R\}} \rho \frac{2r^2}{z^2} dr \\
&= -\frac{4\pi m \rho (\min\{z, R\})^3}{3z^2} = \begin{cases} -\frac{4\pi m \rho z}{3} & (0 \leq z \leq R) \\ -\frac{4\pi m \rho R^3}{3z^2} & (0 < R \leq z). \end{cases}
\end{aligned}$$

よって、地表での引力は  $-\frac{4\pi m \rho R^3}{3}$  で、地中では中心からの距離に比例した引力となる<sup>\*13</sup>。また地球から離れたら、地球の中心からの距離の逆数の2乗に比例する。

<sup>\*13</sup> 地球の密度  $\rho$  が一定でないが、地球の中心からの距離のみ依存して  $\rho(r)$  となる場合も同様に、上の積分で  $F$  が与えられる。地球の密度  $\rho$  が  $\rho(r)$  で与えられるときも、地球の中心からの距離が  $z$  以上の部分の影響は互いに打ち消してキャンセルすることがわかる。

## 2 フーリエ級数

### 2.1 周期関数

実数変数の関数  $f(x)$  が周期  $T$  の**周期関数**とは

$$f(x+T) = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (36)$$

を満たすことをいう。三角関数

$$\cos kx, \sin kx \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

は周期  $2\pi$  の三角関数である。定数関数 (たとえば 1) も周期関数である。

定数関数ではない関数  $f(x)$  に対して  $f(x+T) = f(x)$  を満たす最小の正の実数を  $f(x)$  の**基本周期**という。たとえば、関数  $\cos 3x$  の基本周期は  $\frac{2\pi}{3}$  である。

### 2.2 フーリエ (Fourier) 級数

周期  $2\pi$  の周期関数のスカラー倍や和は周期  $2\pi$  の周期関数であるから、周期  $2\pi$  の周期関数は線型空間となる。  $1, \cos kx, \sin kx$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) のうちの有限個の一次結合となる関数を**有限フーリエ級数**という。それは、ある正整数  $n$  と実数 (または複素数)  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  によって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \\ &\quad + a_{n-1} \cos(n-1)x + b_{n-1} \sin(n-1)x \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \end{aligned} \quad (37)$$

のように表せる。  $m, n$  が整数のとき

$$\begin{aligned} \cos mx \cdot \cos nx &= \frac{1}{2} (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x), \\ \sin mx \cdot \cos nx &= \frac{1}{2} (\sin(m-n)x + \sin(m+n)x), \\ \sin mx \cdot \sin nx &= \frac{1}{2} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) \end{aligned}$$

および

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = \begin{cases} 2\pi & (k=0) \\ 0 & (k=1, 2, \dots) \end{cases}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

に注意すると、(37) において

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k=0, 1, 2, \dots) \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (38)$$

が分かる。

一般に、関数  $f(x)$  に対して (38) で定まる  $a_k, b_k$  を  $a_k(f), b_k(f)$  と表すことにする。このとき

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0(f)}{2} + a_1(f) \cos x + b_1(f) \sin x + a_2(f) \cos 2x + b_2(f) \sin 2x \\ &\quad + a_3(f) \cos 3x + b_3(f) \sin 3x + a_4(f) \cos 4x + b_4(f) \sin 4x + \dots \end{aligned} \quad (39)$$

と書いて、右辺を  $f(x)$  のフーリエ級数 (展開), さらに  $a_k(f), b_k(f)$  を  $f$  の ( $k$  次の) フーリエ係数という.

ここで, 上のフーリエ級数が無限和のときは, 収束するとは限らないので, 形式的なものとする. Taylor 展開のように, 実際に収束するかどうかは重要な問題であり, 以降で考察する.

**注意.**  $f$  が偶関数 ( $f(-x) = f(x)$ ) ならば  $a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx$ ,  $b_k(f) = 0$  となり奇関数 ( $f(-x) = -f(x)$ ) ならば  $a_k(f) = 0$ ,  $b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx f(x) \, dx$  となる.

## 2.3 内積

周期  $2\pi$  の実数値関数  $f(x), g(x)$  に対して, 内積  $(\cdot, \cdot)$  を

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx \quad (40)$$

と定める<sup>\*14</sup>. このとき有限フーリエ級数の空間

$$\mathcal{F}_n := \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \mid (a_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^{2n-1} \right\}$$

は  $2n-1$  次元の線型空間で, その空間の基底

$$\{1, \sqrt{2} \cos x, \sqrt{2} \sin x, \dots, \sqrt{2} \cos(n-1)x, \sqrt{2} \sin(n-1)x\} \quad (41)$$

は, 内積  $(\cdot, \cdot)$  に対する正規直交基底になっている.

この内積を使うとフーリエ係数は以下のように表せる.

$$a_k(f) = 2(f, \cos kx), \quad b_k(f) = 2(f, \sin kx) \quad (42)$$

複素数体 (実数体でもよい) 上の線型空間  $V$  上の内積  $(\cdot, \cdot)$  に対して一般的に成り立つことをあげておく.

$$\begin{aligned} (u, v) &= \overline{(v, u)} \quad (u, v \in V), \\ (c_1 u_1 + c_2 u_2, v) &= c_1 (u_1, v) + c_2 (u_2, v) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}) \end{aligned} \quad (43)$$

が成立し, さらに

$$(v, v) \geq 0 \quad (\forall v \in V) \quad (44)$$

であって, 上で等号が成立するのは  $v = 0$  に限る. そこで

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)} \quad (45)$$

によって  $v \in V$  のノルムを定義する.

**シュワルツの不等式**

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad (46)$$

を示そう. まず,  $(u, v) \neq 0$  としてよい.  $c \in \mathbb{C}$  を  $|c| = 1, c(u, v) > 0$  となるように定めて,  $\tilde{u} = cu$  とおくと,  $|(u, v)| = (\tilde{u}, v)$ ,  $\|\tilde{u}\| = \|u\|$  となる. 任意の実数  $t$  に対して

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\tilde{u} - tv, \tilde{u} - tv) = (\tilde{u}, \tilde{u}) - t(\tilde{u}, v) - t(v, \tilde{u}) + t^2(v, v) \\ &= \|u\|^2 - 2t|(u, v)| + t^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

<sup>\*14</sup> 複素数値関数のときは,  $(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} \, dx$  とする

となるので,  $t = \frac{\|u\|}{\|v\|}$  とおくと  $0 \leq 2\|u\|^2 - 2\frac{\|u\| \cdot |(u,v)|}{\|v\|}$  を得るので, 上の不等式が分かる. さらに

$$\begin{aligned} (\|u\| + \|v\|)^2 - \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 - (u,u) - (u,v) - (v,u) - (v,v) \\ &\geq 2\|(u,v)\| - 2\operatorname{Re}(u,v) \geq 0 \end{aligned}$$

であるから三角不等式

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (47)$$

も成り立つ.

## 2.4 指数関数と三角関数

複素数  $z$  に対して, 収束半径が  $\infty$  の収束べき級数

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

を  $e^z$  と書く ( $z$  が実数ならば通常の指数関数  $e^z$  の値に等しい). この級数は, 全ての複素数  $z$  に対して収束して,  $z \in \mathbb{C}$  の複素数値連続関数となる.

$e^{z+w}$  の  $z^m w^n$  の係数は  $\frac{(z+w)^{m+n}}{(m+n)!}$  を展開したときの  $z^m w^n$  の係数であるので  $\frac{m+n C_m}{(m+n)!} = \frac{1}{m!n!}$  となり, それは  $e^z e^w$  の  $z^m w^n$  の係数に等しい. よって  $e^{z+w}$  と  $e^z e^w$  と  $(z, w)$  の級数  $\sum c_{m,n} z^m w^n$  に展開して比べてみると指数法則

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad (48)$$

が, 複素数に対しても成り立つことが分かる. 一方  $x$  を実数とすると

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + i\frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

となる. よって

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (49)$$

なお

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} e^{i\beta} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha) \end{aligned}$$

であるから,  $\alpha, \beta$  が実数とすると, 指数法則  $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$  の実部と虚部から, 三角関数の和公式

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (50)$$

が得られることに注意しておこう.

## 2.5 ディリクレ (Dirichlet) 核

周期  $2\pi$  の周期関数  $f(x)$  のフーリエ級数の有限和

$$\begin{aligned} s_n[f] &= \frac{a_0(f)}{2} + a_1(f) \cos x + b_1(f) \sin x + a_2(f) \cos 2x + b_2(f) \sin 2x + \cdots \\ &\quad + a_{n-1}(f) \cos(n-1)x + b_{n-1}(f) \sin(n-1)x \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \end{aligned} \quad (51)$$

を考える。これは

$$\begin{aligned} s_n[f] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t) dt}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \cdot \cos kx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \cdot \sin kx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\cos kt \cdot \cos kx + \sin kt \cdot \sin kx) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(t-x) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos ks \right) ds \quad (s = t-x) \end{aligned} \quad (52)$$

と表せる。さらに

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos kt &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (e^{ikx} + e^{-kx}) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} e^{ikt} = e^{-(n-1)it} \sum_{m=0}^{2n-2} e^{imx} = e^{-i(n-1)t} \frac{e^{i(2n-1)t} - 1}{e^{it} - 1} \\ &= \frac{e^{int} - e^{-i(n-1)t}}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(n-\frac{1}{2})t} - e^{-i(n-\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin(n-\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \\ &= \frac{(e^{i(n-\frac{1}{2})t} - e^{-i(n-\frac{1}{2})t})(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}})}{(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}})^2} = \frac{e^{int} + e^{-int} - e^{i(n-1)t} - e^{-i(n-1)t}}{e^{it} + e^{-it} - 2} \\ &= \frac{\cos(n-1)t - \cos nt}{1 - \cos t} \end{aligned}$$

であるから、ディリクレ核を

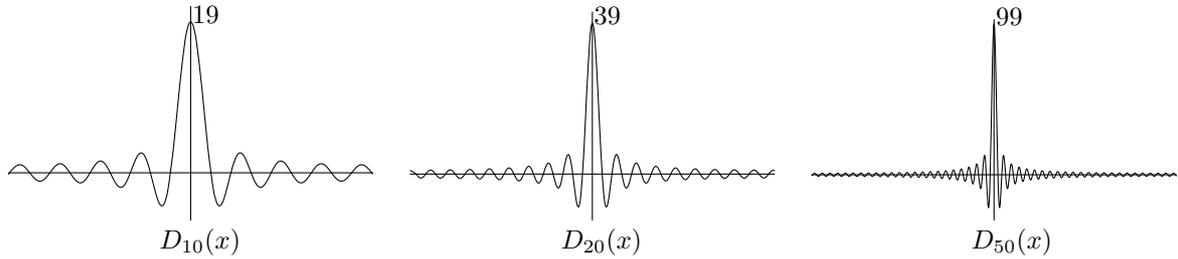
$$D_n(x) = \frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \left( = \frac{\cos(n-1)x - \cos nx}{1 - \cos x} \right) \quad (53)$$

と定義すると

$$s_n[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) dt \quad (54)$$

となる。なお  $D_n(x)$  の定義から以下が分かることに注意しよう。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1. \quad (55)$$



## 2.6 フェイェールの定理

$n \rightarrow \infty$  のとき,  $s_n[f](x)$  がある値に収束するなら, そのチェザロ平均, すなわち

$$S_n[f] := \frac{s_1[f] + s_2[f] + \cdots + s_n[f]}{n} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \quad (56)$$

とおいたときの  $S_n[f](x)$  も  $n \rightarrow \infty$  のときに同じ値に収束することに注意しよう\*15. ここで

$$S_n[f] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_k(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k(t) \right) dt,$$

$$\sum_{k=1}^n D_k(t) = \frac{1 - \cos nt}{1 - \cos t} = \frac{e^{int} + e^{-int} - 2}{e^{it} + e^{-it} - 2} = \frac{(e^{i\frac{n}{2}t} - e^{-i\frac{n}{2}t})^2}{(e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t})^2} = \frac{\sin^2 \frac{n}{2}t}{\sin^2 \frac{t}{2}}$$

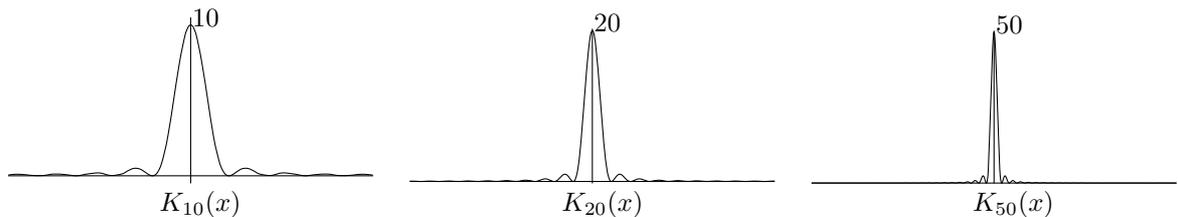
であるから, フェイェール核を

$$K_n(x) = \frac{\sin^2 \frac{n}{2}x}{n \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (57)$$

と定義すると  $K_n(x) \geq 0$  で

$$S_n[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt \quad (58)$$

となる.



**定理 (フェイェール)**.  $f(x)$  が  $f(x+2\pi) = f(x)$  を満たす連続関数ならば,  $S_n[f]$  は  $f$  に一様収束する.

**証明.** (55) より  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$  が分かるので

$$S_n[f](x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) K_n(t) dt$$

である. 任意に  $\epsilon > 0$  を与えると,  $|t| \leq \delta$  ならば  $|f(x+t) - f(x)| < \frac{1}{2}\epsilon$  となるような  $0 < \delta < 1$  を選ぶことができる. このとき

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |(f(x+t) - f(x)) K_n(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) dt \leq \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = \frac{\epsilon}{2}.$$

\*15 フーリエ級数のフェイェール総和法という

また  $M = \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x)|$  とおくと

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |(f(x+t) - f(x))K_n(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |(f(x+t) - f(x))K_n(t)| dt \\ & \leq \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} K_n(t) dt \leq \frac{2M}{n} \frac{\pi - \delta}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \end{aligned}$$

このとき ( $\delta$  に応じて)  $N$  を十分大きく選べば  $n \geq N$  のとき, 上の値が  $\frac{\epsilon}{2}$  以下となるようにできる. すなわち,  $n \geq N$  ならば  $|S_n[f](x) - f(x)| < \epsilon$  となる.

系. 連続な周期  $2\pi$  の周期関数  $f(x)$  に対して, それを一樣近似する有限フーリエ級数が存在する.

## 2.7 ベッセルの不等式とパーセヴァルの等式

線型空間  $V$  に内積  $(\cdot, \cdot)$  が定義されているとする.

$V$  の有限個, あるいは無限個の元  $e_1, e_2, e_3, \dots$  が与えられていて, 正規直交関係

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} \tag{59}$$

を満たすとする. すると

$$\begin{aligned} 0 & \leq (f - \sum_{m=1}^N c_m e_m, f - \sum_{n=1}^N c_n e_n) \\ & = (f, f) - \sum_{n=1}^N (f, c_n e_n) - \sum_{m=1}^N (c_m e_m, f) + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c_m \overline{c_n} (e_m, e_n) \\ & = (f, f) - \sum_{n=1}^N \overline{c_n} (f, e_n) - \sum_{m=1}^N c_m (e_m, f) + \sum_{m=1}^N c_m \overline{c_m} \\ & = (f, f) - \sum_{n=1}^N |(f, e_n)|^2 + \sum_{n=1}^N |c_n - (f, e_n)|^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\|f - \sum_{n=1}^N c_n e_n\|^2 = \|f - \sum_{n=1}^N (f, e_n) e_n\|^2 + \sum_{n=1}^N |(f, e_n) - c_n|^2 \tag{60}$$

となる. すなわち  $\|f - \sum_{j=1}^N c_j e_j\|$  は  $c_n = (f, e_n)$  のとき最小となることを示している. また

$$\|f - \sum_{n=1}^N (f, e_n) e_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |(f, e_n)|^2 \tag{61}$$

より, ベッセルの不等式

$$\sum_{n \geq 1} |(f, e_n)|^2 \leq (f, f) \tag{62}$$

が成り立つことが分かる. ここで等式が成り立つ場合, すなわち

$$\sum_{n \geq 1} |(f, e_n)|^2 = (f, f) \tag{63}$$

をパーセヴァルの等式という<sup>\*16</sup>. 一般に

<sup>\*16</sup>  $V$  が有限次元で  $\{e_1, \dots, e_N\}$  がその正規直交基底ならばパーセヴァルの等式が成り立つ.

