

値分布と多変数関数論

野口潤次郎

東京大学

数理講演会

2013(H25) 年 3 月 18 日

Nevanlinna Theory in Several Complex
Variables
and Diophantine Approximation

Junjiro Noguchi and Jörg Winkelmann

Version: 26 feb 2013

多変数解析関数論

学部生へおくる岡の連接定理

野口潤次郎

[著]

朝倉書店

§1 関数論

関数論 — Picard の定理

(1) (1879 C.R. Paris) $f : \mathbf{C}$ (又は $\Delta \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbf{P}^1 \setminus 3 \text{ 点}$ は定数 (又は解析接続可能) .

(2) (1887 A.E.N.S) $f : \mathbf{C}$ (又は $\Delta \setminus \{0\}) \rightarrow C$ (代数曲線), 種数 $g \geq 2$ は定数 (又は解析接続可能) .

$\Rightarrow$ Borel $\Rightarrow$ Nevanlinna 理論 (1925), 値分布: F.M.T. + S.M.T.

多変数 (高次元) 値分布理論: Borel, Hadamard, Bloch, H. Cartan, Weyls, Ahlfors, Stoll, Chern (幾何学化), Bott-Chern (1965),

多変数関数論 — Weierstrass, Poincaré, Cousin, Hartogs, Levi, ...

Hartogs 現象 — 関数それ自体が幾何学的存在.

Behnke, Thullen, K. Oka, H. Cartan, Grauert, ...

定義. 複素空間 X がスタインであるとは:

1. $\forall a \neq \forall b \in X$ に対し $\exists f \in \mathcal{O}(X)$ で $f(a) \neq f(b)$.
2. $\forall a \in X$ に対し $\exists f_j \in \mathcal{O}(X), 1 \leq j \leq n, (f_1, \dots, f_n)$ が a の或る近傍の正則局所座標 (図) を与える.
3. $\forall K \Subset X$ の正則凸包 $\hat{K}_X \Subset X$. ただし、

$$\hat{K}_X = \{x \in X; |f(x)| \leq \sup_K |f|, \forall f \in \mathcal{O}(X)\}.$$

定理 1.1 (補間定理)

複素空間 X が スタイン ならば、離散点列 $\forall \{x_\nu\}_{\nu \geq 1} \subset X$ と 複素数列 $\forall \{c_\nu\}_{\nu \geq 1} \subset \mathbf{C}$ に対し、 $\exists f \in \mathcal{O}(X)$ で

$$f(x_\nu) = c_\nu, \quad \forall \nu \geq 1.$$

また、逆も成立する。

定理 1.2 (R. Narasimhan, (1961)/II(1962))

1. 複素空間 X 上に強多重劣調和な階位関数 $\phi : X \rightarrow \mathbf{R}$ が存在することと、 X がスタインであることは同値.
2. (II) 複素空間 X 上に連続多重劣調和な階位関数 $\phi : X \rightarrow \mathbf{R}$ が存在しかつ、 X 上に強多重劣調和関数が存在することと X がスタインであることは同値.

注意. 1 では岡の定理 (IX)(1953) を含めず、2 はそれを含む.

S. Kobayashi, 1967(論文), ..., 1970(本) — 小林双曲性.
Griffiths et al. (1972~) ... 高次元代数多様体間の正則写像の値分布.

S. Lang : Diophantine Geometry と小林双曲性
→ 学会企画特別講演.

1974 年 7 月 23 日 (火) 夕刻 ~ 7 月 26 日 (金) 昼
石川県金沢工業大学穴水自然学苑
連続講演 : 落合卓四郎「値分布の問題」

定理 1.3 (Bloch-Ochiai'77 Inv.+Kawamata'80(+Nog.'84))

(複素) 射影代数的多様体 V の 不正則指数 $q(V) > \dim V$ ならば、 $f : \mathbf{C} \rightarrow V$ は代数退化.

解析的なポイント (Bloch が証明できなかった):

補題 1.4 (正則微分の補題: 原型は Nevanlinna)

$\omega \in H^0(V, \Omega_V^1)$ と $f: \mathbf{C} \rightarrow V$ に対し $f^*\omega = \zeta(z)dz$ とおくと、

$$m(r, \zeta) = \int_{|z|=r} \log^+ |\zeta(z)| \frac{d\theta}{2\pi} = o(T_f(r)),$$
$$T_f(r) = \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{|z|<t} f^*h_V.$$

注意. Bloch-Ochiai の定理では、古典理論 (E. Borel-Nevanlinna) から孤立していて、結果として不十分の感が残る.

