

「数学の楽しみ」～数学者から見た世界と伝統

野口潤次郎

(東京大学)

県立横須賀高等学校

平成 21(2009) 年 3 月 9 日 (月)

§1 横高のころ

東京オリンピック（昭和 39 年、1964 年）
中国の核実験

§1 横高のころ

東京オリンピック（昭和 39 年、1964 年）

中国の核実験

朝永振一郎：ノーベル物理学賞、理論物理

岡 潔：春宵十話、多変数複素解析学（複素関数論）、天才。

高木貞治：解析概論、岩波書店

目 次

增訂版序言	1
緒 言	1
定理索引	8
第一章 基本的ノ概念	[1-88]
1. 數ノ概念	1
2. 數ノ連續性	3
3. 數ノ集合・上限・下限	4
4. 數列ノ極限	6
5. 區間縮小法	11
6. 收斂ノ條件, <u>こおしい</u> ノ鑑定法	13
7. 集積點	16
8. 函數	19
9. 連續的變數ニ關スル極限	23
10. 連續函數	27
11. 連續函數ノ性質	30
12. 區域・境界	33
練習問題(一)	37

第一章

基 本 的 ノ 概 念

1. 數ノ概念及ビ四則算法ハ既知ト假定スル*. 始メノ中ハ實數ノミヲ取扱フカラ
一々斷ラナイ. 次ノ用語ハ周知デアル.

自然數. 1, 2, 3 等. 物ノ順位又ハ物ノ集合ノ個數ヲ示ス爲ニ用キラレル.

整數. 0, ± 1 , ± 2 等. 自然數ハ正ノ整數デアル.

有理數. 0 及ビ $\pm \frac{a}{b}$, 但 a, b ハ自然數. $b=1$ ナルトキ, ソレハ整數デアル.

無理數. 有理數以外ノ實數. 例ヘバ

$$\sqrt{2} = 1.4142135 \dots,$$

$$e = 2.718281828 \dots,$$

$$\pi = 3.1415926535 \dots$$

(但, ソレラガ有理數デナイコトハ證明ヲ要スル)

* 注. 實數ノ十進法表ハ既知デアル. 有理數ヲ十進法デ表ハセバ, 數字

受験勉強には、教育のエッセンスが詰まっている。

理不尽と思われることもあるが、世の中に出れば理不尽なことはいっぱいある。

受験勉強には、教育のエッセンスが詰まっている。

理不尽と思われることもあるが、世の中に出れば理不尽なことはいっぱいある。

- ともかく本格的に、一所懸命にやる（動機は、なんでもよい）。

受験勉強には、教育のエッセンスが詰まっている。

理不尽と思われることもあるが、世の中に出れば理不尽なことはいっぱいある。

- ともかく本格的に、一所懸命にやる（動機は、なんでもよい）。
- 集中力、根気

受験勉強には、教育のエッセンスが詰まっている。

理不尽と思われることもあるが、世の中に出れば理不尽なことはいっぱいある。

- ともかく本格的に、一所懸命にやる（動機は、なんでもよい）。
- 集中力、根気
- 暗記：後で忘れて良い。使える脳細胞領域を拡大する。

受験勉強には、教育のエッセンスが詰まっている。

理不尽と思われることもあるが、世の中に出れば理不尽なことはいっぱいある。

- ともかく本格的に、一所懸命にやる（動機は、なんでもよい）。
- 集中力、根気
- 暗記：後で忘れて良い。使える脳細胞領域を拡大する。
- 時間を実感する。時間は、取り返しがつかない。
受験日が、決まっている。

受験勉強には、教育のエッセンスが詰まっている。

理不尽と思われることもあるが、世の中に出れば理不尽なことはいっぱいある。

- ともかく本格的に、一所懸命にやる（動機は、なんでもよい）。
- 集中力、根気
- 暗記：後で忘れて良い。使える脳細胞領域を拡大する。
- 時間を実感する。時間は、取り返しがつかない。
受験日が、決まっている。
- 選択・決断力。

受験勉強には、教育のエッセンスが詰まっている。

理不尽と思われることもあるが、世の中に出れば理不尽なことはいっぱいある。

- ともかく本格的に、一所懸命にやる（動機は、なんでもよい）。
- 集中力、根気
- 暗記：後で忘れて良い。使える脳細胞領域を拡大する。
- 時間を実感する。時間は、取り返しがつかない。
受験日が、決まっている。
- 選択・決断力。
- 成功・失敗：一所懸命にやった後は、成功しても失敗しても残る物があり、それが大事。

分かった! できた! やった!

§2 複素数

$$(2.1) \quad z = x + iy$$

x, y は、実数。

i は、虚数単位と呼ばれ、次の性質を満たす。

$$i^2 = -1, \quad i^2 + 1 = 0.$$

実数の全体を **R** と書く。

複素数の全体を **C** と書く。

数の色々：

- 自然数 (**N**) : $1, 2, 3, \dots$; $+$, $\times$, 大小
- 整数 (**Z**) : $0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $\pm$, $\times$, 大小
- 有理数 (**Q**) : $\frac{q}{p}$, p, q は整数で、 $p \neq 0$; $\pm$, $\times$, $\div$, 大小
- 実数 (**R**) : $\pm$, $\times$, $\div$, 大小
- 複素数 (**C**) : $\pm$, $\times$, $\div$, 四則演算

複素数を作った人。有名なところでは、

Leonhard Euler (1707~83):