**定理.**  $f$  に対してパーセヴァルの等式が成り立つための必要十分条件は、任意の  $\epsilon > 0$  に対して、正規直交系の有限和  $\sum_{n=1}^N c_n e_n$  で  $\|f - \sum_{n=1}^N c_n e_n\| < \epsilon$  を満たすものが存在することである。

**証明.** パーセヴァルの等式が成り立てば、 $N$  を十分大きく取ると  $\|f - \sum_{n=1}^N (f, e_n) c_n e_n\| < \epsilon$  となることが (61) より分かる。一方、 $\|f - \sum_{n=1}^N c_n e_n\| < \epsilon$  ならば  $0 \leq \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} |(f, e_j)|^2 \leq \|f\|^2 - \sum_{j=1}^N |(f, e_j)|^2 \leq \|f - \sum_{n=1}^N c_n e_n\|^2 < \epsilon^2$  であるから、定理の条件が十分条件であることが分かる。

フーリエ級数の場合を考察してみよう。(41) の正規直交のベクトルより

$$(f, 1) = \frac{a_0}{2}, \quad (f, \sqrt{2} \cos kx) = \frac{a_k}{\sqrt{2}}, \quad (f, \sqrt{2} \sin kx) = \frac{b_k}{\sqrt{2}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

であるから、フーリエ級数におけるベッセルの不等式は

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = (f, f) \quad (64)$$

となる。

**定理 (リーマン・ルベグ).**  $f(x)$  は有界で  $f(x+2\pi) = f(x)$  を満たし、 $[0, 2\pi]$  で有限個の点を除いて連続ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(f) = 0. \quad (65)$$

**定理 (パーセヴァルの等式).**  $f(x)$  は  $f(x) = f(x+2\pi)$  を満たす周期関数で、 $[-\pi, \pi]$  上で (リーマン) 積分可能とする。このときパーセヴァルの等式、すなわち (64) で等号が成立する。

**証明.**  $f(x)$  が連続であれば  $S_N[f]$  は  $f$  に一様収束するので、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N[f]\| = 0$  となり、前々定理からパーセヴァルの等式が分かる。

$f(x)$  が可積分関数ならば、 $|f(x)| < K$  となる正数  $M$  があり、 $[-\pi, \pi]$  を  $M$  等分して  $t_j = 2\pi \frac{j}{M} - \pi$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) とおき

$$f_M(x) = f(t_{j-1}) + \frac{x - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} (f(t_j) - f(t_{j-1})) \quad (x \in [t_{j-1}, t_j], j = 1, \dots, M),$$

$$f_M(x + 2m\pi) = f_M(x) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

によって定めると、 $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_M(x)|^2 dx \leq \lim_{M \rightarrow \infty} 2K \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_M(x)| dx = 0$  であるから、 $\epsilon > 0$  に対して  $M$  を十分大きく取ると  $\|f(x) - f_M(x)\| < \frac{\epsilon}{2}$  となる。 $N$  を十分大きく取ると  $\|f_M - S_N[f_M]\| < \frac{\epsilon}{2}$  となるので、 $\|f - S_N[f_M]\| < \epsilon$  となって、同様にパーセヴァルの等式が分かる。

## 2.8 滑らかな関数のフーリエ級数展開

**定理.**  $f$  は  $f(x+2\pi) = f(x)$  を満たす  $C^1$  級の関数 (あるいは区分的に  $C^1$  級の関数<sup>\*17</sup>) とする。このとき、導関数  $f'$  のフーリエ級数は以下で与えられる。

$$a_0(f') = 0, \quad a_k(f') = kb_k(f), \quad b_k(f') = -ka_k(f) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (66)$$

すなわち  $f$  のフーリエ級数展開 (39) を形式的に微分したものが  $f'$  のフーリエ級数展開となる。

<sup>\*17</sup>  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = 2\pi$  という分割があつて、 $f|_{[t_{j-1}, t_j]}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) が  $C^1$  級となる。

**証明.** 部分積分を使うと

$$a_k(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left( [f(x) \cos kx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-k \sin kx) \, dx \right) = kb_k(f),$$

$$b_k(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left( [f(x) \sin kx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (k \cos kx) \, dx \right) = -ka_k(f).$$

系. 関数  $f(x)$  が区分的に  $C^m$  級で  $f(x+2\pi) = f(x)$  であつたとする. このとき

$$|a_k(f)| \leq \frac{\sqrt{2}\|f^{(m)}\|}{k^m}, \quad |b_k(f)| \leq \frac{\sqrt{2}\|f^{(m)}\|}{k^m} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (67)$$

**定理.**  $f$  は  $f(x+2\pi) = f(x)$  を満たす区分的に  $C^1$  級の関数であるなら, そのフーリエ級数は  $f$  に絶対かつ一様に収束する.

**証明.** 以下の和が  $N$  に依らずに有界であることから, フーリエ級数は絶対かつ一様に収束する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N |a_k(f) \cos kx| + \sum_{k=1}^N |b_k(f) \sin kx| &\leq \sum_{k=1}^N |a_k(f)k| \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^N |b_k(f)k| \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^N \left( |b_k(f')| \frac{1}{k} + |a_k(f')| \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left( |b_k(f')|^2 + \frac{1}{k^2} + |a_k(f')|^2 + \frac{1}{k^2} \right) \leq (f', f') + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

フェイェールの定理から, 収束値は  $f(x)$  であることが分かる.

## 2.9 複素形式のフーリエ級数

(49) により,  $\cos kx, \sin kx$  は  $e^{ikx}$  と  $e^{-ikx}$  で表せ, その逆も同様である.

よって  $f(x)$  のフーリエ級数展開は

$$\begin{aligned} f(x) &\sim a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots \\ &= c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} + c_2 e^{i2x} + c_{-2} e^{-i2x} + \dots + c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} + \dots \end{aligned}$$

すなわち

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (68)$$

$$c_0 = a_0, \quad c_{\pm n} = \frac{1}{2}(a_n \mp ib_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となること分かる. このとき

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = (f, e^{inx}) \quad (69)$$

で, パーセヴァルの等式は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = (f, f) \quad (70)$$

となる. また  $c$  を実数とすると,  $f(x+c)$  のフーリエ級数展開は

$$\begin{aligned} f(x+c) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{int}) e^{inx} \\ &\sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (a_n \cos t + b_n \sin t) \cos nx + (b_n \cos t - a_n \sin t) \sin nx \right) \end{aligned} \quad (71)$$

となる.

## 2.10 例 (三角波)

$f(x + 2\pi) = f(x)$  を満たす三角波関数

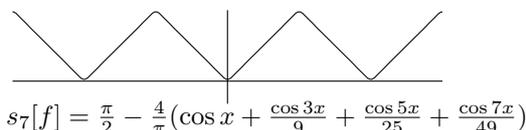
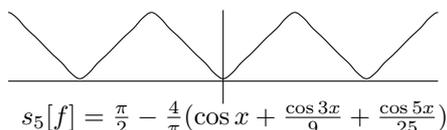
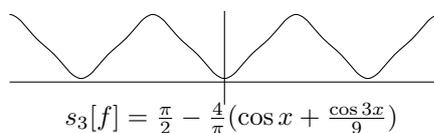
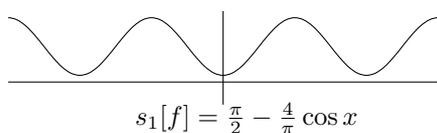
$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

のフーリエ係数を求めよう.  $f(x)$  は偶関数だから  $b_n(f) = 0$  で,

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi, \\ a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left( \left[ \frac{x}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[ \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & (n = 2m) \\ -\frac{4}{n^2\pi} & (n = 2m-1) \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$f(x)$  は区分的に  $C^1$  級であるから, フーリエ級数展開は  $f(x)$  に絶対に一様収束し

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right). \end{aligned} \tag{72}$$



$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \text{ より}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}. \tag{73}$$

また

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{74}$$

さらに

$$(f, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

であるから、パーセヴァルの等式より

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{4}{\pi(2m-1)^2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{3}$$

となつて、 $\frac{1}{8}(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{96}$  より

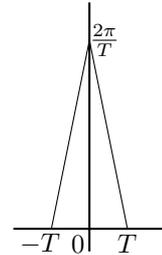
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \quad (75)$$

が分かる. さらに  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} + \frac{1}{2^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  および  $\frac{1}{96} \left(1 - \frac{1}{16}\right)^{-1} = \frac{1}{90}$  より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (76)$$

例.  $0 < T \leq \pi$  を満たす実数  $T$  に対して

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\pi(T-|x|)}{T^2} & (|x| \leq T) \\ 0 & (T \leq |x| \leq \pi) \end{cases}$$



となる周期  $2\pi$  の周期関数  $f(x)$  のフーリエ級数展開を求めてみよう.  $b_n(f) = 0$  で

$$a_0(f) = \frac{4}{T^2} \int_0^T (T-x) dx = \left[ \frac{4x}{T} - \frac{2x^2}{T^2} \right]_{x=0}^{x=T} = 2$$

となり,  $n > 0$  のとき

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{4}{T} \int_0^T (T-x) \cos nx \, dx = \left[ \frac{4(T-x) \sin nx}{T^2} - \frac{4 \sin nx}{nT^2} \right]_{x=0}^{x=T} + \int_0^T \frac{4 \sin nx}{nT^2} dx \\ &= \left[ -\frac{4 \cos nx}{n^2 T^2} \right]_{x=0}^{x=T} = \frac{4(1 - \cos nT)}{n^2 T^2} \\ &= 2 - \frac{1}{6}(nT)^2 + o((nT)^3) \quad (T \rightarrow +0). \end{aligned}$$

よって

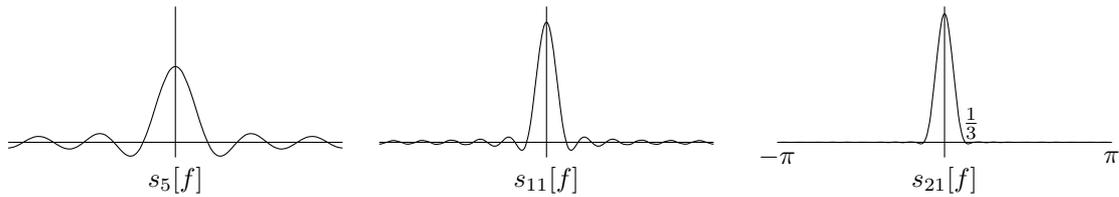
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - \cos nT)}{n^2 T^2} \cos nx = \begin{cases} \frac{2\pi(T-x)}{T^2} & (|x| \leq T) \\ 0 & (T \leq |x| \leq \pi) \end{cases} \quad (77)$$

となり, 特に  $x=0$  とおくと

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - \cos nT)}{n^2 T^2} = \frac{2\pi}{T} \quad (78)$$

となるが, さらに  $T = \pi$  とおくと  $1 + \frac{4}{n^2 \pi} (1 - (-1)^n) = 2$  より  $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$  を得る.

問. 上で  $T = \frac{2\pi}{3}$  および  $\frac{\pi}{3}$  とおくと, どのような級数の和が求まるか.



例.  $f(x) = \max\{\cos x, 0\}$  という周期関数のフーリエ展開を求めて見よう.  $b_n(f) = 0$  で

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(n+1)x + \cos(n-1)x) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1} \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{2}}{n+1} + \frac{\sin \frac{(n-1)\pi}{2}}{n-1} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{2(-1)^{m+1}}{\pi(4m^2-1)} & (n = 2m : \text{偶数の時}) \\ \frac{1}{2} & (n = 1) \\ 0 & (n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数の時}) \end{cases} \end{aligned}$$

となるので

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{2}{\pi \cdot 1 \cdot 3} \cos 2x - \frac{2}{\pi \cdot 3 \cdot 5} \cos 4x + \frac{2}{\pi \cdot 5 \cdot 7} \cos 6x - \frac{2}{\pi \cdot 7 \cdot 9} \cos 8x + \dots$$

$x = 0$  とおくと上の等式は

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left( \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) \end{aligned}$$

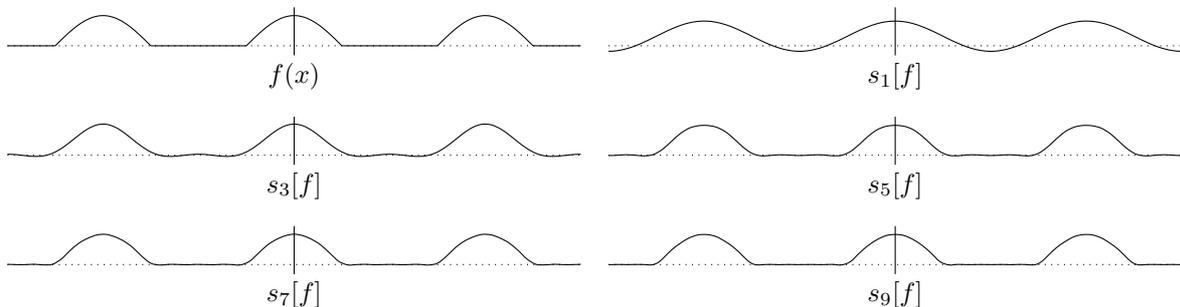
となり, ライプニッツの公式

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

を得る. 一方  $x = \frac{\pi}{2}$  のときの右辺は

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \left( \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots \right) = 0$$

となって左辺と等しい.



問. この例に対するパーセヴァルの等式から, 以下を示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}.$$

## 2.11 多項式近似定理

**定理.** 区間  $[0, 1]$  上の連続関数  $f(x)$  と任意の正数  $\epsilon$  に対し,

$$\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_\epsilon(x)| < \epsilon$$

となる多項式  $f_\epsilon(x)$  が存在する.

$$\text{証明. } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in [0, 1]) \\ f(1) - \frac{x-1}{2\pi-1}(f(1) - f(0)) & (x \in [1, 2\pi]) \\ \tilde{f}(x - 2m\pi) & (x \in [2m\pi, 2(m+1)\pi], m = \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

と定めると  $\tilde{f}(x)$  は周期  $2\pi$  の連続関数となる.

よってフェイェールの定理から

$$|\tilde{f}(x) - \sum_{n=-N}^N C_n e^{inx}| < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす有限フーリエ級数  $\sum_{n=-N}^N C_n e^{inx}$  が存在することがわかる.  $|C_n|$  ( $|n| \leq N$ ) の最大値を  $C$  をおくと  
そこで,  $e^{inx}$  の Taylor 展開より,  $k$  を十分に大きく選ぶと

$$\max_{x \in [0, 1]} \left| e^{inx} - \left( 1 + \frac{inx}{1!} + \frac{(inx)^2}{2!} + \dots + \frac{(inx)^k}{k!} \right) \right| < \frac{\epsilon}{4(C+1)N} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N)$$

となる. このとき

$$\max_{x \in [0, 1]} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N C_n \left( 1 + \frac{inx}{1!} + \frac{(inx)^2}{2!} + \dots + \frac{(inx)^k}{k!} \right) \right| < \epsilon.$$

**定理 (多項式近似).**  $\mathbb{R}$  上の任意の連続関数  $f(x)$  に対し,  $f(x)$  に広義一様収束する多項式列  $\{f_n(x)\}$  が  
ある.

**証明.**  $g_n(x) = f(2nx - n)$  とおくと, 前定理から  $\max_{0 \leq x \leq 1} |g_n(x) - h_n(x)| < \frac{1}{n}$  を満たす多項式  $h_n$  が存在する.  $f_n(x) = h_n\left(\frac{x+n}{2n}\right)$  とおけば,  $\max_{|x| \leq n} |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n}$  となるので,  $\{f_n\}$  は求めるもの.

閉区間  $[-1, 1]$  上の関数  $u(x), v(x)$  の内積を  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx$  と定めると, 関数系  $\{e^{\pi k \pi i x} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  や  $\{1, \sqrt{2} \cos \pi x, \sqrt{2} \sin \pi x, \sqrt{2} \cos 2\pi x, \sqrt{2} \sin 2\pi x, \dots\}$  が正規直交関数系になる.

この正規直交関数系を  $\{e_1(x), e_2(x), e_3(x), \dots\}$  と表すと, 区分的に  $C^1$  級の周期 2 の関数  $f(x)$  に対して

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) e_n(x)$$

が成立し, 上の右辺は絶対一様収束する.