定理 1.5 (Borel 1897)

$f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus ((n+2)\text{ヶの一般の位置にある超平面})$ は、線形退化.

§2 対数微分とジェット

1975 年頃、斎藤恭司「対数的ベクトル場と対数的微分形式–Deligne を越えて」、広島大学での講演.

これを使おう (Deligne 版) :

補題 2.1 (対数微分の補題, Nog. '77)

M , コンパクト複素多様体、 $D \subset M$ 被約因子、
 $\omega \in H^0(M, \Omega_M^1(\log D))$ (ただし、 $\text{Res}(\omega)$ は $\mathbb{Z}$ 係数) と $f: \mathbb{C} \rightarrow V$
に対し $f^*\omega = \zeta(z)dz$ とおくとき、

$$m(r, \zeta) = o(T_f(r)).$$

注意. この補題では、 M に代数性は必要ない。 “Calculus”.

Picard の定理の証明.

(1) $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$: $\omega_1 = dw/w$, $\omega_2 = dw/(w-1)$
と対数微分をとると

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{w}{w-1} \quad (w \text{ の一次変換}).$$

$f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ に対し、 $f^*\omega_j = \zeta_j dz$ とおくと

$$\begin{aligned} T_f(r) &= T(r, f) = T\left(r, \frac{f}{f-1}\right) + O(1) \\ &= T\left(r, \frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right) + O(1) \\ &\leq T(r, \zeta_1) + T(r, \zeta_2) + O(1) \\ &= m(r, \zeta_1) + m(r, \zeta_2) + O(1) = o(T(r, f)). \end{aligned}$$

(2) $\dim V = 1, g(V) \geq 2$: $\omega_j \in H^0(V, \Omega_V^1), j = 1, 2$, 一次独立なものをとる. $\varphi = \omega_1/\omega_2$ は次数 $2g - 2$ の有理関数.

$f: \mathbf{C} \rightarrow V$ に対し、

$$\begin{aligned}(2g - 2) T_f(r) &= T(r, f^* \varphi) = T\left(r, \frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right) \\ &\leq T(r, \zeta_1) + T(r, \zeta_2) + O(1) \\ &= m(r, \zeta_1) + m(r, \zeta_2) + O(1) = o(T_f(r)).\end{aligned}$$

注意. (1) この証明では、リーマンの写像定理や一意化定理 (1 変数の特殊事情) を使っていない。

(2) H. Cartan-Weyls-Ahlfors-Stoll: 線形理論から非線形への足がかり。

定理 2.2 (Nog. '77, '81)

X を準射影代数的多様体とし対数的不正則指数 $\bar{q}(X) > \dim X$ ならば, 任意の $f: \mathbf{C} \rightarrow X$ は代数退化($\overline{f(\mathbf{C})}^{\text{Zar}} \neq X$).

注意. これは、Bloch-Ochiai と Borel ($\bar{q}(\mathbf{P}^n \setminus \sum_1^{n+2} H_j) = n+1 > n$) を含む.

実際示したのは

定理 2.3 (S.M.T. 型)

V を射影代数的, D を被約因子、 $H^0(V, \Omega_V^1(\log D))$ が “十分大
き” ければ、ある定数 $\kappa > 0$ があって代数非退化な $f: \mathbf{C} \rightarrow V$ に
対し

$$\kappa T_f(r) \leq N_1(r, f^*D) + o(T_f(r)).$$

$$N_k(r, f^*D) = \int_1^r \left(\sum_{|z|<t} \min\{\text{ord}_z f^*D, k\} \right) \frac{dt}{t}, \quad 1 \leq k \leq \infty.$$

問題. 正定数 κ を決めよ.

κ が分かっている場合.

