実数値関数の例（メモ）（大島利雄）

1. 次を満たす偶関数を考える．

$$\phi(t)\in C^\infty(\mathbb{R}),\ \phi(t)\begin{cases}\ge 0 & (t\in\mathbb{R}),\\ =0 & (|t|\ge 1)\\ =1 & (|t|\le \frac14)\end{cases}\quad\text{and}\quad\int_{\mathbb{R}}\phi(t)dt=1.$$

任意に与えた数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{C}$ に対し

$$f(x) := \sum_{\substack{n\ge 0\\ a_n\ne 0}} a_n\int_0^x\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\phi(|a_n|t_1)dt_1\cdots dt_n\in C^\infty(\mathbb{R})$$

とすると， $f(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$ は $f^{(n)}(0)=a_n\quad (n=0,1,2,\ldots)$ を満たす．

注. $C\int_{-\infty}^{\infty}\phi(Ct)dt=1\ (C>0)$，$\left|f^{(n)}(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k|a_k|^{n-k}\phi^{(n-k)}(|a_k|x)\right|\le e^{|x|}$ に注意．

C^∞ 級関数

$$\varphi(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x^2-1}} & (|x|<1)\\ 0 & (|x|\ge 1)\end{cases},$$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt,$$

$$\Phi_c(x)=\frac{\Phi(cx)}{\Phi(1)}\quad (c>0)$$

に対し，$c\ge 4$ のとき $\phi(x)=\Phi_c(\frac12+x)\Phi_c(\frac12-x)$ は **1** の条件を満たす．

Fact. 複素数列 $a_0, a_1, \ldots$ を任意に与えたとき．$\Omega := \{re^{i\theta}\mid 0<r<1,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\}$ で正則な関数 $F(z)$ で，$f(x):=F|_{(-1,1)\setminus\{0\}}$ は $(-1,1)$ 上の C^∞ 級関数に拡張され，$f^{(n)}(0)=a_n\quad n=0,1,2,\ldots$ となるものが存在する．

2. 以下で定義される関数 $F(x)\in C^\infty[0,1]$ は狭義単調増加で，$\{x\in[0,1]\mid F(x)'=0\}$ は（正の Lebesgue 測度を持つ）無限集合．

$$H(x) := \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1}4^{-n^2}\varphi\bigl(4^n(x-\tfrac{k}{2^n})\bigr),$$

$$F(x)=\int_0^x H(t)dt.$$

逆関数は狭義単調増加連続関数であるが，微分できない点の集合の測度は正．

$I_{n,k} := \{x\mid \varphi\bigl(4^n(x-\frac{k}{2^n})\bigr)>0\} = \bigl(\frac{k}{2^n}-\frac{1}{4^n}, \frac{k}{2^n}+\frac{1}{4^n}\bigr)$ で，$|I_{n,k}|=\frac{2}{4^n}$. $|I_\infty := \bigcup_{n=2}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{2^n-1}I_{n,k}| = 2^2\frac{2}{4^2}+\sum_{n=3}^{\infty}2^{n-1}\frac{2}{4^n}=\frac34$（ここで，$I_{n+1,2k}\subset I_{n,k}$ に注意）．$I_\infty\setminus[0,1]=(-\frac{1}{16},0)$ であるから，$\{x\in[0,1]\mid F(x)'=0\}$ の測度は $\frac{5}{16}$ となる．なお，$F'(x)>0$ を満たす $x\in[0,1]$ は $[0,1]$ で稠密にある．なお，$F'(0)=\sum_{n=2}^{\infty}4^{-n^2}$, $F'(1)=0$.

注. $[0,1]$ 上の単調増加関数の不連続点はたかだか可算個である.

3. 次の関数 $f(x)$ は C^∞ 級であるが, C^ω 級となる点はない.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{2^n(2^n x\sqrt{-1}-1)}$$

注. $f(x+\frac{2\pi k}{2^m})-f(x)$ $(m\in\mathbb{Z}_{>0},\ k\in\mathbb{Z})$ は有限 Fourier 級数なので整関数. よって, $f(x)$ がある点で C^ω なら, $\mathbb{R}$ 上で C^ω.

一方, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2^n} z^{4^n}$ の収束半径は 1（$z=e^{\sqrt{-1}x}$）.