閉区間  $[0, 1]$  上の区分的に  $C^1$  級の関数  $f(x)$  は  $f(-x) = f(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) として,  $[-1, 1]$  上の偶関数に拡張され, さらに  $f(x+2) = f(x)$  を満たす区分的に  $C^1$  級の偶周期関数に拡張される. よって

$$f(x) = \int_0^1 f(x)dx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^1 f(x) \cdot \cos n\pi x dx \right) \cos n\pi x$$

とフーリエ級数展開され、右辺は絶対一様収束する.

$$\begin{aligned} \cos nx + i \sin nx &= e^{inx} = (\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \cos^{n-k} x \cdot i^k \sin^k x \\ &= \sum_{0 \leq \nu \leq \frac{n}{2}} {}_n C_{2\nu} (-1)^\nu \cos^{n-2\nu} x \cdot \sin^{2\nu} x + i \sum_{0 \leq \nu \leq \frac{n-1}{2}} {}_n C_{2\nu+1} (-1)^\nu \cos^{n-2\nu-1} x \cdot \sin^{2\nu+1} x. \end{aligned}$$

となるので  $n$  次の**チェビシエフ多項式**を

$$T_n(t) := \sum_{0 \leq \nu \leq \frac{n}{2}} \frac{n!(-1)^\nu}{(n-2\nu)!(2\nu)!} t^{n-2\nu} (1-t^2)^\nu$$

と定義すると

$$\begin{aligned} \cos nx &= T_n(\cos x), \\ T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \quad T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \dots \end{aligned}$$

が成り立つ.

$t = \cos \pi x$  は,  $x \in [0, 1]$  から  $t \in [-1, 1]$  の上への  $C^1$  級の 1 対 1 写像で,  $\frac{dt}{dx} = -\pi \sin \pi x = -\pi \sqrt{1-t^2}$  となる. このことから, 以下のチェビシエフ多項式の直交関係式が得られる.

$$\int_{-1}^1 T_m(t) T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n = 0), \\ \frac{\pi}{2} & (m = n > 0). \end{cases} \quad (79)$$

$[-1, 1]$  上の区分的に  $C^1$  級の関数  $g(t)$  は,  $f(x) = g(\cos \pi x)$  とおくと,  $[-1, 1]$  上の区分的に  $C^1$  級の偶周期関数となってフーリエ級数展開できる (フーリエ級数展開は絶対一様収束). よって  $g(t)$  はチェビシエフ多項式  $T_n(t)$  によって展開でき,  $T_n(t)$  の係数は

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

で与えられる (ただし  $n = 0$  のときはその半分).  $\{T_n(t) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  は  $[-1, 1]$  上の関数の空間に対する内積

$$(u, v) = \int_{-1}^1 u(x) \bar{v}(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

についての (あるいは, ウェイト  $\sqrt{1-t^2}$  に対する) **完全直交多項式系**となる<sup>\*18</sup>. チェビシエフの多項式は, 以下の関係を満たす.

$$\text{三項漸化式} \quad T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad (80)$$

$$\text{微分方程式} \quad (1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0. \quad (81)$$

この (80) は

$$(e^{ix} + e^{-ix}) \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} = \frac{e^{i(n+1)x} + e^{-i(n+1)x}}{2} + \frac{e^{i(n-1)x} + e^{-i(n-1)x}}{2}$$

<sup>\*18</sup> 適当な  $m$  に対し,  $C^m$  級の関数とその多項式系で展開できるときに完全ということにする.

より, また  $x = \cos \theta$  とおくと,  $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$  であるから, (81) は, 以下のように得られる.

$$0 = \frac{d^2}{d\theta^2} T_n + n^2 T_n = \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \cdot T'_n) - n^2 T_n = \cos \theta \cdot T'_n + \sin \theta^2 T''_n + n^2 T_n = (1 - x^2) T''_n + x T'_n + n^2 T_n.$$

区間  $[-1, 1]$  における通常の内積に対する完全直交多項式系は, **ルジャンドル (Legendre) 多項式**

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (82)$$

によって与えられる.  $P_n(x)$  は,  $n$  次多項式で

$$\begin{aligned} P_n(-x) &= (-1)^n P_n(x), \\ P_n(1) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x-1)^n (x+1)^n) \Big|_{x=1} = \frac{1}{2^n n!} (x+1)^n \frac{d^n}{dx^n} (x-1)^n \Big|_{x=1} = 1, \\ \frac{d^n}{dx^n} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} x^{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \\ P_1(x) &= x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \quad P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5), \dots \end{aligned}$$

となる.  $h(x)$  を  $C^n$  級の関数とすると,  $n$  回部分積分を繰り返すことにより

$$\int_{-1}^1 h(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n \int_{-1}^1 h^{(n)}(x) (x^2 - 1)^n dx = \int_{-1}^1 h^{(n)}(1 - x^2)^n dx$$

が得られるので, ルジャンドル多項式は直交関数系となる.  $h(x) = P_n(x)$  とおくと

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^n \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt \\ &= 2 \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \dots \frac{2}{3} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}, \\ \int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx &= \frac{(2n)!}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{1}{2^n n!} (1 - x^2)^n dx = \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{1}{2^n n!} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

が分かるので, 以下の直交関係式が示される.

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n}. \quad (83)$$

一般に  $\{p_n(x) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  を直交多項式系とする ( $p_n(x)$  は  $n$  次多項式).  $q_n(x) = p_{n+1}(x) - (a_n x + b_n) p_n(x)$  が  $(n-1)$  次式以下の多項式となるように数  $a_n, b_n$  を定める. このとき,  $x p_n(x)$  と  $h(x)$  の内積は,  $p_n(x)$  と  $x h(x)$  の内積に等しく, 後者は  $(n-1)$  次以下なので, その内積は 0 である.  $a_n(x)$  は  $(n-2)$  次以下の多項式と直交するので,  $p_{n-1}(x)$  の定数倍である. よって

$$p_{n+1}(x) + (a_n x + b_n) p_n(x) + r_n p_{n-1}(x) = 0 \quad (84)$$

を満たす数  $a_n, b_n, c_n$  が存在する.

$(x^2 - 1)^n = x^{2n} - n x^{2n-2} + \dots$  であるので

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(2n)(2n-1) \cdots (2n-n+1)}{2^n n!} x^n - \dots, \\ P_{n+1}(x) &= \frac{(2n+2)(2n+1) \cdots (2n-n+2)}{2^{n+1} (n+1)!} x^{n+1} - \dots, \end{aligned}$$

$$a_n = -\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1) \cdot 2(n+1)} = -\frac{2n+1}{n+1}.$$

また  $P_{n+1}(x) - \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)$  は  $x^{n-1}$  の項は含まないので,  $b_n = 0$  となる. 一方

$$(r_n P_{n-1}, P_{n-1}) = r_n \frac{2}{2n-1},$$

$$(P_{n+1} + (a_n x + b_n)P_n, P_{n-1}) = a_n (P_n, xP_{n-1}) = -\frac{2n+1}{n+1} \frac{n}{2n-1} \frac{2}{2n+1} = -\frac{2n}{(n+1)(2n-1)}$$

より  $r_n = \frac{n}{n+1}$ . よって三項漸化式

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (85)$$

を得る.

$f(x), g(x)$  を多項式とすると

$$\int_{-1}^1 ((1-x^2)f'(x))'g(x)dx = [(1-x^2)f'(x)g(x)]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^1 (1-x^2)f'(x)g'(x)dx$$

$$= - \int_{-1}^1 f'(x)g'(x)(1-x^2)dx = \int_{-1}^1 ((1-x^2)g'(x))'f(x)dx$$

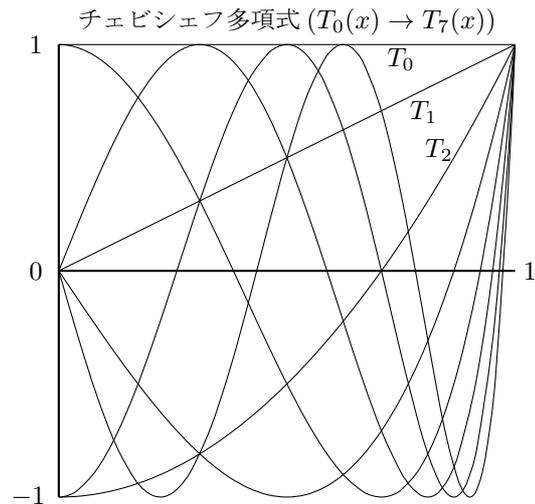
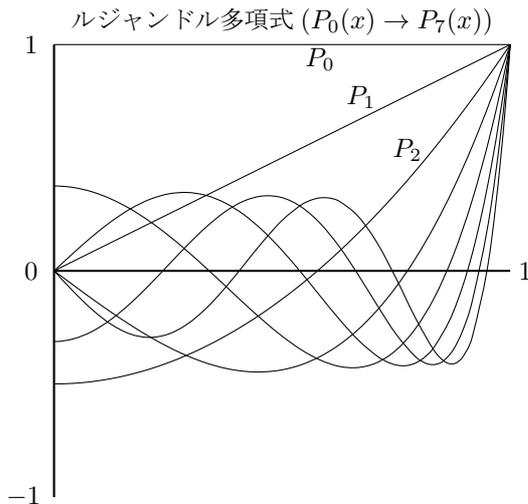
が成り立つ. よって  $f(x) = P_n(x)$  のときは,  $g(x)$  が  $n-1$  次式以下ならば上の式は 0 になるので

$$((1-x^2)f'(x))' = \alpha_n P_n(x)$$

となる数  $\alpha_n$  が存在する.  $P_n(x)$  の  $x^n$  の係数を  $\beta_n$  とおくと,  $((1-x^2)f'(x))'$  の  $x^n$  の係数は  $-n(n+1)\beta_n$  であるから,  $\alpha_n = -n(n+1)$  が分かる.  $((1-x^2)f'(x))' = f''(x) - 2xf'(x)$  であるから,  $P_n(x)$  の満たすルジャンドルの微分方程式

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \quad (86)$$

が得られる.



**注意.**  $P_n(x), T_n(x)$  は,  $n$  の偶奇に応じて偶関数または奇関数となる. また閉区間  $[-1, 1]$  内に  $n$  個の零点を持つ. また, その零点は  $n$  を一つ減らした直交多項式の零点によって  $[-1, 1]$  を分割した  $n$  個の小区間の中の一つずつある.

$[-1, 1]$  上の関数に対して内積

$$(u(x), v(x)) = \int_{-1}^1 u(x)v(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$$

を考えることにより, より一般の直交多項式系 (Jacobi 多項式) が定義される.

問.  $f_n(x) = x^n$  とおくと, 内積  $(u(x), v(x)) = \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx$  に対して直交系になるように, 関数系  $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$  にシュミットの直交化を行った最初の 4 個を求めよ (3 次以下の多項式). なおシュミットの直交化とは

$$e_n = f_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f_n, e_k)}{(e_k, e_k)} e_k \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって直交系  $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$  を求める方法である\*19.

## 2.12 例 (鋸波)

$f(x+2\pi) = f(x)$  を満たす関数

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

(鋸波を表す) のフーリエ係数を求めよう.  $f(x)$  は奇関数だから  $a_n(f) = 0$  で

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} n \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left( \left[ -x \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right) = -\frac{2 \cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n-1} 2}{n}$$

となっているので

$$f(x) \sim 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

$f(x)$  は  $(-\pi, \pi)$  では連続であるが  $x = (2m+1)\pi$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) では不連続であるので, フーリエ級数がもとの関数に収束するかどうかは分からない. 実際にどうなるか調べてみよう.

$e^{r+i\theta} = e^r(\cos \theta + i \sin \theta)$  であったから,  $z \neq 0$  に対し  $e^w = z$  を満たす複素数は  $w$  は,  $\log |z| + i(\arg z + 2m\pi)$  ( $-\pi < x \leq \pi$  で与えられる. よって複素数  $z \neq 0$  に対しても対数関数  $\text{Log}(z) = \log |z| + i \arg z$  で定める (対数関数の主値ともいう)).

$|x| < 1$  を満たす実数  $x$  に対し

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{n-1} dt \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \end{aligned}$$

よって, 実数  $x$  が  $|x| < 1$  を満たすとき

$$1+x = e^{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots} \quad (87)$$

が成立する. そこで

$$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} x^{n+k}$$

\*19 定義から,  $k < n$  ならば  $(e_n, e_k) = 0$  となることが帰納的に分かり, また  $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$  が一次独立なので  $e_n \neq 0$  も分かる.

とおくと  $c_{n,0} = 1$  で, (87) の両辺を展開して  $x^N$  の係数を比べてみると

$$\sum_{k=0}^N \frac{c_{N-k,k}}{(N-k)!} = \begin{cases} 1 & (N=0,1), \\ 0 & (N=2,3,\dots) \end{cases}$$

が分かり, 逆に (87) は上を意味する.

一方, 複素数  $z$  が  $|z| < 1$  を満たすときも, 上の級数の和は収束して (87) が成り立ち,  $\text{Log}(1) = 0$  で,  $e^{\text{Log}(1+z)} = 1+z$  が成り立つので, 連続性から

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad (x \in \mathbb{C}, |z| < 1) \quad (88)$$

が分かる.  $z = re^{i\theta}$  とおくと,  $0 \leq r < 1$  とすると

$$\frac{r^n e^{in\theta}}{n} = \int_0^r t^{n-1} e^{in\theta} dt = e^{i\theta} \int_0^r (te^{i\theta})^{n-1} dt$$

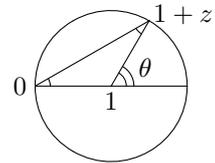
であるから

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots - (-1)^n \frac{z^n}{n} + (-1)^n \int_0^r e^{i\theta} \frac{(te^{i\theta})^n}{1+te^{i\theta}} dt,$$

$$|\text{Log}(1+z) - (z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots - (-1)^n \frac{z^n}{n})| \leq \frac{\int_0^r t^n dt}{\min_{0 \leq t \leq 1} |1+te^{i\theta}|} = \frac{r^{n+1}}{(n+1) \min_{0 \leq t \leq 1} |1+te^{i\theta}|}.$$

$|\theta| < \pi$  とする. このとき上の式の両辺は  $0 \leq r \leq 1$  で連続であるから  $r=1$  においても, すなわち  $z = e^{i\theta}$  のときも上の式は正しい. よって  $n \rightarrow \infty$  のとき上の右辺は 0 に収束するので

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \quad (z = e^{i\theta}, |\theta| < \pi)$$



が成り立つ (広義一様収束).  $r=1$  において虚部を比較すると

$$\frac{\theta}{2} = \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \dots \quad (\theta \in (-\pi, \pi))$$

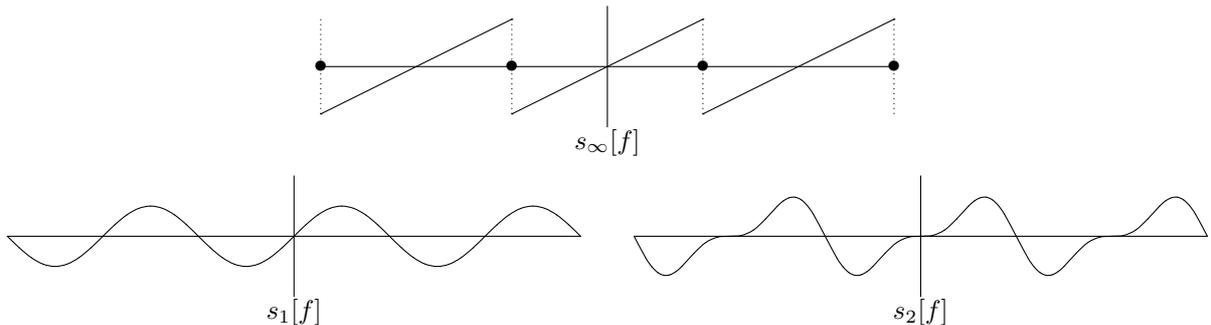
従って  $x \in (-\pi, \pi)$  ではフーリエ級数はもとの関数に収束することが分かるが,  $x = \pm\pi$  では 0 となる.