定理 2.4 (S.M.T., Nevanlinna, Ahlfors, Chern)

$\dim V = 1, a_j \in V, 1 \leq j \leq q, f : \mathbf{C} \rightarrow V$ に対し、

$$(q - (2 - 2g(V))T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_1(r, f^*a_j) + o(T_f(r)).$$

定理 2.5 (線形の場合 : Cartan's S.M.T.'33;
Weyls'38-Ahlfors'41-Stoll'54)

$H_j \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C}), 1 \leq j \leq q$, 一般の位置にある超平面、
 $f : \mathbf{C}^m \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ が線形非退化ならば、

$$(q - n - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_n(r, f^*H_j) + o(T_f(r)).$$

$$\mathbf{F.M.T.} \quad T_f(r) = N(r, f^*H) + m(r, \frac{1}{\|\sigma_H(f(\cdot))\|}) + O(1).$$

定理 2.6 (Griffiths et al. '72-)

V を射影代数的多様体、 $D = \sum D_j$ をその上の単純正規交叉因子、 W をアファイン代数的、 $\dim W \geq \dim V$, $f : W \rightarrow V$ を微分非退化有理型写像とすると

$$T_f(r, L(D)) + T_f(r, K_V) \leq \sum_j N_1(r, f^* D_j) + o(T_f(r)).$$

注意. (1) $\dim V = 1$ の場合の、完全な拡張になっているが、 f に強い条件が付く.

(2) 非線形の場合の、理想モデル. ($\Rightarrow$ Vojta 予想.)

§3 予想と問題

S. Lang の問題 ('66). A をアーベル多様体、 $D \subset A$ を豊富因子とする. $\psi: \mathbf{C} \rightarrow A$ を解析的 1-パラメーター部分群とする。

1. $\psi(\mathbf{C}) \cap D \neq \emptyset$.
2. ψ が代数非退化ならば、 $|\psi(\mathbf{C}) \cap D| = \infty$.

J. Ax ('70 ICM) Lang の問題を肯定的に解決。

S. Lang 予想. 上の問題 1, 2 は、整曲線 $f: \mathbf{C} \rightarrow A$ に対し成立するであろう。

1980 — Griffiths et al. 値分布から退場。

Green-Griffiths 予想 (1979) . V が一般型代数多様体ならば、任意の $f: \mathbf{C} \rightarrow V$ は代数退化する .

H. Grauert(1989) — $\mathbf{P}^3 \setminus 3$ conics は小林双曲的.

小林予想 (1970). 1. $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の一般の次数 $2n - 1$ 以上の超曲面は小林双曲的.

2. $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus D$, $\deg D \geq 2n + 1$, 一般, は小林双曲的.

— 小林双曲性が発展 .

— この時期値分布:

Nochka (1982): Cartan 予想の解決.

応用が進展.

H. Fujimoto, 一致の定理 (1970~)

極小曲面 $M \subset \mathbf{R}^3$ のガウス写像の除外値集合の研究 — ...,

Chern, Osserman, Xavier, ...

Fujimoto's 4 Point Theorem (1988). 完備極小曲面のガウス写像の除外値は高々4点.

値分布の目標. $f : \mathbf{C} \rightarrow X$ 超越的なものを X の有限的に記述される不変量で理解したい.

§4 非線形の場合の進展

定理 4.1 (Siu-Yeung ('96, jets), Lang 予想 1)

A アーベル多様体、 $D \subset A$ 被約因子に対し $f: \mathbf{C} \rightarrow A \setminus D$ は代数退化する.

dim A に関する帰納法? (Nog.-Winkelmann による反例, 要修正)

定理 4.2 (Nog. ('98, jet of jets))

A を準アーベル, $D(\neq \emptyset)$ を因子、 $f: \mathbf{C} \rightarrow A \setminus D$ に対し、ある部分群の平行移動 $B \subsetneq A$, $B \cap D = \emptyset$, $f(\mathbf{C}) \subset B$.

F.M.T. for coherent ideal sheaves.

S.M.T. を証明したいのだが、その前に F.M.T. をより一般にしておく。

X をコンパクト複素空間、 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ を接続イデアル層とする。
 $Y = \text{Supp } \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ として $\mathcal{I}$ の Weil 関数を考える：

1. $\lambda_{\mathcal{I}} : X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, 連続.
2. (カレント方程式) $dd^c \lambda_{\mathcal{I}} = \omega_{\mathcal{I}} - [\mathcal{I}]$. $d^c = \frac{i}{4\pi}(\bar{\partial} - \partial)$.
 $f : \mathbf{C} \rightarrow X$ に対し、次のようにおく.

$$T_f(r, \omega_{\mathcal{I}}) = \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{|z|<t} f^* \omega_{\mathcal{I}} \quad (\text{位数関数}),$$

$$m_f(r, \mathcal{I}) = \int_{|z|=r} \lambda_{\mathcal{I}}(f(z)) \frac{d\theta}{4\pi} \quad (\text{近似関数}),$$

$$N(r, f^* \mathcal{I}) = \int_1^r \frac{dt}{t} \sum_{|z|<t} \text{ord}_z f^* \mathcal{I} \quad (\text{個数関数}).$$

