

多変数解析関数論

学部生へおくる岡の連接定理

野口潤次郎

序

本書の表題は、岡潔博士が生涯をかけた一連の論文の題目

“Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables”

からとらせていただいた。多変数函数論、多変数複素関数論、多変数複素解析などは概ね同じ意味で用いられる。多変数と言うとき、独立変数が多数になる場合を狭義には意味するが、従属変数が多数になる場合も同様で、本書で解説されるような内容が基礎理論としてどうしても必要になる。一般次元の複素幾何学や複素多様体論に於いてはもとより、一変数の複素関数論・リーマン面の理論に於いても少し高度な内容になればこの事情は同じである。それらだけでなく多変数解析関数論は、現代の数学の広い分野に渡り基礎を与える理論となっている。その最も基本的部分は、岡潔により証明された“連接定理”にある。

本書の目的は、この岡潔の連接定理を学部生向けの複素関数論・複素解析学講義として標準的に学習できるように展開することである。例えば、佐藤幹夫の超関数論の基礎として連接性の概念とそれに基づく正則凸領域上の岡-カルタンの基本定理は正に基本をなす理論となっている。金子晃氏の「超関数論」([18] p. 307)によれば、その目的の為に多項式凸領域で岡-カルタンの基本定理が示されていけばよいとのことであるので本書で言えば、第4章までの内容である。この辺までを数学科の標準学習過程の中で講義をすることを考えるとどのような展開が最も適切かを考えた。答えは、これまでの著書の順序でなくまず初めに岡の連接定理（第1連接定理）を証明するのが最もやさしく、その上で正則凸領域を扱うのが理論展開上もすっきりする。第4章の正則凸領域上で岡-カルタンの基本定理を証明するところまでは、抽象的な多様体の概念は出てこない。第4章の終わりを講義する頃には他の講義で（可微分）多様体の概念も習うであろう。すると自然に複素多様体、スタイン多様体が導入できる。そうすれば、スタイン多様体上で岡-カルタン理論を容易に学ぶことができる。

本書では、このような学習上の配慮をできるだけしたつもりである。書き方も、出来るだけやさしく理解しやすく書くことを旨とした。標準的な複素解析の本や講義の後で、直ぐに読めるようにするため、他書からの引用は極力避けた。第2

章で代数からごく基本事項を引用するが、講義で習うか、引用している教科書を見れば容易に理解可能なものと思う。第6章で体の有限次拡大の理論から原始元の存在を引用したが、環論からの結果は全て使用する分は証明を付けた。内容的に、数学科専門課程に入って習う一般位相空間論、一変数複素解析学、群・環・加群の概念などが程よく融合されて非自明に使われ、それまででは到達できない結果を習得できるという点からも本書で扱われる内容は数学科専門後期課程の中で教えられるに適切なものと思う。

巻末参考書に見られる様に、多変数解析関数論について過去複数の著書が既に出版されている。それぞれ特徴ある専門書である。その中で、本書の位置付けとしては例えば L. ヘルマンダーによるヒルベルト空間の理論を用いた $\bar{\partial}$ 方程式の理論のテキスト [Hör] やグラウエルト-レンメルトによる [G-R1]・[G-R2] の前に学ぶべき内容として考えた。本書は [一松] [西野] [Gu-R] とは重複するところが多いが全体的な組み立ては異なり、より易くなったと思う。

本書の内容は 1960 年代までに確立したものである。その主要部分は、岡潔の業績であると言って過言ではないだろう。その中核をなすのは、岡の接続定理である。本書でとる立場は、Oka VII (及び VIII) の序文にあるそれである。正則関数の接続性 (第1 接続定理) に立脚すればそれまでの来し方、Oka I~VI が一望の下に見渡せ、行く先 (凸性の問題、レビ問題 (ハルトークスの逆問題) Oka IX) も指呼の間にある。岡は Oka VII を書く時点で幾何学的イデアル層の接続性 (第2 接続定理) と正規化層の接続性 (第3 接続定理) の証明は既に手中にあった。多くの書において幾何学的イデアル層の接続性 (第2 接続定理) を H. カルタンの定理とするが、H. カルタンも指摘しているように岡は既に証明を持っていた。岡はそれを Oka VIII で書き、更に正規化空間の存在を示す第3 接続定理を証明する。このような訳で、Oka VII と Oka VIII は一体のもので、岡は重要な三つの接続定理を証明した。第2 接続定理については、岡の第1 接続定理の証明を参考にして H. カルタンも独自に証明を与えた、というのが最も妥当な見方であろう。そのような理由により本書ではこれら一体の三つの接続定理を順に

- 岡の第1 接続定理 (正則関数の層)
- 岡の第2 接続定理 (幾何学的イデアル層 (解析的集合のイデアル層))
- 岡の第3 接続定理 (正規化層)