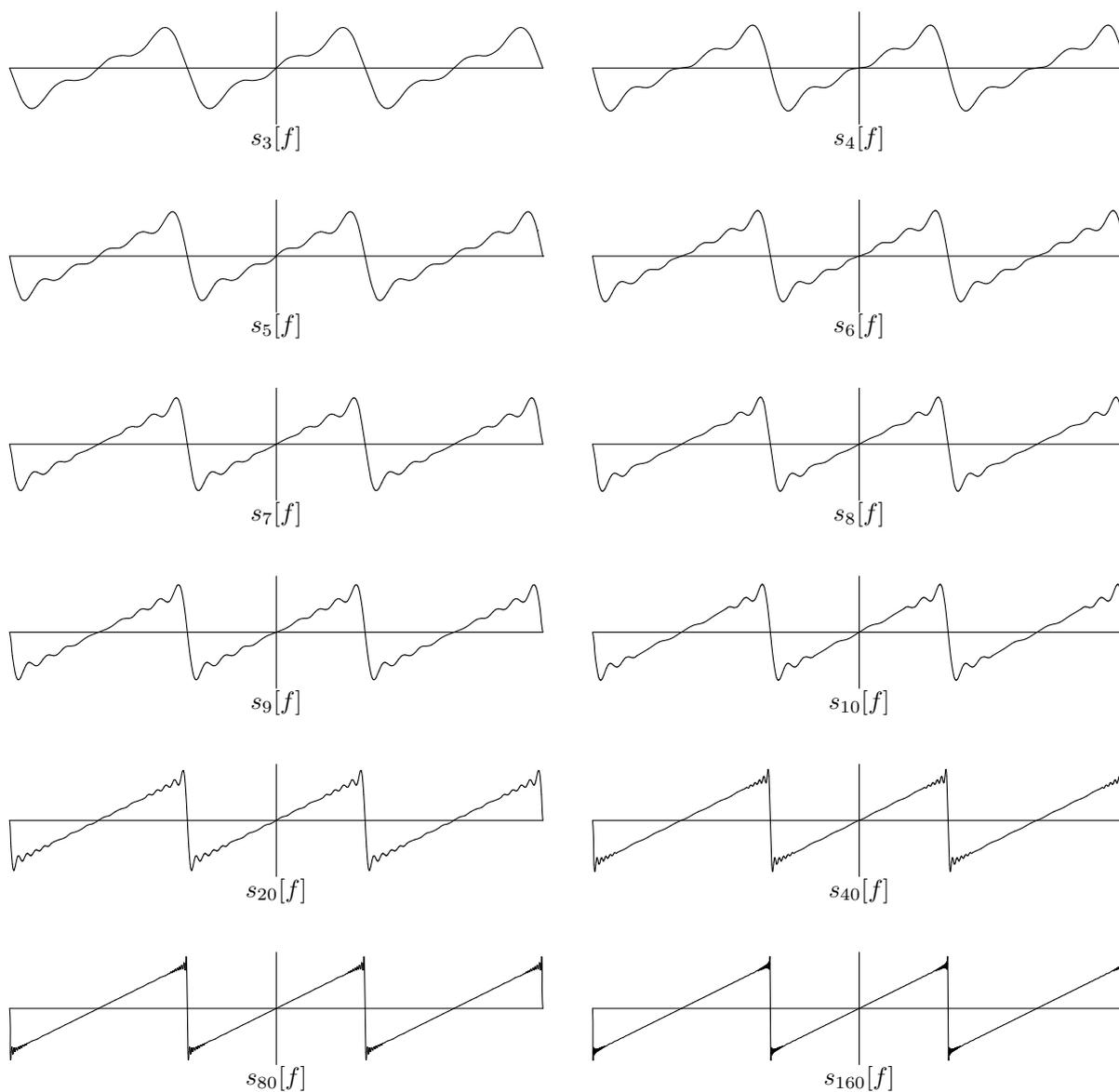
すなわち  $f$  のフーリエ級数は全ての  $x \in \mathbb{R}$  について収束して周期  $2\pi$  の周期関数になり

$$2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right) = \begin{cases} x & (|x| < \pi) \\ 0 & (x = \pm\pi) \end{cases}$$

を満たす.

$$s_n[f] = 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots - (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \right) \text{ のグラフ}$$





## 2.13 収束定理

**定理.**  $f(x)$  は  $f(x+2\pi) = f(x)$  を満たす周期関数で,  $f(x)$  の不連続点  $a$  で  $-\pi \leq a \leq \pi$  を満たすものは有限個の  $a_1, \dots, a_n$  ( $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ) のみで,  $j = 1, \dots, n$  に対して  $f|_{(a_j, a_{j+1})}$  は  $[a_j, a_{j+1}]$  で  $C^1$  級の関数に拡張できるとする ( $a_{n+1} = a_1 + 2\pi$ ). このとき  $f(x)$  のフーリエ級数  $s_\infty[f]$  は不連続点を除いた部分で広義一様収束する. さらに不連続点も含めて各点  $x$  で  $s_\infty[f](x)$  は収束して以下ようになる.

$$s_\infty[f](x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{f(x-\epsilon) + f(x+\epsilon)}{2} \quad (89)$$

**証明.** 前節の鋸波の関数を  $g(x)$  とおくと, それは  $x = \pi$  で不連続で,

$$s_\infty[g](\pi) = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow +0} g(\pi \pm \epsilon) = \mp \pi$$

なので、この定理が成り立ち、 $x = a_j$  で不連続な関数  $g(x - a_j)$  についても同様となる。

$F(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n \frac{f_j(a_j-0) - f_j(a_j+0)}{2\pi} g(x - a_j)$  という関数は不連続点のない区分的に  $C^1$  級の周期関数となるので、そのフーリエ級数は  $F(x)$  に一様収束する。一方、 $f(x)$  を  $F(x)$  や  $g(x - a_j)$  で置き換えた関数は (89) を満たすので、 $f$  も同様である。

## 2.14 例 (方形波)

$f(x) = \operatorname{sgn} x^{*20}$  ( $-\pi \leq x < \pi$ ) を満たす周期  $2\pi$  の周期関数のフーリエ級数展開を求めよう。

$f(x)$  には前節の収束定理が適応でき、 $s_\infty[f](x)$  が収束することに注意しよう。

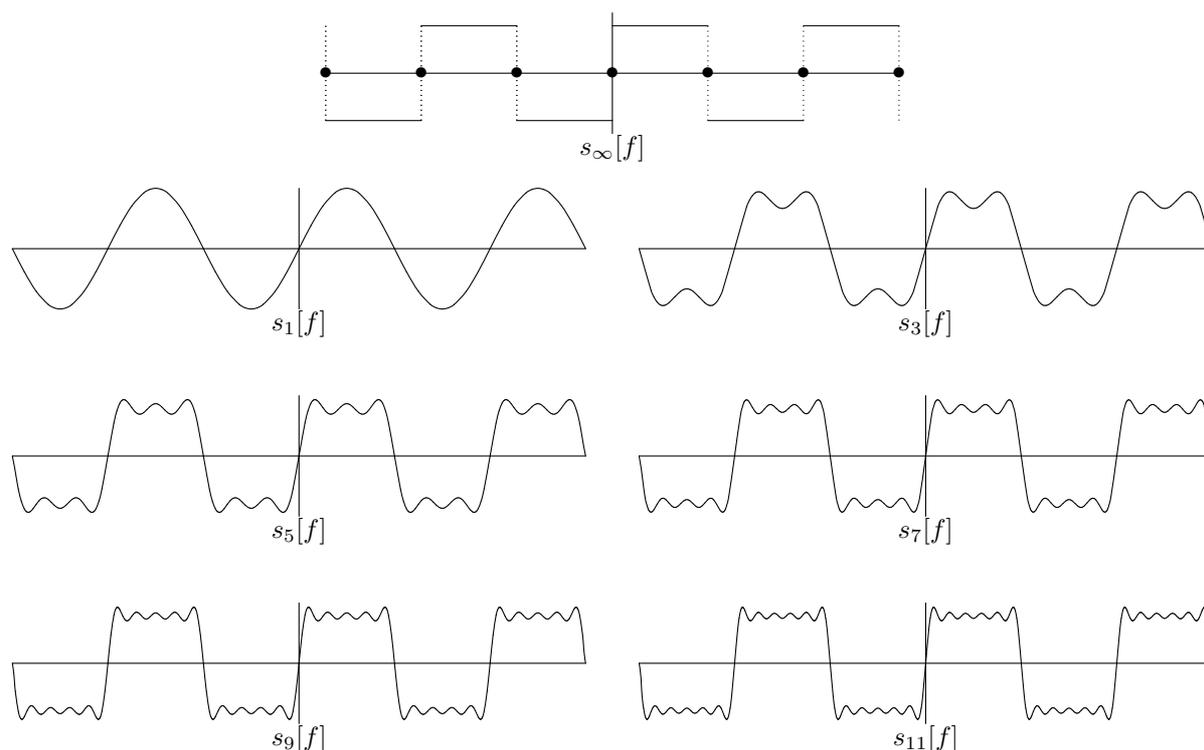
$f(x)$  は奇関数だから  $a_n(f) = 0$  で

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} (-(-1)^n + 1) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ \frac{4}{n\pi} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

よって<sup>\*21</sup>

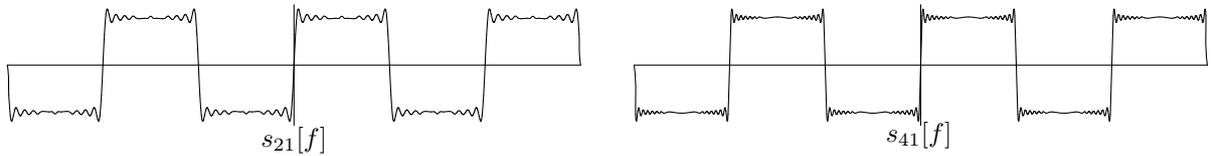
$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right). \quad (90)$$

$s_{2k-1}[f] = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \right)$  のグラフ



<sup>\*20</sup>  $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$

<sup>\*21</sup> (90) は、§2.8 の最初の定理より、(72) の両辺を形式的に微分しても得られる。



$x$  に値を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = 2 \left( \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \cdots \right) & (x = \frac{\pi}{2}) \\ \frac{\sqrt{3}\pi}{6} &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \cdots = 4 \left( \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 17} + \cdots \right) & (x = \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{4} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots = 1 + 2 \left( \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} - \cdots \right) & (x = \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

例.  $T$  を  $0 < T \leq \pi$  を満たす実数とする. 周期  $2\pi$  の周期関数を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{T} & (|x| \leq T) \\ 0 & (T < |x| \leq \pi) \end{cases}$$

を満たすように定義する. この偶関数  $f(x)$  において,  $a_0(f) = 2$  となり, さらに

$$a_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{T}} \frac{\pi}{T} \cos nx \, dx = \frac{2}{T} \left[ \frac{\sin nx}{n} \right]_0^T = \frac{2 \sin nT}{nT}$$

より

$$f(x) \sim 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nT}{nT} \cos nx.$$

## 2.15 ギブスの現象

$$\sum_{k=1}^n e^{i(2k-1)x} = e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikx} = e^{ix} \frac{e^{2inx} - 1}{e^{2ix} - 1} = e^{inx} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}} = e^{inx} \frac{\sin nx}{\sin x}$$

であるが, 両辺の実部より

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x = \cos nx \frac{\sin nt}{\sin x} = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$$

前節の方形波の部分 and は

$$s_{2n-1}[f](x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{4}{\pi} \int_0^x \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} \, dt$$

となるので,  $s_n[f](x)$  の導関数は  $x = \frac{k\pi}{2n}$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) で極値をとる.  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  において, 被積分関数の分母は正で狭義単調増加し, 分子の絶対値は周期  $\frac{\pi}{2n}$  の周期関数で, 正負が入れ替わる点で積分は極値をとる. また  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して  $[\frac{(k-1)\pi}{2n}, \frac{k\pi}{2n}]$  での積分の絶対値は  $k$  が増加すると減少する. よって最大値は

$$s_n[f](\frac{\pi}{2n}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} \, dt$$

となり

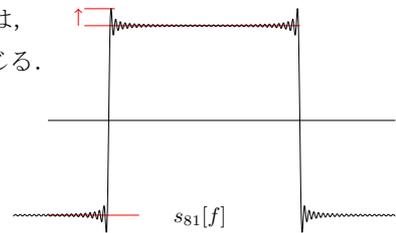
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n[f]\left(\frac{\pi}{2n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin s}{\sin \frac{s}{2n}} \frac{ds}{2n} \quad (s = 2nt) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin s}{s} \frac{\frac{s}{2n}}{\sin \frac{s}{2n}} ds = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin s}{s} ds, \\ \int_0^\pi \frac{\sin s}{s} ds &= \int_0^\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{2k}}{(2k+1)!} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} = \pi - \frac{\pi^3}{3! \cdot 3} + \frac{\pi^5}{5! \cdot 5} - \dots \\ &= 1.8519370519824661706\dots, \\ \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin s}{s} ds - 1 \right) &= 0.08948987223608363520\dots \end{aligned}$$

なお、 $\frac{s}{\sin \frac{s}{2n}}$  ( $s \in (0, \frac{\pi}{2})$ ) は  $n$  が増えると単調に減少するので、 $s_n[f]\left(\frac{\pi}{2n}\right)$  も同様である。

**定理** (ギブスの現象). 収束定理において、フーリエ級数の和の収束には、不連続点の前後で値の跳びの約 8.95% のオーバーシュート (とげ) が生じる。

**証明.** ここで扱った方形波を  $h(x)$  とおくと (ただし  $h(m\pi) = 0$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ),  $h(x)$  は奇関数で周期が  $2\pi$  であり、定理直前の計算から定理の主張が成り立つことが分かる。

$f(x)$  が収束定理の仮定を満たす関数であって、 $x = a$  では不連続とする。



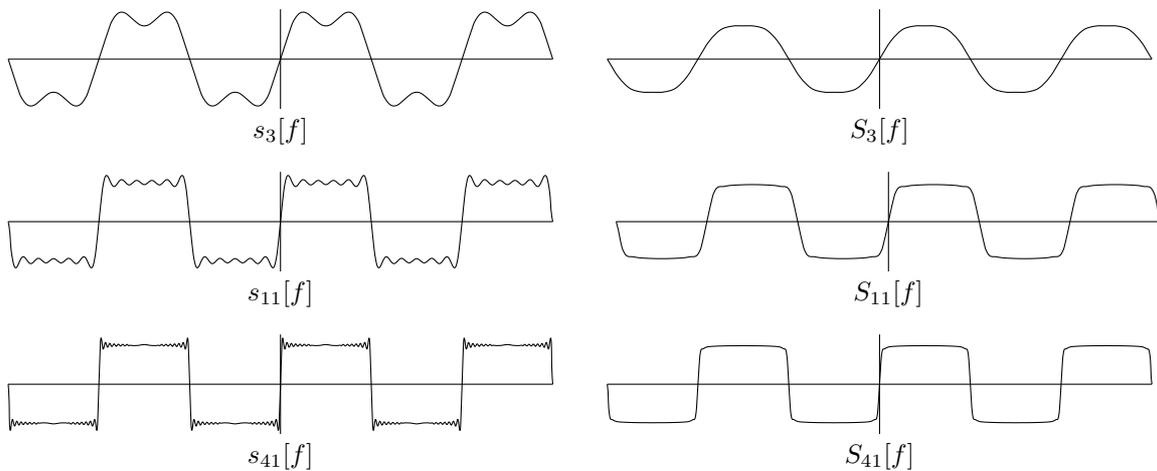
$$\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (f(a+\epsilon) - f(a-\epsilon)) h(x-a)$$

とおくと、 $\tilde{f}(x)$  は収束定理の仮定を満たし、 $x = a$  では連続となる。  $\tilde{f}(x)$  のフーリエ級数展開は  $x = a$  の近傍で一様収束することから、上の右辺から定理の主張が分かる。

なお  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n[f](a-\epsilon) < \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n[f](a+\epsilon)$  のときの  $x = a$  におけるオーバーシュートとは

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < t < \epsilon} s_n[f](a+t) - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n[f](a+\epsilon). \tag{91}$$

フェイェール総和法 (など) を使うと、このようなオーバーシュートは生じない。



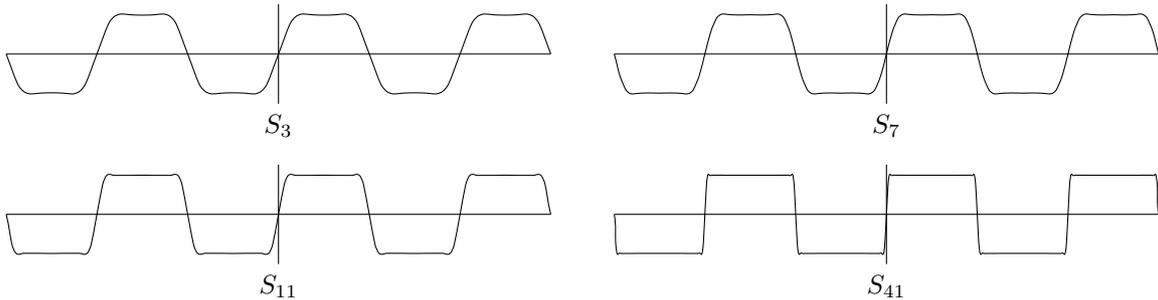
フーリエ級数の総和法として

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_{k,n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (92)$$

のように  $\rho_{k,n}$  という重みをつけた総和が考えられる. チェザロ総和法は  $\rho_{k,n} = 1 - \frac{k}{n}$  である. また

$$\rho_{k,n} = \frac{\sin \frac{\pi k}{n}}{\frac{\pi k}{n}} \quad (93)$$

はシグマ総和法という. このときは



## 2.16 一様分布

実数  $r$  に対し,  $n \leq r < n+1$  を満たす整数  $n$  がただ一つ定まるが, その整数は  $[r]$  と書かれる<sup>\*22</sup>.  $r - [r]$  は 0 以上 1 未満の実数となるが, この節ではそれを  $\{r\}$  で表すことにする.  $r$  が非負の実数の時は,  $[r]$  を  $r$  の整数部分,  $\{r\}$  を  $r$  の小数部分という.