定理 4.3 (F.M.T. for coh. id'l sh. 2003)

1. $T_f(r, \omega_{\mathcal{I}}) = N(r, f^* \mathcal{I}) + m_f(r, \mathcal{I}) - m_f(1, \mathcal{I})$.
2. $\mathcal{I} \supset \mathcal{J} \implies m_f(r, \mathcal{I}) < m_f(r, \mathcal{J})$.

$A = \mathbf{C}^n / \Gamma$ を準アーベル, $f : \mathbf{C} \rightarrow A$ 整曲線とする.

$$\begin{array}{ll} T(A) \cong A \times \mathbf{C}^n & \text{(接空間),} \\ J_k(A) \cong A \times \mathbf{C}^{nk} & \text{(ジェット空間),} \\ J_k(f) : \mathbf{C} \rightarrow J_k(A) & \text{(ジェット持ち上げ),} \\ X_k(f) = \overline{J_k(f)(\mathbf{C})}^{\text{Zar}} \subset J_k(A) & \text{(ジェット像).} \end{array}$$

定理 4.4 (N.-Winkelmann-Yamanoi, C.R.'00, Acta'02, Forum'08)

$f : \mathbf{C} \rightarrow A$ は代数的非退化とする。

$Z \subset X_k(f)$ 代数的集合 (サイクル) に対し、 $X_k(f)$ のコンパクト化 $\bar{X}_k(f) \supset \bar{Z}$ が存在して

1. $T_{J_k(f)}(r, \omega_{\mathcal{J}(\bar{Z})}) = N_1(r, J_k(f)^*Z) + o(T_f(r)).$
2. $\text{codim } Z \geq 2$ ならば, $T_{J_k(f)}(r, \omega_{\mathcal{J}(\bar{Z})}) = o(T_f(r)).$

Corollary 4.5

1. (Lang 予想 1) $k = 0, Z = D$ 因子とすると、 $f : \mathbf{C} \rightarrow A \setminus D$ は必ず代数退化。
2. (Lang 予想 2) $D \subset A$ 被約因子, $\text{St}(D) = \{a \in A; a + D = D\}$ は有限, $f : \mathbf{C} \rightarrow A$ 代数非退化ならば, $\exists D_0 \subset D$ 既約成分,
 $\overline{f(\mathbf{C}) \cap D_0}^{\text{Zar}} = D_0.$ (with Corvaja, Math.Ann.'12)

応用 1 : 退化問題

定理 4.6 (N.W.Y. '07, W.-Lu'12)

1. X は複素空間、 A は準アーベル、 $\pi : X \rightarrow A$ は有限正則写像、 $\bar{\kappa}(X) > 0$. $\forall f : \mathbf{C} \rightarrow X$ に対し、 $\exists Y \subset X$ (準アーベル), $f(\mathbf{C}) \subset Y$, $\pi|_Y : Y \rightarrow \pi(Y)$ は、代数的部分群の平行移動上の不分岐被覆.
2. V を代数多様体、 $\bar{q}(V) \geq \dim V = \bar{\kappa}(V)$ ならば、 $f : \mathbf{C} \rightarrow V$ は代数退化.

注意. (1) 1 で π を “一般的に有限” とはできない (反例あり).
(2) 2 で “ $>$ ” は、Log-Bloch-Ochiai, 新しいのは、“ $=$ ” の場合.
(3) Green-Griffiths 予想に対しては、これが現在最良.

問題. $\dim V = 2$, $\bar{q}(V) = 1$ では、どうか？

$V = \mathbf{P}^2$, $D = 2$ つの conic の和の場合、 $\bar{q}(\mathbf{P}^2 \setminus D) = 1$.
このとき、 $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^2 \setminus D$ は代数退化？

応用 2 : 一致問題

定理 4.7 (Polya, Nevnalinna)

$f, g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$, 5 点 $a_j \in \mathbf{P}^1$ ($1 \leq j \leq 5$), $f^{-1}a_j = g^{-1}a_j, \forall j$, ならば $f = g$.