と呼ぶことにした (この事については巻末「接続性について」で、少し詳しく論ずる)。

本書では岡の第1 接続定理を先ず初めに証明する (第2 章)。これが、本書の特徴である。第1 章では一変数関数論からの準備と多変数正則関数の定義をする。第3 章で層のコホモロジー理論を準備する。第4 章で正則凸領域上の岡-カルタ

ンの基本定理を証明する．終わりに複素多様体の定義をし，スタイン多様体の定義を述べ，スタイン多様体上で岡-カルタンの基本定理を示す．

第5章では正則領域と正則凸領域の同値性を示し，クザンの問題の解決と岡原理を解説する．

第6章は解析的集合を扱う．解析的集合の構造を調べ，幾何学的イデアル層の接続性を主張する岡の第2接続定理を証明する．第2接続定理の結果として解析的集合の特異点集合が再び解析的であることが示される．次いで複素空間を導入する．構造層が整閉である正規複素空間を定義し，岡の第3接続定理である正規化層の接続性を示す．最後にスタイン空間上の岡-カルタンの基本定理が示される．

第7章では，いよいよレビ問題（ハルトークスの逆問題）の解決を与える．岡は2次元の領域の場合を Oka VI (1942) で解決した．次いで一般次元不分岐被覆領域（リーマン領域）に対しレビ問題（ハルトークスの逆問題）を Oka IX で肯定的に解決する．レビ問題（ハルトークスの逆問題）の解決の為に岡が導入した多重劣調和関数 (Oka VI) を定義しその性質を調べる．それを用いて擬凸領域を定義し後で使う L. シュヴァルツのフレッシュ位相空間に関する有限次元性定理を証明する．

このレビ問題（ハルトークスの逆問題）については，岡は Oka VII の序文で接続定理のこの問題への適用を示唆し（この部分は，残念ながら H. カルタンの手による修正により削除されてしまったが），Oka VIII (1951) の序文第一文で，一般次元の C^n 上の不分岐被覆領域については 1943 年に或る研究報告の為に高木貞治東大教授宛に日本語で既に書いたと記している．この研究報告の論文は，手書きの完成されたものが残っており，奈良女子大学附属図書館の“岡潔文庫”で見ることができる（岡潔先生遺稿集第一集 7, 1943 年 12 月 12 日付）．

Oka VIII の時点までは，岡はレビ問題（ハルトークスの逆問題）を分岐被覆領域の場合に解けると信じて岡の3接続定理の論文を書いていた．しかしながら，岡は不分岐領域の場合に限定して解決する Oka IX を書く（後年，分岐の場合は反例が現れ，この選択の正しかったことが分かる）．

第7章では，初めに領域を扱い次にリーマン領域を扱う．証明手法としては，グラウエルトによる強擬凸領域上の接続層コホモロジーの有限次元性を用いるものである．このグラウエルトの有限次元性定理は応用が広い．

最後の第8章は，接続層のコホモロジーの有限次元性定理としてコンパクト複素多様体上のカルタン-セールスの定理と強擬凸領域上のグラウエルトの定理を第7章での扱いよりも一般化した状況で証明する．最後にグラウエルトの定理の応用として小平の埋め込み定理を証明する．岡の接続定理の延長線上で小平-ホッジ理論と複素射影的代数幾何学に於ける基本定理である小平の埋め込み定理の証明が与えられることは，岡の接続性の柔軟な潜在的力を示すものとして素晴らしい．

読む上で第7・8章では，第6章からの引用はあまりない．従って，第6章を

とばして第 7・8 章を読むことは可能である．

本書は，著者が東大理学部数学科・大学院数理科学研究科で 10 年ほど前から断続的に行ってきた講義がもとになっている．講義ノートを原稿にする段階で内容に目を通していただき適切な助言をいただいた風間英明氏，高山茂晴氏，岡潔博士の論文・資料について多くの助言を頂いた山口博史氏の三氏に深く感謝の意を表します．書き進める中で，何かとお世話になった東大数理での月曜セミナーの皆さんと文献について貴重な助言をいただいた研究上の同僚の方々に深く感謝いたします．また最後に，巻末の「余録」に収録した岡潔先生の写真掲載について御快諾いただいた岡熙哉氏と大変お世話になった武内章氏に篤く御礼申し上げます．