この節では  $\{nr\} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  という  $[0, 1)$  の部分集合について考察する.  $r$  が有理数のときは,  $r = \frac{q}{p}$  と既約分数に表すことにより,

$$\{nr\} \mid n = 1, 2, 3, \dots\} = \left\{ \frac{k}{p} \mid k = 0, 1, \dots, p-1 \right\} \quad (94)$$

となることがたとえば以下のようにして分かる.

$r = \frac{q}{p}$  と既約分数で表す.  $p > 0$  で  $p$  と  $q$  は互いに素である. よって  $kq + lp = 1$  となる正数  $k, m$  が存在する. このとき  $((k + p\nu)q + (\ell - q\nu)p = 1, \nu = 1, 2, 3, \dots$  であるから)  $k > 0$  としてよい. すると  $m = 0, 1, \dots, p-1$  に対し  $km \cdot \frac{q}{p} + m\ell = \frac{m}{p}$  より  $\{km \frac{q}{p}\} = \frac{m}{p}$  となって, 右辺の元は左辺に含まれる.

$r$  が無理数のときは,  $m, n$  が異なる整数の時  $\{mr\} \neq \{nr\}$  となるので. 上の左辺の集合は無限集合となることが分かるが,  $\{r\}, \{2r\}, \{3r\}, \dots, \{nr\}, \dots$  は  $[0, 1)$  に密に分布することが以下の定理から分かる.

**定理.**  $r$  を無理数とする. 任意の実数  $x \in [0, 1]$  と正整数  $N$  に対して, 自然数列  $\{a_n\}$  を適当にとると以下が成立する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n r\} = x.$$

**証明.** 正整数  $n$  を固定して考える.  $\{\{1r\}, \{2r\}, \dots, \{(n+1)r\}\}$  を小さい順に並べ替えて  $\{\{k_1 r\}, \{k_2 r\}, \dots, \{k_{n+1} r\}\}$  とおく ( $\{1, 2, \dots, n+1\} = \{k_1, k_2, \dots, k_{n+1}\}$ ).  $\sum_{\nu=1}^n (\{k_{\nu+1} r\} - \{k_\nu r\}) < 1$

<sup>\*22</sup> Gauss 記号という.

なので  $0 < \{k_{m+1}r\} - \{k_m r\} < \frac{1}{n}$  を満たす  $m$  が存在する.  $p = |k_{m+1} - k_m|$  とおくと  $0 < \{pr\} < \frac{1}{p}$  あるいは  $1 - \frac{1}{n} < \{pr\} < 1$  が成立し, 適当に  $q$  を選べば  $|\{qpr\} - x| < \frac{1}{2n}$  となるので  $a_n = pq$  とおけばよい.

**定理.**  $f(x)$  を周期 1 の連続関数とする. 実数  $r$  が無理数ならば以下が成立する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(kr) = \int_0^1 f(x) dx.$$

**証明.** 任意の  $\epsilon > 0$  に対して,  $|f(x) - g(x)| < \epsilon$  を満たす有限フーリエ級数

$$g(x) = \sum_{\nu=-m}^m c_\nu e^{2\pi i \nu x}$$

が存在する. すなわち,  $m$  と  $c_{\pm\nu}$  ( $\nu = 0, 1, \dots, m$ ) が存在する. このとき

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(kr) - \int_0^1 f(x) dx \right| &\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(kr) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(kr) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(kr) - \int_0^1 g(x) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (f(kr) - g(kr)) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^m (c_\nu e^{2\pi i k \nu r} + c_{-\nu} e^{-2\pi i k \nu r}) \right| + \int_0^1 |g(x) - f(x)| dx \\ &< \epsilon + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^m \left| c_\nu e^{2\pi i \nu r} \frac{1 - e^{2\pi i m \nu r}}{1 - e^{2\pi i \nu r}} + c_{-\nu} e^{-2\pi i \nu r} \frac{1 - e^{-2\pi i m \nu r}}{1 - e^{-2\pi i \nu r}} \right| + \epsilon \\ &< 2\epsilon + \frac{1}{n} \left( \sum_{\nu=1}^m \frac{2|c_\nu|}{|1 - e^{2\pi i \nu r}|} + \sum_{\nu=1}^m \frac{2|c_{-\nu}|}{|1 - e^{-2\pi i \nu r}|} \right) \end{aligned}$$

よって十分大きな  $n$  に対して, 上の値は  $3\epsilon$  以下になる.

**定理.**  $a, b$  を  $0 \leq a \leq b \leq 1$  を満たす実数とし,  $r$  を無理数とする. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \in \{1, \dots, n\} \mid a \leq \{kr\} \leq b\}}{n} = b - a.$$

**証明.**  $\chi_{[a,b]} = \begin{cases} 1 & (x \in [a, b]) \\ 0 & (x \notin [a, b]) \end{cases}$  とおくと上式の左辺は  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{[a,b]}(\{kr\})$  で, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して

$$f_-(x) \leq \chi_{[a,b]}(x) \leq f_+(x) \quad (x \in [0, 1]), \quad \int_0^1 (f_+(x) - f_-(x)) dx < \epsilon, \quad f_\pm(x+1) = f_\pm(x)$$

を満たす連続関数  $f_\pm(x)$  が存在する. このとき  $|\int_0^1 f_\pm(x) dx - (b-a)| < \epsilon$  となって

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_-(kr) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{[a,b]}(\{kr\}) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_+(kr)$$

であるが,  $n$  が十分大きいならば

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_\pm(kr) - \int_0^1 f_\pm(x) dx \right| < \epsilon$$

となるので  $|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{[a,b]}(\{kr\}) - (b-a)| < 2\epsilon$  である.

より一般に

**定理.**  $f(x)$  が  $[0, 1]$  上の (Riemann) 積分可能な関数ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{kr\}) = \int_0^1 f(x) dx.$$

**証明.** 正整数  $N$  に対して  $I_{N,j} = [\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}]$ ,  $m_{j,\nu} = \inf_{x \in I_{N,j}} f(x)$ ,  $M_{j,\nu} = \sup_{x \in I_{N,j}} f(x)$ ,  $f_N^-(x) = \sum_{\nu=1}^N m_{N,\nu} \chi_{I_\nu}(x)$ ,  $f_N^+(x) = \sum_{\nu=1}^N M_{N,\nu} \chi_{I_\nu}(x)$ , とおく.  $f_N^-(x) \leq f(x) \leq f_N^+(x)$  に注意.

$\forall \epsilon > 0$  に対して  $N$  を十分大きくとれば  $0 < \int_0^1 f_N^+(x) dx - \int_0^1 f_N^-(x) dx < \epsilon$  となる. このとき  $|\int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f_N^+(x) dx| < \epsilon$ .

一方前定理より, 正整数  $K$  があって  $n \geq K$  ならば  $|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_N^+(\{kr\}) - \int_0^1 f_N^+(x) dx| < \epsilon$  となる. よって  $n > K$  ならば

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{kr\}) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_N^+(\{kr\}) < \int_0^1 f_N^+(x) dx + \epsilon < \int_0^1 f(x) dx + 2\epsilon, \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{kr\}) &\geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_N^-(\{kr\}) > \int_0^1 f_N^-(x) dx - \epsilon > \int_0^1 f(x) dx - 2\epsilon, \end{aligned}$$

すなわち  $|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{kr\}) - \int_0^1 f(x) dx| < 2\epsilon$ .

## 2.17 例 (無限積)

$\alpha$  を整数ではない正の実数とするととき  $f(x) = \cos \alpha x$  ( $-\pi < x \leq \pi$ ) を満たす周期  $2\pi$  の周期関数のフーリエ級数展開を求めよう.  $f(x)$  は偶関数であるから

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha x \cdot \cos n x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(\alpha+n)x + \cos(\alpha-n)x) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{(-1)^n \sin \alpha \pi}{\alpha+n} + \frac{(-1)^{n+1} \sin \alpha \pi}{\alpha-n} \right) = \frac{(-1)^n \sin \alpha \pi}{\pi} \left( \frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha} \right) = \frac{2(-1)^n \alpha \sin \alpha \pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}. \end{aligned}$$

このときフーリエ級数は一様収束して

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos n x \right) \quad (95)$$

となる. 特に  $x = \pi$  とおくと

$$\cot \alpha \pi = \frac{\cos \alpha \pi}{\sin \alpha \pi} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \right)$$

となるので

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \pi \cot \alpha \pi - \frac{1}{\alpha}. \quad (96)$$

左辺の級数を  $[0, \alpha]$  で項別積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} d\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\alpha \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} [\log |\alpha^2 - n^2|]_0^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (\log |\alpha^2 - n^2| - \log |-n^2|) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right) = \log \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right) \end{aligned}$$

となり，左辺の積分は

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \left(\pi \cot \alpha\pi - \frac{1}{\alpha}\right) d\alpha &= [\log |\sin \alpha\pi| - \log |\alpha|]_0^\alpha = \log \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha} - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha} \\ &= \log \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha} - \log \pi = \log \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \sin \alpha\pi &= \alpha\pi \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right), \\ \sin x &= x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{オイラーの無限乗積})$$

また  $\alpha = \frac{1}{2}$  とおくと

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{6^2}\right) \cdots \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{2^2 - 1}{2^2}\right) \left(\frac{4^2 - 1}{4^2}\right) \left(\frac{6^2 - 1}{6^2}\right) \cdots \left(\frac{(2n)^2 - 1}{(2n)^2}\right) \cdots \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdots \frac{(2n-1) \cdot (2n+1)}{(2n) \cdot (2n)} \cdots, \\ \frac{\pi}{2} &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} \end{aligned} \quad (\text{ウォリスの公式})$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} &= \frac{(2 + \frac{1}{n})(2n)!!(2n)!!n}{(2n+1)!!(2n+1)!!} \quad \text{であるから} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!\sqrt{n}}{(2n+1)!!} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{1}{4}$  とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\pi}{4} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(4n)^2}\right) = \frac{\pi}{4} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-1)(4n+1)}{(4n)(4n)}, \\ \frac{\pi}{2} &= \sqrt{2} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \frac{12 \cdot 12}{11 \cdot 13} \cdots \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{1}{3}$  とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\pi}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(3n)^2}\right) = \frac{\pi}{4} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)(3n)}, \\ \frac{\pi}{2} &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdots \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{1}{6}$  とおくと

$$\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(6n)^2}\right) = \frac{\pi}{4} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(6n-1)(6n+1)}{(6n)(6n)},$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{12 \cdot 12}{11 \cdot 13} \cdot \frac{18 \cdot 18}{17 \cdot 19} \cdots$$

$\alpha = \frac{1}{2}$  と  $\alpha = \frac{1}{4}$  との比から

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}\right) / \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(4k)(4k)}{(4k-1)(4k+1)}\right),$$

$$\sqrt{2} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(4m-2)(4m-2)}{(4m-3)(4m-1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \cdots$$

$\alpha = \frac{1}{3}$  と  $\alpha = \frac{1}{6}$  との比から

$$1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(3n)(3n)}{(3n-1)(3n+1)}\right) / \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(6k)(6k)}{(6k-1)(6k+1)}\right),$$

$$\sqrt{3} = \frac{3}{2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(6m-3)(6m-3)}{(6m-4)(6m-2)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \frac{12 \cdot 12}{11 \cdot 13} \cdots$$

## 2.18 離散フーリエ級数

周期  $2\pi$  の連続な周期関数  $f(x)$  を有限フーリエ級数で近似することを考える。

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

そこで  $[0, 2\pi]$  を  $(2n+1)$  等分してできる  $2n+1$  個の点  $x = x_\nu := \frac{2\nu\pi}{2n+1}$  ( $\nu = 0, \dots, 2n$ ) で上の左辺と右辺が一致するように  $2n+1$  個の数  $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  を決めることを考察する。

異なる基底として  $\{e^{ikx} \mid k = -n, -(n-1), \dots, 0, \dots, n\}$  をとって

$$f(x_\nu) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx_\nu} = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i \frac{2k\nu}{2n+1} \pi} \quad (\nu = 0, \dots, 2n) \quad (97)$$

を解けばよい。そこで  $\ell \in \mathbb{Z}$  とすると

$$\sum_{\nu=0}^{2n} e^{i \frac{2k\nu}{2n+1} \pi} e^{-i \frac{2\ell\nu}{2n+1} \pi} = \sum_{\nu=0}^{2n} e^{i \frac{2(k-\ell)\nu}{2n+1} \pi} = \begin{cases} 0 & (k-\ell \notin (2n+1)\mathbb{Z}) \\ 2n+1 & (k=\ell) \end{cases}$$

であるので、(97) の両辺に  $e^{-i \frac{2\ell\nu}{2n+1} \pi}$  を掛けたものを  $\nu = 0, 1, \dots, 2n$  に対して足し合わせて  $2n+1$  で割ると

$$c_\ell = \frac{1}{2n+1} \sum_{\nu=0}^{2n} e^{-i \frac{2\ell\nu}{2n+1} \pi} f(x_\nu) \quad (\ell = -n, \dots, 0, \dots, n) \quad (98)$$

を得る。  $a_\ell = c_\ell + c_{-\ell}$ ,  $b_\ell = \frac{c_\ell - c_{-\ell}}{i}$  であるから、 $\ell$  を  $k$  に置き換えると以下が分かる。

$$\begin{cases} a_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{\nu=0}^{2n} \cos \frac{2k\nu}{2n+1} \pi \cdot f\left(\frac{2\nu}{2n+1} \pi\right), \\ b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{\nu=0}^{2n} \sin \frac{2k\nu}{2n+1} \pi \cdot f\left(\frac{2\nu}{2n+1} \pi\right). \end{cases} \quad (99)$$

これを離散フーリエ級数展開という。

なお

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n+1} \sum_{\nu=0}^{2n} \cos \frac{2k\nu}{2n+1} \pi \cdot f\left(\frac{2\nu}{2n+1} \pi\right) &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{2n} \cos \frac{2\nu}{2n+1} k\pi \cdot f\left(\frac{2\nu}{2n+1} \pi\right) \cdot \frac{2\pi}{2n+1} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos kx \cdot f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

などとなることに注意。

## 2.19 熱伝導方程式

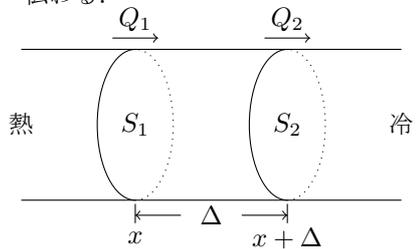
金属棒の片側を熱し、もう一端を冷やすと、熱は熱い方から冷たい方へ伝わる。

金属棒の端から  $x$  の点における時刻  $t$  での温度を  $u(t, x)$  とおく。

単位時間あたりで考えたとき、金属棒の単位断面あたりの熱流量

$Q$  は温度勾配  $\frac{du}{dx}$  に比例し<sup>\*23</sup>、その比例定数  $K$  を熱伝導度という。

$$Q = -K \frac{\partial u}{\partial x}$$



金属棒の断面積を  $S$  とすると、位置  $x$  と  $x + \Delta$  との間の部分に、単位時間あたりに蓄積する熱量は、差し引き  $Q_1 S - Q_2 S$  となる。金属棒の密度を  $\rho$  とおくと、この部分の質量は  $\rho S \Delta$  となるので、比熱を  $c$  とすると、この部分の単位時間あたりの温度変化は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{c \rho S \Delta} (Q_1 S - Q_2 S) = \frac{1}{c \rho} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{-K u_x(t, x) + K u_x(t, x + \Delta)}{\Delta} = \frac{K}{c \rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