定理 4.8 (H. Cartan '27)

1. $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1$, 非定数、3 点 $a_j \in \mathbf{P}^1, j = 1, 2, 3$,

$$|\{g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1; g^*a_j = f^*a_j, \forall j\}| \leq 2.$$

2. $f, g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^*$, $f^*1 = g^*1$ ならば $f = g, \frac{1}{g}.$

定理 4.9 (Fujimoto '75)

$H_j \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C}), 1 \leq j \leq 3n+2$, 一般の位置の超平面、
 $f, g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 一つは線形非退化, $f^*H_j = g^*H_j, \forall j$, ならば
 $f = g$.

定理 4.10 (Yamanoi Forum'04)

$A_j, j = 1, 2$ アーベル多様体、 $D_j \subset A_j$ 豊富既約因子、
 $f_j : \mathbf{C} \rightarrow A_j$ 代数非退化、 $f_1^{-1}D_1 = f_2^{-1}D_2$ ならば
 $\exists \Phi : (A_1, D_1) \rightarrow (A_2, D_2), f_2 = \Phi \circ f_1.$

定理 4.11 (Corvaja-Nog. Math. Ann.'12)

$A_j, j = 1, 2$ 準アーベル, $D_j \subset A_j$, 既約因子、 $|\text{St}(D_j)| < \infty$,
 $f_j : \mathbf{C} \rightarrow A_j$

- $f_1^{-1}D_{1\infty} \subset f_2^{-1}D_{2\infty},$
- $N_1(r, f_1^*D_1) \sim N_1(r, f_2^*D_2) \ (r \nearrow \infty),$

ならば、 $\exists \Psi : A_1 \rightarrow A_2$ 有限準同型で、 $D_1 \subset \Psi^{-1}D_2, f_2 = \Psi \circ f_1.$

注意. $\exists$ Analogue in Arithmetic Recurrence.

動機. Erdős の問題: $x, y \in \mathbf{N},$

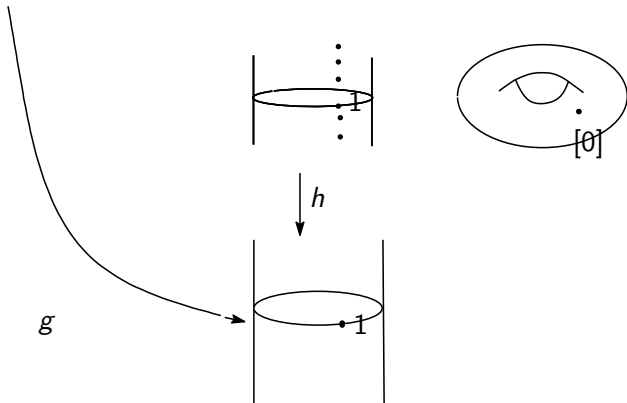
“ $p|(x^n - 1) \Leftrightarrow p|(y^n - 1); \forall n \in \mathbf{N}$ ” $\Rightarrow x = y?$

Corollary 4.12

どう $f : \mathbf{C}^m \rightarrow \mathbf{C}^*$ と $g : \mathbf{C}^m \rightarrow \mathbf{C}^*/\mathbf{Z}$ (楕円曲線) をとっても

$$f^{-1}1 \neq g^{-1}[0].$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C}/\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{C}/\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau = E
 \end{array}$$



- ▶ 多変数解析関数
- ▶ 解析的部分集合
- ▶ 連接層

の基礎がどうしても必要。

§5 多変数解析関数論の新展開

1. 多変数解析関数の定義、層の定義・例. (3)
2. 岡の第1 連接定理 ($\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ は連接) を証明する. (3)
3. 層係数コホモロジー (4)
4. 正則凸領域 (スタイン多様体) 上の岡-カルタンの基本定理
($H^q(\Omega, \mathcal{F}) = 0, q \geq 1$) を証明. (4)

4 年生 (+ 院) 500 番台の講義に丁度よい。

1~2 年 微分積分、線形代数

⇒ 複素解析 I (コーシーの積分定理、広義一様収束、一致の定理、代数学の基本定理、留数定理)。

2~3 年 集合・一般位相、群・加群・商群、複素解析 II (解析接続、正規族、リーマンの写像定理、ピカールの定理、Mittag-Leffler の定理、Weierstrass の定理、2 重周期関数)。

⇒ 新展開された多変数解析関数論 (朝倉書店)。

ご静聴、ありがとうございました。

40年間楽しく
勤めさせていただき、
ありがとうございました。