平成 24 年 10 月 駒場にて．

ことわり

- (i) 自然数 (正整数) の集合 \mathbf{N} , 整数の集合 \mathbf{Z} , 有理数の集合 \mathbf{Q} , 実数の集合 \mathbf{R} , 複素数の集合 \mathbf{C} , 虚数単位 i 等は慣習に従って用いている. \mathbf{Z}_+ で非負整数の集合を表す.
- (ii) $A := \dots$ という書き方で, 新しい記号 A を右辺 \dots で定めていることを表す.
- (iii) 本書では, 環, 体は可換とし, $1 \neq 0$ を含むとする. 体 k に対し $k^* = k \setminus \{0\}$ と記す.
- (iv) ある環の元を係数とする多項式で最高次の係数が 1 であるものを, モニック多項式と呼ぶ.
- (v) 定理や式の番号は区別せず統一的に現れる順に従って付けられている. ただし, 式は (1.1.1) のように括弧で括られている. 1 番目の数字は章を表し, 2 番目の数字は節を表す.
- (vi) 単調増加, 単調減少という場合, 等しい場合も含める. 例えば, 関数列 $\{\varphi_\nu(x)\}_{\nu=1}^\infty$ が単調増加とは, 定義域内の任意の x に対し $\varphi_\nu(x) \leq \varphi_{\nu+1}(x)$, $\nu = 1, 2, \dots$ が成立することである.
- (vii) 近傍は常に開集合とする.
- (viii) 関数や写像 f が空間 X で定義されているとき, その部分集合 $Y \subset X$ への制限を $f|_Y$ で表す.
- (ix) 局所コンパクト空間の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ がプロパー (固有) とは, 任意のコンパクト部分集合 $K \subset Y$ に対し逆像 $f^{-1}K$ がコンパクトであることをいう. また一点 $y \in Y$ の f による逆像を $f^{-1}y$ と書く.
- (x) 多様体は, 特にことわらなければ連結とする.
- (xi) 特に断らない限り領域とは, \mathbf{C}^n ($n \in \mathbf{N}$) の連結開集合のことである.
- (xii) 記号 \Subset は, 相対コンパクトであることを意味する. たとえば, $\Delta(a; r) \Subset U$ は, 閉包 $\overline{\Delta(a; r)}$ が U 内でコンパクトであることを意味する.
- (xiii) $O(1), o(1)$ 等はランダウの記法に従う.
- (xiv) 有限集合 S に対し, その元の個数を $|S|$ で表す.
- (xv) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が, 1 対 1 のとき単射と呼ぶ. 記号 $X \hookrightarrow Y$ は単射を表す. $f: X \rightarrow Y$ が上への写像 ($f(X) = Y$) であるとき全射と呼ぶ. 部分集合 $E \subset X$ への f の制限を $f|_E$ と記す.
- (xvi) 可微分多様体の開集合 U 上の, k 階連続偏微分可能関数の全体を $C^k(U)$ と書く. C^k 級とは, k 階連続偏微分可能であることを意味する. $C_0^k(U)$ は, 台がコンパクトな $C^k(U)$ の元の全体を表す.

目次

第 1 章	正則関数	1
1.1	一変数正則関数	1
1.2	多変数正則関数	4
1.3	層	21
第 2 章	岡の第 1 接続定理	31
2.1	ワイエルストラスの予備定理	31
2.2	正則局所環	37
2.3	解析的集合	43
2.4	接続層	45
2.5	岡の第 1 接続定理	49
第 3 章	層のコホモロジー	57
3.1	完全列	57
3.2	テンソル積	58
3.3	接続層の完全列	61
3.4	層のコホモロジー	65
3.5	ド・ラーム コホモロジー	81
3.6	ドルボー コホモロジー	85
3.7	クザンの問題	90
第 4 章	正則凸領域と岡-カルタンの基本定理	95
4.1	正則凸領域	95
4.2	カルタンの融合補題	99
4.3	岡の基本補題	106
4.4	岡-カルタンの基本定理	117
4.5	スタイン多様体と岡-カルタンの基本定理	128

第 5 章	正則領域	133
5.1	正則包	133
5.2	ラインハルト領域	137
5.3	正則領域と正則凸領域	146
5.4	正則領域と近似列	152
5.5	クザンの問題と岡原理	160
第 6 章	解析的集合と複素空間	177
6.1	準備	177
6.2	解析的集合の芽	182
6.3	代数的基本事項	187
6.4	正則局所環のイデアル	189
6.5	岡の第 2 接続定理	204
6.6	解析的集合の既約分解	211
6.7	有限正則写像	215
6.8	解析的集合の接続	224
6.9	複素空間	227
6.10	正規複素空間と岡の第 3 接続定理	231
6.11	正規複素空間の特異点	242
6.12	スタイン空間と岡-カルタンの基本定理	247
第 7 章	擬凸領域と岡の定理	249
7.1	多重劣調和関数	249
7.2	擬凸領域	268
7.3	L. シュヴァルツの定理	273
7.4	岡の定理	297
7.5	リーマン領域上の岡の定理	303
第 8 章	接続層コホモロジーと小平の埋め込み定理	319
8.1	接続層の切断空間の位相	319
8.2	カルタン-セールスの定理	324
8.3	正直線束とホッジ多様体	325
8.4	グラウエルトの定理	328
8.5	小平の埋め込み定理	331
	接続性について	333
	余録	343

参考書・文献	349
索引	357
記号	360