で与えられる。 $C = \frac{K}{c \rho}$  とおき、これを温度伝導率という。このとき

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (100)$$

であるが、これを熱伝導方程式という。なお、 $C$  は正の実数である。

**注意.**  $u(t, x)$  を熱伝導方程式の解とする。このとき  $A > 0$  に対し、 $u\left(\frac{t}{A^2}, \frac{x}{A}\right)$  も解になる。

### 2.19.1 円環の場合

半径 1 の輪の形の針金を熱が伝わる場合を考察してみよう。時刻  $t$  において、中心からの偏角が  $x$  の針金の点での温度を  $u(t, x)$  とする。 $u(t, x) = u(t, x + 2\pi)$  であるから、 $u(t, x)$  が  $x$  について区分的に  $C^1$  級であれば、 $x$  についてフーリエ級数展開をして

$$u(t, x) = \frac{\tilde{a}_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \tilde{a}_n(t) \cos nx + \tilde{b}_n(t) \sin nx \right)$$

と表せる。 $u(t, x)$  は  $(t, x)$  について微分可能として (100) に代入すれば

$$\frac{\tilde{a}'_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \tilde{a}'_n(t) \cos nx + \tilde{b}'_n(t) \sin nx \right) = -C \sum_{n=1}^{\infty} \left( n^2 \tilde{a}_n(t) \cos nx + n^2 \tilde{b}_n(t) \sin nx \right)$$

<sup>\*23</sup> フーリエの法則 (1822)

となるので

$$\tilde{a}'_n(t) = -n^2 C \tilde{a}_n(t), \quad \tilde{b}'_n(t) = -n^2 C \tilde{b}_n(t)$$

が分かる. よって  $\tilde{a}_n(t) = \alpha_n e^{-n^2 C t}$ ,  $\tilde{b}_n(t) = \beta_n e^{-n^2 C t}$  と表せる ( $\alpha_n, \beta_n$  は実数).

時刻  $t$  での温度分布

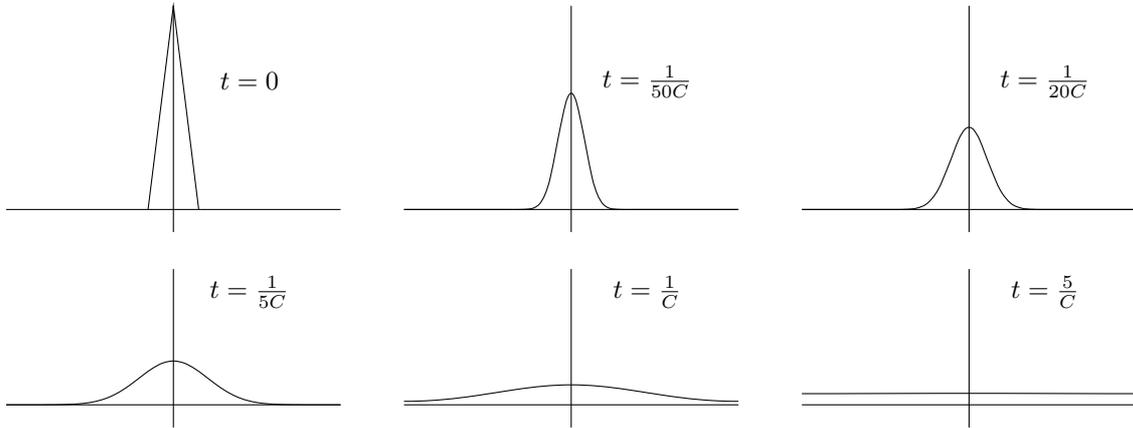
$$u(0, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

が分かっていたとして,  $t > 0$  での温度分布は  $\tilde{a}_n(0) = a_n$ ,  $\tilde{b}_n(0) = b_n$  であるから

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{-C n^2 t} \cos nx + b_n e^{-C n^2 t} \sin nx)$$

で与えられる. 特に  $t > 0$  において  $u(t, x)$  は  $C^\infty$  級となる.

$u(0, x) = \max\{3(1 - 3|x|), 0\}$  ( $|x| \leq \pi$ ) のときの温度分布の時間変化

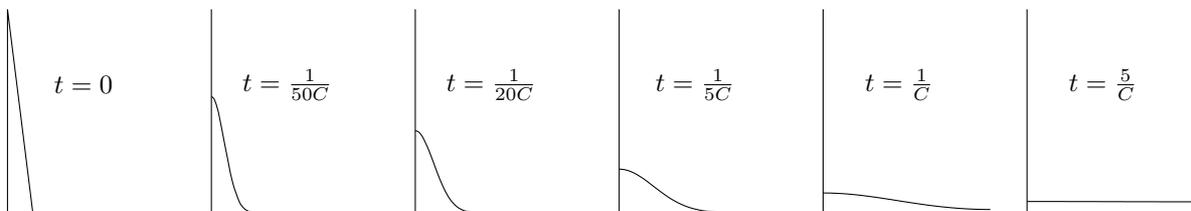


### 2.19.2 両端から熱の出入りがない場合

簡単のため, 金属棒の長さを  $\pi$  とし, その位置を  $x \in [0, \pi]$  で表して, 時刻  $t$  の温度を  $u(t, x)$  とする.  $u(t, x)$  を  $x$  について周期  $2\pi$  の偶関数に拡張し,  $x$  を半径 1 の円環の点を表すと考える.  $x \in (-\pi, 0)$  でも熱方程式を満たす. この場合,  $x = 0$  の点と  $x = \pi$  の点の両側での温度分布は対称なのでその点を通しての熱の出入りはない. よって円環状の場合の方程式を解くことに帰着される. たとえば

$$u(0, x) = \begin{cases} 3(1 - 3x) & (0 \leq x \leq \frac{1}{3}) \\ 0 & (\frac{1}{3} \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

の場合の解は, 円環の場合に図示した解を  $x \in [0, \pi]$  に制限したものになっている. 図示すれば



より一般には

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t \geq 0, x \in [0, \pi]) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) = v(x) \end{cases}$$

という熱伝導方程式の初期境界値問題をフーリエ級数を使って解くことができる。

すなわち,  $u(t, x) = u(t, -x)$ ,  $u(t, x + 2\pi) = u(t, x)$  を満たす関数に対する熱伝導方程式, すなわち円環上の熱伝導方程式の場合に帰着する。

### 2.19.3 両端を一定温度に保った場合

たとえば  $2000^\circ\text{C}$  に熱せられた金属棒があったとする。その両端を  $0^\circ\text{C}$  の恒温槽で冷やしたとして以降の温度分布の変化を知りたいとする。金属棒からの熱の出入りは両端以外からはないものとする。

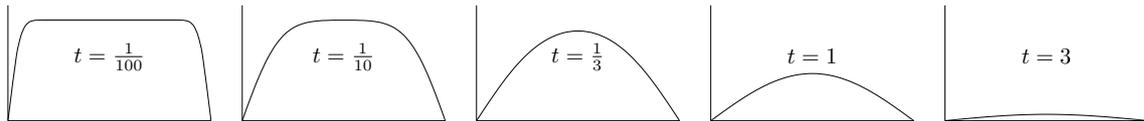
金属棒の長さを  $\pi$  として, 金属棒の端からの位置  $x$  ( $x \in [0, \pi]$ ) の  $t$  秒後の温度を  $u(t, x)$  とする。関数  $u(t, x)$  を  $x$  について周期  $2\pi$  の奇関数に拡張する。このとき  $u(t, x) = -u(t, -x) = u(t, -x + 2\pi)$  において  $x = 0, \pi$  とおくと,  $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$  となる。

円環の場合の熱方程式の解は,  $t = 0$  での初期関数  $u(0, x)$  が  $x$  について奇関数ならば,  $u(t, x)$  も同様に  $x$  について奇関数となることに注意しよう。よって金属棒の両端の温度を  $0$  に保つ場合の金属棒の温度分布の時間変化は, 2倍の長さの円環の場合で  $x$  について奇関数となる熱方程式の問題に帰着することが分かる。

よって, 温度  $T^\circ\text{C}$  の長さ  $\pi$  の金属棒の両端を  $0^\circ\text{C}$  に冷やしたときの温度変化  $u(t, x)$  は, 円環で方形波の初期値を与えた場合に対応するので

$$u(t, x) = \frac{4T}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)^2 Ct}}{2n+1} \sin(2n+1)x \quad (x \in [0, \pi])$$

で与えられる。  $C = 1$  として図示すると, 以下のようなになる。

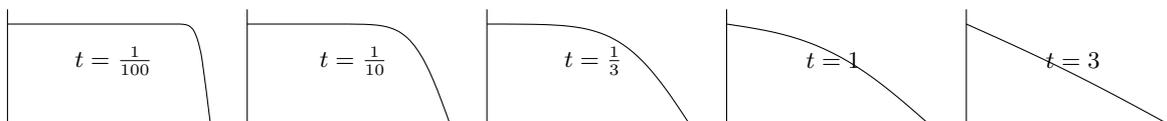


**両端の温度が異なる場合:** 金属棒の一端 ( $x = 0$  に対応) を  $a^\circ\text{C}$  に, 他端 ( $x = \pi$  に対応) を  $b^\circ\text{C}$  に保った場合を考えよう。位置  $x$  での温度が  $a + \frac{b(x-a)}{b-a}$  となっている場合は, 安定していて温度変化は起こらない ( $\bar{u}(t, x) = a + \frac{bx}{(b-a)\pi}$  は熱方程式の解)。よって  $\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - \bar{u}(t, x)$  は, 両端の温度を  $0^\circ\text{C}$  に保った場合の解となる。

たとえば, 温度が  $T^\circ\text{C}$  の棒の一端 ( $x = 0$ ) を同じ温度に保ち, 他端 ( $x = \pi$ ) を  $0^\circ$  に冷やした場合の温度変化は, この  $\tilde{u}(t, x)$  で与えられ, それは初期値  $\tilde{u}(0, x)$  として鋸波を与えた場合となる。すなわち

$$u(t, x) = \frac{T(\pi - x)}{\pi} + \frac{2T}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-n^2 Ct} \sin nx \quad (x \in [0, \pi])$$

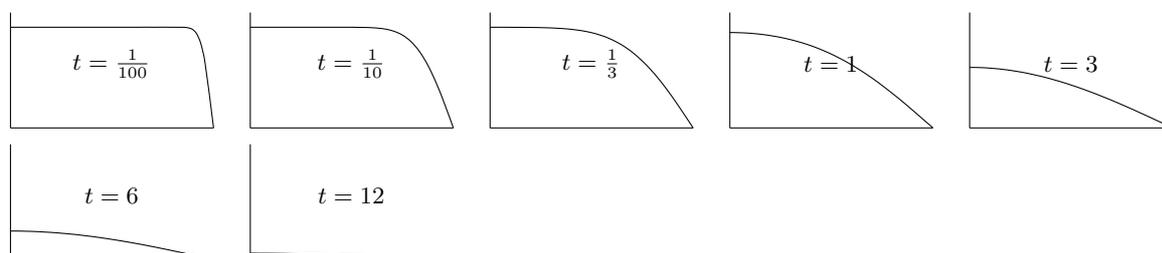
となり,  $C = 1$  として図示すれば以下のようなになる。



### 2.19.4 片端を断熱し，他端を一定温度に保った場合

長さ  $\pi$  の棒の一端  $x = 0$  を断熱状態に保ち，他端  $x = \pi$  を一定温度に保つ場合の温度変化  $u(t, x)$  を考えてみよう．端  $x = 0$  は断熱状態なので  $u(t, x)$  を偶関数に拡張すれば，長さ  $2\pi$  の棒 ( $x \in [-\pi, \pi]$ ) の金属棒で，両端を同じ温度に保つときの温度分布に対応する．そこで  $\tilde{u}(t, x) = u(t, 2x - \pi)$  とおくと， $x \in [0, \pi]$  となって長さ  $\pi$  の棒で，両端を一定温度に同じ一定温度に保つ場合になる．棒の長さを半分に変換するので，時間スケールは  $\frac{1}{4}$  となる．すなわち，両端を一定の温度に保つ場合の  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  の部分を 2 倍に拡大した温度変化となり，時間の進み具合は  $\frac{1}{4}$  となる．

温度が  $T^\circ\text{C}$  の金属棒の一端を断熱状態で，他端を  $0^\circ$  に保った場合の金属棒の温度変化は，両端を  $0^\circ\text{C}$  に保った場合の温度分布の図の  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  の部分を 2 倍に拡大した図になり，温度変化は  $\frac{1}{4}$  倍に遅くなる．図示すると以下ようになる．



### 2.19.5 無限に長い金属棒の場合

たとえば  $u(0, x) = \max\{\frac{T-|x|}{T^2}, 0\}$  という初期条件で，無限に長い金属棒の場合を考えてみよう． $u(0, x)$  は  $|x| \geq T$  では 0 なので， $u(t, x)$  は  $|x| \rightarrow \infty$  のとき 0 に近づくと考えられ，この初期条件での長さ  $2\pi L$  の円環における熱分布の  $L \rightarrow \infty$  の極限が  $u(t, x)$  を与えると考えられる．

周期  $2\pi L$  の区分的に滑らかな関数  $f(x)$  の複素フーリエ級数展開は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n}{L}x} \quad (c_n := \frac{1}{2\pi L} \int_{-\pi L}^{\pi L} f(x) e^{-i\frac{n}{L}x} dx)$$

で与えられる．

$f(x) = u(0, x)$  ( $|x| \leq 2\pi L$ ) のときは

$$c_n = \frac{1}{2\pi L} \int_{-L}^L u(0, x) e^{-i\frac{n}{L}x} dx = \frac{1}{2\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} u(0, x) e^{-i\frac{n}{L}x} dx$$

となる．そこで， $(-\infty, \infty)$  で可積分な関数  $\varphi(x)$  に対して

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\xi x} dx$$

において，それを  $\varphi(x)$  のフーリエ変換という．すなわち  $\varphi(x) = u(0, x)$  のとき

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T \frac{T-|x|}{T^2} e^{-i\xi x} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T \frac{T-x}{T^2} \cos \xi x dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{T-x}{T^2} \frac{\sin \xi x}{\xi} \right]_{x=0}^{x=T} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T \frac{\sin \xi x}{\xi T^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - \cos \xi T}{\xi^2 T^2} \quad \left( \text{ただし, } \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \end{aligned} \tag{101}$$

となり

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\varphi}\left(\frac{n}{L}\right) e^{i\frac{n}{L}x} \frac{1}{L} \quad (|x| \leq \pi L)$$

が成り立つ。一方

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots$$

で、右辺は交代級数で  $|x| \leq 3$  のとき、各項の絶対値は 0 に単調減少する。特に  $0 \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{4}{1+x^2}$  が成り立つ。

上のフーリエ級数の展開式で  $L \rightarrow +\infty$  とすると、フーリエ逆変換あるいはフーリエ積分表示

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\xi) e^{i\xi x} dx$$

を得る\*24。

このとき熱伝導方程式の解は以下で与えられる\*25。

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-C\xi^2 t} \hat{\varphi}(\xi) e^{i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-C\xi^2 t} e^{i\xi(x-y)} u(0, y) dy d\xi. \end{aligned}$$

$t > 0$  のとき、積分順序が交換でき、そのときに現れる  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-C\xi^2 t} e^{i\xi(x-y)} d\xi$  を計算しよう。まず

$$\frac{\partial e^{-(\xi+ix)^2}}{\partial x} = i \frac{\partial e^{-(\xi+ix)^2}}{\partial \xi}$$

であるから

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi+ix)^2} d\xi$$

とおくと

$$w'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial e^{-(\xi+ix)^2}}{\partial x} d\xi = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial e^{-(\xi+ix)^2}}{\partial \xi} d\xi = i \left[ e^{-(\xi+ix)^2} \right]_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} = 0.$$

よって

$$w(x) = w(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$$

を得るので\*26

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-C\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi\sqrt{Ct} - \frac{ix}{2\sqrt{Ct}})^2 - \frac{x^2}{4Ct}} d\xi = e^{-\frac{x^2}{4Ct}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\eta - \frac{ix}{2\sqrt{Ct}})^2} \frac{d\eta}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{Ct}} e^{-\frac{x^2}{4Ct}} \quad (102)$$

\*24 関数  $\varphi(x)$  が  $C^2$  級で、 $|x| > R \Rightarrow \varphi(x) = 0$  となる  $R > 0$  が存在すれば、全く同様の議論でフーリエ逆変換公式が成り立つ。

\*25  $u(t, x)$  が熱伝導方程式を満たすことは、フーリエ積分表示から容易に確かめられる

\*26  $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[ -\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_{r=0}^{r=\infty} = \pi.$

よって熱核  $H(t, x)$  を

$$H(t, x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \quad (103)$$

と定義すると、無限に長い金属棒の初期値  $u(0, x)$  の熱伝導方程式の解は

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(0, y) H(Ct, x - y) dy \quad (104)$$

によって与えられる.