4. 関数

$$F(x)=\begin{cases} x^3\cos\frac{2\pi}{x^3} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

は, 各点で微分可能なので, その導関数を $f(x)$ とおく. （次項の関数 $h(x)$ の導関数でもよい） $f(x)$ は不定積分 $F(x)$ を持つので（高校数学の意味で） $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx=2$ が分かる. 一方, $f(x)$ は $[-1,1]$ 上有界でないので Riemann 積分不可能.

微分可能関数

$$\tilde{F}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} F\bigl(x-\tfrac{1}{2^n}\bigr)$$

の導関数の不連続点は可算無限個で, その近くで有界でない.

5. $\varphi_1(x):=-\frac{1}{2}\varphi'(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$ とおくと（または, $\varphi_1(x)=x\phi(x)$）

$$\varphi_1(0)=\varphi_1(\pm 1)=0,\quad \varphi_1'(0)=1,\quad |\varphi_1(x)|<1,\quad \varphi_1(x)=0\quad (|x|\geq 1),$$

$$h(x):=1+\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n}\varphi_1\bigl(2^{3n+1}(x-\tfrac{1}{2^n})\bigr),$$

$$h'(0)=0,\quad h(\tfrac{1}{2^n})=1,\quad h'(\tfrac{1}{2^n})=2^{n+1}$$

を満たす. そこで各点で微分可能な関数 $h(x)$ に対し

$$a_0=1,\quad a_{n+1}=a_n-\frac{h(a_n)}{h'(a_n)}$$

とおくと（ニュートン法）, $a_n=\frac{1}{2^n}$ となり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$ であるが, $h(0)=1$.

注. $\{x\in\mathbb{R}\mid \varphi_1\bigl(2^{3n+1}(x-\frac{1}{2^n})\bigr)\neq 0\}\subset I_n:=(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{3n+1}},\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{3n+1}})$.
$I_m\cap I_n=\emptyset$ $(0\leq m<n)$, $\quad |h(x)|<(2^{-n})^2\quad (|x|\leq 2^{-n})$.

6. $x\in[0,1]$ を 2 進小数で表す. 2 進有理数の時は有限小数で, それ以外は無限小数で表すとすると, 表示は一意に決まるが, それを 10 進小数として読んだ値を $f(x)$ とおく. $f(x)$ は明らかに狭義単調増加関数となる. このとき $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx$ を求めよ. 単調増加なので, (Riemann) 積分が計算できる.

ヒント. $\frac{1}{3}$ を二進法の無限小数で表すとどうなるか？

7. $[0,1]$ 上の次の関数 $f_n(x)$ $(n=0,1,\ldots)$ を考える．

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & (\sin 2^n\pi x\ge 0)\\ 0 & (\sin 2^n\pi x<0)\end{cases}.$$

(1) $f_n\in[0,1]^{[0,1]}$ であるが，空間 $[0,1]^{[0,1]}$ はチコノフの定理から直積位相でコンパクトとなる．この直積位相は，$[0,1]$ 上の関数に対する各点収束の位相に他ならない．

$f_\infty\in[0,1]^{[0,1]}$ を関数列 $f_1,f_2,\ldots$ の集積点の一つとする．

$f_{n_1},f_{n_2},\ldots$ を f_∞ に収束する部分列とすると

$$\lim_{j\to\infty}f_{n_j}(x)=f_\infty(x)\quad(\forall x\in[0,1]).$$

よって，ルベーグの収束定理から

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^1\big|f_\infty(x)-f_{n_j}(x)\big|dx=0.$$

一方

$$\int_0^1|f_i(x)-f_j(x)|=\tfrac{1}{2}\quad(i\ne j).$$

問. f_∞ の例を一つあげよ．

(2) $[0,1]$ で離散位相を考えると，局所コンパクトな空間 $[0,1]$ 上の関数 $f_1,f_2,\ldots$ は同程度連続，一様有界な関数列となる．アスコリアルツェラの定理が適用できるとすると，収束する部分列を持つ．

8. $f(x)$ は $f(0)=0$ を満たす $[-1,1]$ 上の実数値 C^ω 級関数で

$$f(x)>0\quad(0<|x|\le 1)$$

を満たすとする．このとき

$$f(x)\ge C|x|^m\quad(|x|\le 1)$$

満たす $C>0,\ m>0$ が存在する．