熱核  $H(t, x)$  は

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad 0 < H(t, x) < \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} H(t, x) dx = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \int_{|x| > \epsilon} H(t, x) dx = 0 \quad (\forall \epsilon > 0)$$

を満たすことが容易に確かめられる.

このことから、任意の  $\mathbb{R}$  上の有界な連続関数  $v(x)$  に対して、熱伝導方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t > 0, x \in \mathbb{R}) \\ u(0, x) = v(x) \end{cases} \quad (105)$$

の解  $u(t, x)$  が上式で与えられることが分かる ( $u(t, x)$  は  $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$  で連続な関数).

問. 上を示せ.

問.  $x$  を固定したとき  $H(t, x)$  ( $t > 0$ ) の最大値を求めよ.

注意.  $H(t, x) > 0$  であるので、 $u(0, x)$  が恒等的に 0 でない非負値をとる関数とすると、 $|x| \geq R$  のとき  $u(0, x) = 0$  となる  $R > 0$  が存在しても、 $t > 0$  ならば  $u(t, x) > 0$  となる. いくら離れていてもそこに影響が及ぶ熱の伝わる速度は無量大である (ただし離れるほど影響は小さい). すなわち

$$\begin{cases} u(0, x) \geq 0 & (|x| < R) \\ u(0, x) = 0 & (|x| \geq R) \end{cases} \Rightarrow 0 < u(t, x) \leq H(Ct, |x| - R) \int_{-R}^R u(0, x) dx \quad (|x| \geq R)$$

### 3 フーリエ変換

#### 3.1 基本的性質

積分可能な関数  $f(x)$ <sup>\*27</sup> に対し、そのフーリエ変換  $\mathcal{F}f$  あるいは  $\hat{f}$  と逆フーリエ変換  $\mathcal{F}^{-1}f$  または  $f^\vee$  を

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \\ \mathcal{F}^{-1}f(x) = f^\vee(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi \end{aligned}$$

と定義する. このとき  $\hat{f}$  は有界な連続関数で

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \quad (106)$$

<sup>\*27</sup> ここでは、広義積分  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  が存在する関数とする.

また、クラス  $\mathcal{S}^m$  の関数  $f(x)$  とは、 $f(x)$  が  $C^m$  級関数であって

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{A_k}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}} \quad (k=0, \dots, m)$$

となる実数  $A_k$  が存在する関数のこととする。クラス  $\mathcal{S}$  の関数とは、どの  $\mathcal{S}^m$  クラスにも属している関数のこととする\*28。  $\mathbb{R}$  上のクラス  $\mathcal{S}$  の関数の全体を  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  で表し、**急減少関数の空間**という。

$f$  がクラス  $\mathcal{S}^3$  の関数の時に以下が成立する。

$$\widehat{(f')}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi), \quad \widehat{(xf)}(\xi) = i(\widehat{f})'(\xi), \quad (107)$$

$$\widehat{f(x+c)}(\xi) = e^{i\xi c} \widehat{f}(\xi), \quad \widehat{f(Cx)}(\xi) = \frac{1}{|C|} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{C}\right) \quad (C \neq 0), \quad (108)$$

$$\widehat{\bar{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi), \quad f(\pm x) = \pm f(x) \Rightarrow \widehat{f}(\pm \xi) = \pm \widehat{f}(\xi). \quad (109)$$

実際

$$\begin{aligned} \widehat{(f')}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( [f(x) e^{-i\xi x}]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-i\xi) e^{-i\xi x} dx \right) \\ &= i\xi \widehat{f}(\xi), \\ (\widehat{f})'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-ix) e^{-i\xi x} dx = -i(\widehat{xf})(\xi), \\ \widehat{f(x+c)}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+c) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi(y-c)} dy = e^{i\xi c} \widehat{f}(\xi), \\ \widehat{f(Cx)}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(Cx) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(Cx) e^{-i\frac{\xi}{C} Cx} \frac{d(Cx)}{|C|} = \frac{1}{|C|} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{C}\right), \\ \widehat{\bar{f}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x) e^{-ix\xi} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx} = \widehat{f}(-\xi) \end{aligned}$$

最後の式は、 $C = \pm 1$  とおけば得られる。

例. 
$$\mathcal{F} \max \left\{ \frac{T-|x|}{T^2}, 0 \right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - \cos \xi T}{\xi^2 T^2}, \quad (110)$$

$$\widehat{e^{-t\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi^2}{2t}} \quad (t > 0), \quad (111)$$

$$\widehat{e^{-t|x|}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2t}{\xi^2 + t^2} \quad (t > 0), \quad (112)$$

$$\widehat{\chi_{[-T,T]}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi T}{\xi} \quad \left( \chi_{[-T,T]}(x) := \begin{cases} 1 & (|x| < T) \\ 0 & (|x| \geq T) \end{cases} \right). \quad (113)$$

最初の式は (101) で次のもの (102) において  $C = \frac{1}{2}$  とおけば得られる。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t|x|} e^{i\xi x} dx &= 2 \int_0^{\infty} e^{-tx} \cos \xi x dx = 2 \left[ \frac{e^{-tx} (\xi \sin \xi x - t \cos \xi x)}{\xi^2 + t^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{2t}{\xi^2 + t^2}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-T,T]} e^{i\xi x} dx &= 2 \int_0^T \cos \xi x dx = 2 \left[ \frac{\sin \xi x}{\xi} \right]_{x=0}^{x=T} = \frac{2 \sin \xi T}{\xi}. \end{aligned}$$

\*28 たとえば、多項式と  $e^{-x^2}$  の積はこのクラスに属する。

定理.  $f$  がクラス  $\mathcal{S}^2$  の関数ならば,  $\hat{f}$  は可積分で,

$$(\hat{f})^\vee(x) = f(x).$$

特に  $\mathcal{F}$  は  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  から  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  の上への全単射となる.

証明.  $\widehat{f''}(\xi) = (i\xi)^2 \hat{f}(\xi)$  より  $|\xi^2 \hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| dx < \infty$  で,  $\hat{f}$  は可積分.

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) H(t, x-y) dy = \lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi(x-y)} d\xi \right) dy \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x} \mathcal{F}f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \mathcal{F}f(\xi) d\xi = (\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}f)(x). \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  に対して  $(i\xi)^m (\hat{f})^{(n)} = \mathcal{F} \left( ((-ix)^n f(x))^{(m)} \right)$  より  $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  が分かる.  $\mathcal{F}^{-1}$  も同様.

### 3.2 パーセヴァルの等式

$f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  の合成積  $f * g$  を

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy$$

と定義する. このとき

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}. \quad (114)$$

実際

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) e^{-i\xi(x-y)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy = \widehat{f * g}(\xi). \end{aligned}$$

ここで  $g(x) = \bar{h}(-x)$  とおくと

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{h}(x) dx &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(0) = \sqrt{2\pi} \left( \mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \cdot \hat{g}) \right) (0) = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f} \cdot \hat{g})(\xi) d\xi, \\ \mathcal{F}g(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(-x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(x) e^{-i\xi x} dx = \overline{\hat{g}(\xi)}. \end{aligned}$$

よって  $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  の内積を

$$(f, h) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{h(x)} dx$$

によって定義するとフーリエ変換は内積を保つ. すなわち

$$(f, h) = (\hat{f}, \hat{h}) \quad (115)$$

で, 特に  $h = f$  とおくと以下のパーセヴァルの等式が得られる.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (116)$$

例. パーセヴァルの等式を (112), (113) に適用し,  $t = T = 1$  とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{8} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \frac{\pi}{8}, \quad (117)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}(x)^2 dx = \pi. \quad (118)$$

### 3.3 ポアソンの和公式

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  に対して

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi n)$$

は周期  $2\pi$  の  $C^\infty$  級周期関数となるのでフーリエ級数展開が可能で

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi n) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(y + 2\pi n) e^{ik(x-y)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(y + 2\pi n) e^{ik(x-y)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{ik(x-y)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \end{aligned}$$

となる. 特に  $x = 0$  とおくと

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

さらに  $f(x) = g\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right)$  とおくと,  $\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{g}(\sqrt{2\pi}\xi)$  となるので

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\sqrt{2\pi}n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(\sqrt{2\pi}n). \quad (119)$$

これをポアソンの和公式という.

例.  $g(x) = e^{-t\frac{(x+\sqrt{2\pi}c)^2}{2}}$  とおくと  $\hat{g}(\xi) = \frac{e^{i\sqrt{2\pi}\xi c}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi^2}{2t}}$  となる (cf. (111), (108)). このとき

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\sqrt{2\pi}n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t\frac{(\sqrt{2\pi}n+\sqrt{2\pi}c)^2}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t\pi n^2} e^{-2t\pi cn} e^{-t\pi c^2}, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(\sqrt{2\pi}n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi cn}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} \end{aligned}$$

となるので  $t$  を  $\frac{1}{t}$  に置き換えると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t\pi n^2} e^{i2\pi cn} = e^{-\frac{\pi c^2}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} e^{-\frac{2\pi cn}{t}} \quad (120)$$

が得られ (楕円テータ関数における **Jacobi の虚変換**), とくに  $c = 0$  とおくと

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-t\pi n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}. \quad (121)$$

なお  $q = e^{-t\pi}$ ,  $z = e^{i\pi c}$  とおくと (120) の左辺は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\pi n^2} \cos 2n\pi c \quad (122)$$

となる. これは楕円テータ関数  $\vartheta_3(it, c)$  と呼ばれ, 以下の熱伝導方程式を満たす\*29.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial c^2}.$$

例.  $g(x)e^{-t|x|}$  の場合 (cf. (112)) に適用し,  $r = \sqrt{2\pi s}$  とおくと

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{2\pi t}|n|} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{-\sqrt{2\pi t}} \right)^n = \frac{2}{1 - e^{-\sqrt{2\pi t}}} - 1 = \frac{1 + e^{-\sqrt{2\pi t}}}{1 - e^{-\sqrt{2\pi t}}} = \frac{e^{\pi s} + e^{-\pi s}}{e^{\pi s} - e^{-\pi s}}, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t}{(\sqrt{2\pi n})^2 + t^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t}{2\pi n^2 + t^2} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{s}{n^2 + s^2} \end{aligned}$$

となるので, 次式が得られる.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{s}{s^2 + n^2} = \pi \coth \pi s. \quad (123)$$

### 3.4 熱伝導方程式とフーリエ変換

再び, 熱伝導方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, x) = v(x) \end{cases}$$

を考えよう.  $u(t, x)$  は  $t$  については 1 階,  $x$  については 2 階までの微分ができて, それらの導関数は  $x$  について可積分で  $|x| \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束すると仮定する.

このとき

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_{-\infty}^{\infty} C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \left[ C \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0$$

すなわち,  $\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) dx$  は時間  $t$  に依らず一定であることが分かる. これは, 総熱エネルギーの保存を意味する (外部との熱の出入りがない状態).

$u(t, x)$  を  $x$  についてフーリエ変換した関数を  $\hat{u}(t, \xi)$  とおく.  $\mathcal{F} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (i\xi)^2 \hat{u}(t, \xi) = -\xi^2 \hat{u}(t, \xi)$  となるので, 熱伝導の方程式より

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -C \xi^2 \hat{u}$$

\*29  $t$  は実部が正の複素数,  $c$  は任意の複素数で定義される.

を得る。これを満たす  $\hat{u}$  は、 $\hat{u}(t, \xi) = \varphi(\xi)e^{-C\xi^2 t}$  の形であることが分かる。  $t = 0$  とおくと  $\varphi(\xi) = \mathcal{F}v$  を得るので

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-C\xi^2 t} \mathcal{F}v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-C\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} v(y) e^{-i\xi y} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-C\xi^2 t} e^{i\xi(x-y)} d\xi \end{aligned}$$

となって、以前に求めたように、熱核との合成積で  $u(t, x)$  が表示できる。

### 3.5 波動方程式

1 次元の波動方程式の初期値問題は

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, x) = v_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_1(x) \end{cases} \quad (124)$$

を解くことで得られる ( $C > 0$ )。

$u(t, x)$  を  $x$  に関して上をフーリエ変換して考えてみよう。それは

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -C^2 \xi^2 \hat{u}, \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{v}_0(\xi), \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, \xi) = \hat{v}_1(\xi) \end{cases} \quad (125)$$

となり

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{v}_0(\xi) \cos C\xi t + \hat{v}_1(\xi) \frac{\sin C\xi t}{C\xi}$$

で解が与えられる。よって  $u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{v}_0(\xi) \cos C\xi t) + \mathcal{F}^{-1}(\hat{v}_1(\xi) \frac{\sin C\xi t}{C\xi})$  となり、(108) より

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\hat{v}_0(\xi) \cos C\xi t) &= \mathcal{F}^{-1} \frac{e^{iC\xi t} + e^{-iC\xi t}}{2} \mathcal{F}v_0(x) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}v_0(x + Ct) + \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}v_0(x - Ct)) \\ &= \frac{1}{2} (v_0(x + Ct) + v_0(x - Ct)). \end{aligned}$$

また  $u_1(t, x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{v}_1(\xi) \frac{\sin C\xi t}{C\xi})$  とおくと  $u_1(0, x) = 0$ ,  $\frac{\partial u_1}{\partial t} = \mathcal{F}^{-1}(\hat{v}_1(\xi) \cos C\xi t)$  となるので

$$u_1(t, x) = \int_0^t \frac{1}{2} (v_1(x + Cs) + v_1(x - Cs)) ds = \frac{1}{2C} \int_{x+at}^{x-at} v_1(y) dy$$

である。すなわち以下の **Stokes の波動公式** が得られる。

$$u(t, x) = \frac{v_0(t + Ct) + v_0(x - Ct)}{2} + \frac{1}{2C} \int_{a-Ct}^{a+Ct} v_1(y) dy \quad (126)$$

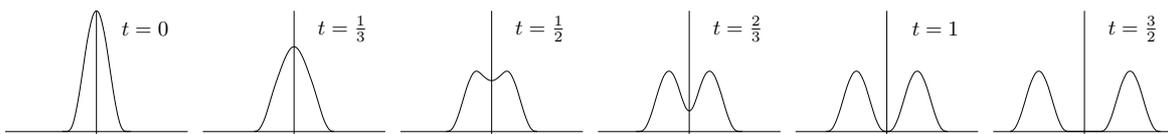
一方、 $v_0(x), v_1(x)$  が  $C^2$  級であれば ( $x$  についてのフーリエ変換が定義されなくても)、上で与えられる  $u(t, x)$  は波動方程式の初期値問題 (124) の解であることが容易に確かめられる。しかも、熱伝導方程式の場合と異なり、 $t < 0$  でも、すなわち  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  においても解となっている。

ある区間  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  に対し、 $t > 0$  とすると

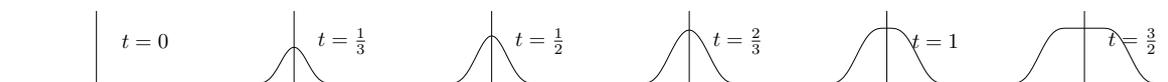
$$v_0(x) = v_1(x) = 0 \quad (\forall x \notin [a, b]) \Rightarrow u(t, x) = 0 \quad (\forall x \in [a - Ct, b + Ct])$$

が成り立つ. また  $x \in (a, b) \Rightarrow v_0(x) > 0, v_1(x) = 0$  であるならば,  $x \in (a - Ct, b - Ct) \cup (a + Ct, b + Ct)$  のとき  $u(t, x) > 0$  が成り立つので, 熱伝導方程式の場合とは異なり, 波動の伝わる速度は有限の値  $C$  であることが分かる (有限伝搬速度).

$v(x) = \max\{(1 - x^2)^3, 0\}$  とおくと,  $v(x)$  は  $C^2$  級となる.  $u_0(x) = v(x), u_1(x) = 0, C = 1$  のときの解を図示してみよう.



次に,  $u_0(x) = 0, u_1(x) = v(x), C = 1$  のときの解を図示してみよう.



初期条件を考えないとき, 波動方程式の解  $u(t, x)$  は  $\psi_+(x - Ct) + \psi_-(x + Ct)$  の形をしている. この  $\psi_{\pm}$  は  $C^2$  級の任意の関数である. 初期条件は

$$v_0(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x), \quad v_1(x) = C(\psi'_+(x) + \psi'_-(x))$$

よって

$$\psi_{\pm}(x) = \frac{1}{2}(v_0(x) \pm \frac{1}{C}V_1(x)), \quad V_1(x) = \int_0^x v_1(s) ds$$

となる<sup>\*30</sup>.  $\psi_+(x)$  は速度  $C$  で正方向に進む波動,  $\psi_-(x)$  は速度  $C$  で負方向に進む波動を意味する. 上の2つの例で,  $t = -2$  のときに2つの波動を描くと, 以下のようになる.



$u(t, x)$  は2階まで偏微分可能で,  $t$  を固定するとその2階までの偏微分も含めて,  $\sqrt{1 + x^2}$  を掛けても有界とする (以下の積分が存在するための条件). このとき  $E(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{C^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx$  とおくと

$$\begin{aligned} E(t)' &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{2}{C^2} u_t u_{tt} + 2u_x u_{tx} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2(u_t u_{xx} + u_x u_{tx}) dx \\ &= 2 \left[ u_t u_x \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} u_{tx} u_x dx + 2 \int_{-\infty}^{\infty} u_x u_{tx} dx = 0 \end{aligned}$$

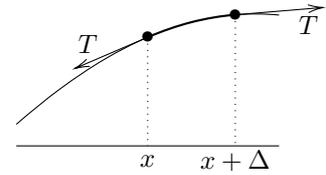
となって,  $E(t)$  は  $t$  に依らないことが分かる. これは総エネルギーの保存則にあたる.

波動方程式は, ある張力  $T$  で引っ張られている弦の振動を表していると考えられる. 時刻  $t$ , 位置  $x$  での弦の変位を  $u(t, x)$  と表す. 変位はわずかで,  $u_x$  や  $u_{xx}$  も十分小さいとする<sup>\*31</sup>.

<sup>\*30</sup>  $\psi_+(x)$  にある定数を足し,  $\psi_-(x)$  からその定数を引いても  $u(t, x)$  は変わらない. これは  $V_1(x)$  に定数の差があっても  $u(t, x)$  は変わらない, すなわち  $V_1$  を定義する積分の始点はどこにとってもよいことを意味する.

<sup>\*31</sup> ある時刻  $t$  のときの  $y = u(t, x)$  のグラフを描いたが, 見やすくするために  $y$  方向に拡大してグラフを描いた, と考えるのがよい.

$x$  から  $x + \Delta$  までの微小部分にかかる上向きの力を考える ( $\Delta > 0$  は微小とする). 端点  $x$  では左側に引かれるが, 傾きが  $u_x$  なので下向きに  $\frac{u_x(x)}{\sqrt{1+u_x^2(x)}}T$  の力が, 端点  $x + \Delta$  では上向きに  $\frac{u_x(x+\Delta)}{\sqrt{1+u_x^2(x+\Delta)}}T$  の力が働くので, この微小部分上向きに働く力  $F_\Delta$  は



$$\begin{aligned}
 F_\Delta &= \frac{u_x(x+\Delta)T}{\sqrt{1+u_x^2(x+\Delta)}} - \frac{u_x(x)T}{\sqrt{1+u_x^2(x)}} \\
 &= \frac{T\Delta}{\sqrt{1+u_x^2(x)}} \left( \frac{u_x(x+\Delta) - u_x(x)}{\Delta} - u_x(x+\Delta) \frac{\sqrt{1+u_x^2(x+\Delta)} - \sqrt{1+u_x^2(x)}}{\Delta\sqrt{1+u_x^2(x+\Delta)}} \right), \\
 \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{F_\Delta}{\Delta} &= \frac{T}{\sqrt{1+u_x^2}} \left( u_{xx} - \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \frac{\partial \sqrt{1+u_x^2}}{\partial x} \right) = \frac{Tu_{xx}}{\sqrt{1+u_x^2}} \frac{1}{1+u_x^2}
 \end{aligned}$$

となる.  $|u_x|$  は 0 に近いとすると, この値は  $Tu_{xx}$  とみなせる. 絃の単位長あたりの質量を  $\rho$  とすると  $x$  と  $x + \Delta$  の部分の絃の質量は  $\rho \int_x^{x+\Delta} \sqrt{1+u_x^2} dx$  なので, その質量を  $\Delta$  で割った  $\Delta \rightarrow +0$  の極限は,  $\rho$  とみなしてよい. このときニュートンの運動方程式

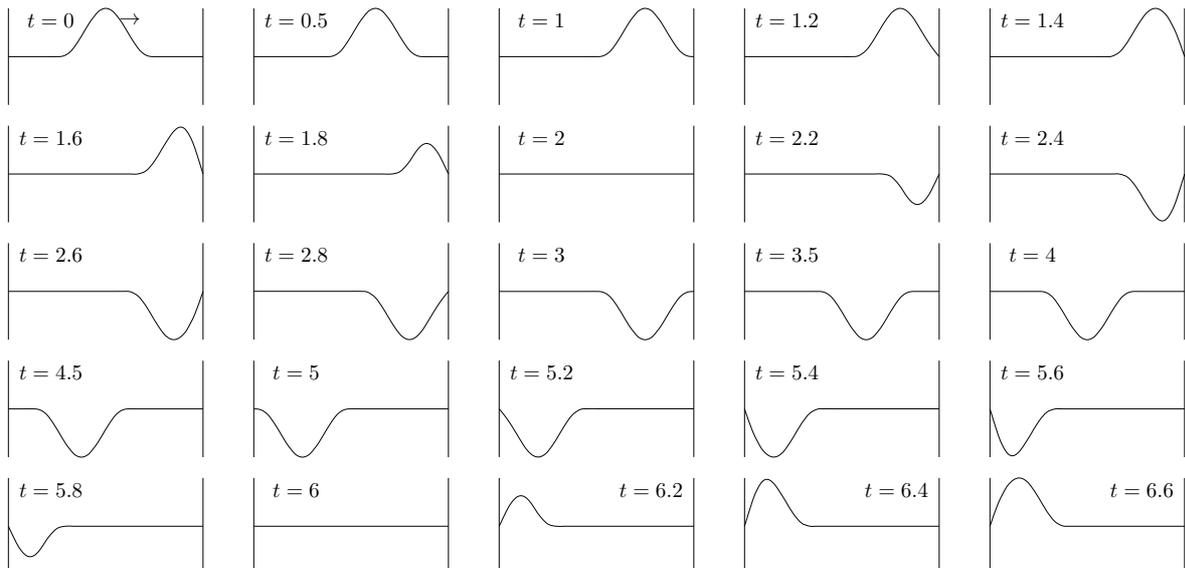
$$\rho u_{tt} = Tu_{xx}$$

が成り立ち<sup>\*32</sup>, これは波動方程式である ( $C = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ ).

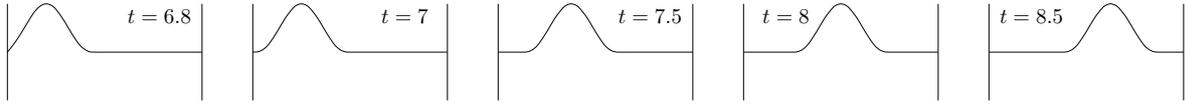
**注意.** 上のことから, 絃において振動の伝わる速度は張力の平方根に比例し, 絃の単位長さあたりの重さに反比例することが分かる.

**問.** 長さ  $\pi$  の絃の両端を固定した場合の振動の方程式をフーリエ級数を使って解析せよ (ヒント: 絃の位置  $x$  における絃の方向と垂直方向の変位を  $u(t, x)$  と表すと, 熱方程式の場合と同様,  $u(t, x)$  を周期  $2\pi$  の周期をもつ奇関数に拡張すると,  $\mathbb{R}$  上の波動方程式とみなせる).

両端を固定した弦の一端から他端に波の伝わる時間が 4 秒となる場合に, 正方向に進行する波動を初期値に与えた例の  $t$  秒後の状態を以下に図示する. 波は固定端で反射し, 位相を反転して逆方向に進行して戻ってくる. したがって, 波が伝わる往復時間後に戻って時間に関して周期的になる.



<sup>\*32</sup> より正確には  $\rho(1+u_x^2)^2 u_{tt} = Tu_{xx}$ .



### 3.6 エルミート多項式

$\mathbb{R}$  上の関数が、任意の有限区間上で積分可能で、 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$  を満たすとき、**自乗可積分**あるいは  $L^2$  級という。自乗可積分な関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の内積を

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(x)dx$$

で定める\*33.

このような内積に関する完全直交関数系を多項式を用いて考えよう。(0 でない) 多項式は自乗可積分ではないので、「多項式  $\times e^{-\frac{x^2}{4}}$ 」という形で直交関数系を作ることができる。このときに用いられる多項式を**エルミート (Hermite) 多項式**といい、それは

$$H_n(x) := (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で定義される。 $H_n(x)$  は  $n$  次多項式で  $x^n$  の係数は 1 である。直交関係は以下で与えられる。

**定理.**  $(H_m(x)e^{-\frac{x^2}{4}}, H_n(x)e^{-\frac{x^2}{4}}) = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}n!\delta_{m,n}.$  (127)

**証明.**  $h(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  という高々  $n$  次の多項式とすると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \left[ h(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} h'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \dots \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} h^{(n)}(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} a_n n! e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= (-1)^n a_n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \sqrt{2} \left(\frac{dx}{\sqrt{2}}\right) = (-1)^n \sqrt{2\pi} a_n n! \end{aligned}$$

となる。 $H_n(x)$  の  $x^n$  の係数は 1 であるから、上の定理を得る。

三項漸化式と微分方程式を求めよう。ルジャンドル多項式の時と同様な議論から、(84) において  $p_n(x) = H_n(x)$  とおくと、 $H_{n+1}(x) - xH_n(x) + r_n H_{n-1}(x) = 0$  となる  $r_n \in \mathbb{R}$  が存在することが分かる。このとき

$$\begin{aligned} r_n \sqrt{2\pi}(n-1)! &= r_n \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (xH_n(x) - H_{n+1}(x)) H_{n-1}(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \cdot xH_{n-1}(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}n! \end{aligned}$$

となるので**三項漸化式**

$$H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0 \quad (128)$$

\*33  $|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$  に注意.

を得る. また  $H_{n+1}(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}})' = (H_n'(x) - xH_n(x))e^{-\frac{x^2}{2}}$  であるから

$$H_{n+1}(x) = H_n'(x) - xH_n(x). \quad (129)$$

一般に  $f(x), g(x)$  を多項式とするとき, 部分積分により

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} f'(x) \right)' g(x) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) g'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} g'(x) \right)' f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g''(x) f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^{\infty} x g'(x) f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

となる.  $f(x) = H_n(x)$  で,  $g(x)$  が  $(n-1)$  次以下の多項式なら, 上式は 0 になる. よって  $n$  次多項式  $e^{-\frac{x^2}{2}} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} H_n'(x) \right)' = H_n''(x) - xH_n'(x)$  は  $H_n(x)$  のスカラー一倍で,  $x^n$  の係数は  $-n$  であるから, **エルミートの微分方程式**

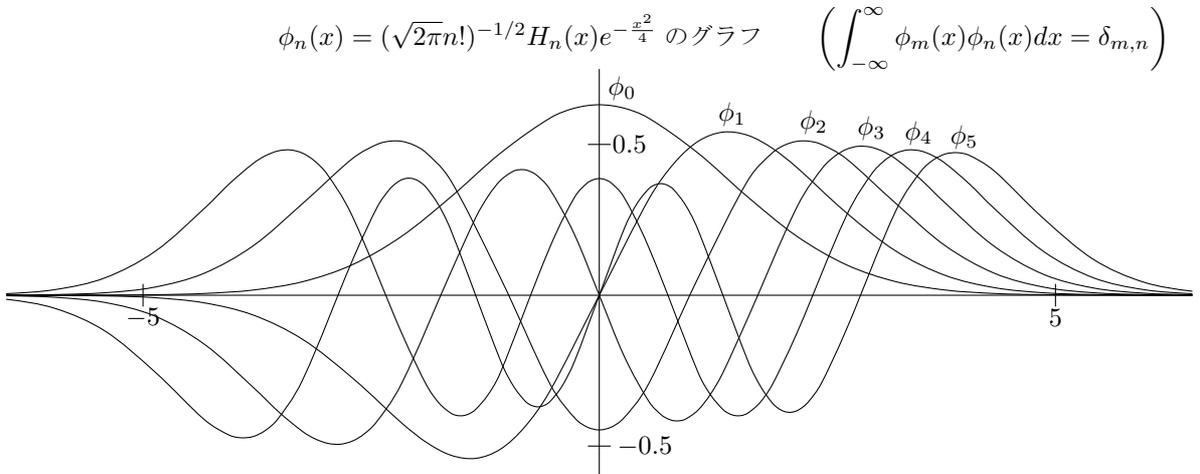
$$H_n(x)'' - xH_n(x)' + nH_n(x) = 0 \quad (130)$$

を得る.

エルミート多項式は, 具体的には

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= x, & H_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, & H_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \\ H_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}, & H_5(x) &= \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x, & H_6(x) &= \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16} \end{aligned}$$

となる. 以下にエルミート多項式のグラフを, 正規直交系となるように正規化した形で載せる.



さて

$$\varphi_n(x) := \sqrt{2} \phi_n(\sqrt{2}x) = \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} n! \right)^{-\frac{1}{2}} H_n(\sqrt{2}x) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (131)$$

とおくと,  $\{\varphi_n(x) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  も正規直交系となる\*34. このとき  $\hat{\varphi}_0(x) = \varphi_0(x)$  に注意 (cf. (111)).

$$\begin{aligned} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} (n+1)! \right)^{\frac{1}{2}} \varphi_{n+1}(x) &= H_{n+1}(\sqrt{2}x) e^{-\frac{x^2}{2}} = \left( H_n'(\sqrt{2}x) - \sqrt{2}x H_n(\sqrt{2}x) \right) e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( H_n(\sqrt{2}x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' + \frac{1}{\sqrt{2}} x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - \sqrt{2} x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

\*34 Hermite 多項式の定義を  $(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$  とする流儀もある. これを  $H_n^*(x)$  とおくと  $H_n^*(x) = 2^{\frac{n}{2}} H_n(\sqrt{2}x)$ .

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} n! \right)^{\frac{1}{2}} (\varphi'_n(x) - x\varphi_n(x))$$

であるから

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} (\varphi'_n(x) - x\varphi_n(x)) \quad (132)$$

となり, これをフーリエ変換すると

$$\hat{\varphi}_{n+1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} (i\xi\hat{\varphi}_n(\xi) + i\hat{\varphi}'_n(\xi))$$

となるので,  $\psi_n(\xi) = i^n \varphi_n(-\xi) = (-i)^n \varphi_n(\xi)$  とおくと

$$\psi_{n+1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} (\psi'_n(\xi) - x\psi_n(\xi))$$

となって,  $\psi_n$  と  $\varphi_n$  とは同じ漸化式をみます. よって  $\varphi_0(x) = \psi_0(x)$  より  $\varphi_n(x) = \psi_n(x)$  が分かり

$$\hat{\varphi}_n(x) = i^n \varphi_n(x) \quad (133)$$

が得られる\*35.

### 3.7 多変数のフーリエ変換

---

\*35 フーリエ変換は  $(\mathcal{F}^2 f)(x) = f(-x)$ ,  $(\mathcal{F}^4 f)(x) = f(x)$  を満たすので, 線形変換  $\mathcal{F}$  の固有値は  $\pm 1$  および  $\pm i$  となる.