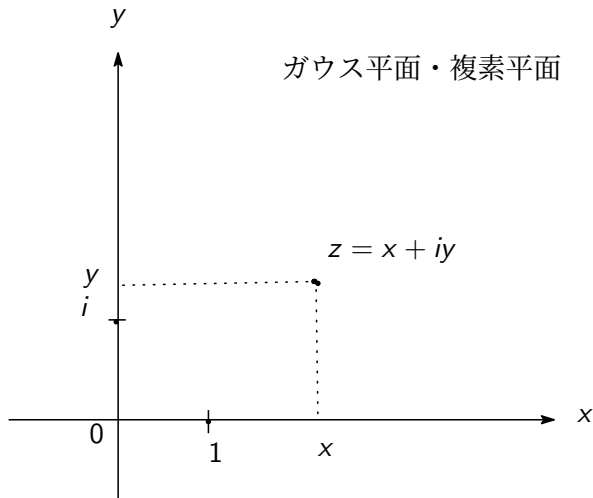
$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

(オイラーの公式)

Friedrich Gauss (1777~1855):

ガウス平面・複素平面

ガウス平面・複素平面



どうして数の体系を大きくするのか？

1 次方程式： $aX = b$, $aX + b = 0$.

どうして数の体系を大きくするのか？

1 次方程式： $aX = b$, $aX + b = 0$.

2 次方程式： $aX^2 + bX + c = 0$

$X^2 + 1 = 0$ は、実数で解を持たない。

虚数単位： $i^2 = -1 \iff i^2 + 1 = 0$

$\implies$ 複素数 $z = x + iy$.

何がよいのか？

どうして数の体系を大きくするのか？

$$1 \text{ 次方程式: } aX = b, \quad aX + b = 0.$$

$$2 \text{ 次方程式: } aX^2 + bX + c = 0$$

$X^2 + 1 = 0$ は、実数で解を持たない。

$$\text{虚数単位: } i^2 = -1 \iff i^2 + 1 = 0$$

$$\implies \text{複素数 } z = x + iy.$$

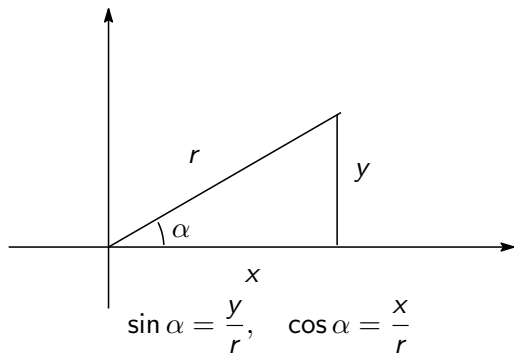
何がよいのか？

定理 2.2

(代数学の基本定理) 任意次数の任意の複素数を係数とする代数方程式

$$a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = 0$$

は、複素数の中で全て解が存在する。



三角関数の加法公式：

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

三角関数の加法公式：

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

オイラーの公式より

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha+i\beta} = e^{i\alpha} \times e^{i\beta} \quad (2^{2+3} = 2^2 \times 2^3)$$

$$= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \times (\cos \beta + i \sin \beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + i^2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$+ i(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

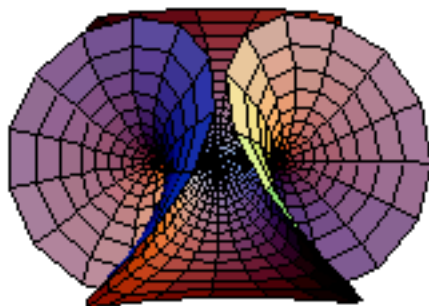
$$+ i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

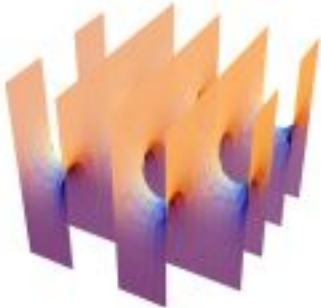
複素数の使われ方（他分野への応用）：

- 流体の運動方程式（飛行機の翼）。
- 電磁気学
- 量子力学、理論宇宙物理など。

双曲幾何学（非ユークリッド幾何学）とも関連が深い。







- 数学では証明が大事。

- 数学では証明が大事。
- 既に正しいと証明されている事を、どうしてまた証明しなければならないのでしょうか？

- 数学では証明が大事。
- 既に正しいと証明されている事を、どうしてまた証明しなければならないのでしょうか？
- やってみなければ、分からない。
その定理が正しいということを、経験する必要がある。
この経験が、次の **創造** に繋がる。
- 数学は、経験の学問。(従って、時間がかかる。)

- 数学では証明が大事。
- 既に正しいと証明されている事を、どうしてまた証明しなければならないのでしょうか？
- やってみなければ、分らない。
その定理が正しいということを、経験する必要がある。
この経験が、次の **創造** に繋がる。
- 数学は、経験の学問。(従って、時間がかかる。)
- その為には(数学的)対象概念をしっかり定める
⇒ 名前(言葉、母国語)を付ける(命名)
⇒ 言葉(母国語)の働き
⇒ 名前(母国語)が自立し動き始める
⇒ 新しい **創造** へ

有理型写像の接近関数に関する種々の評価

二反田篤史

2009 年 1 月 16 日

1 序文

$\mathbf{C}^n$ からコンパクト複素多様体 M への有理型写像 f と正則直線束 $L \rightarrow M$, L の正則切断が定める正因子 $(\sigma) \in P(\Gamma(M, L))$ で $f(\mathbf{C}^n) \not\subset \text{supp}(\sigma)$ となるものが与えられた時, 位数関数 $T_f(r, L)$, 個数関数 $N(r, f^*(\sigma))$, 接近関数 $m_f(r, (\sigma))$ が定義される. これら三つの量の間には次の関係がある.

$$T_f(r, L) = N(r, f^*(\sigma)) + m_f(r, (\sigma)) + O(1).$$

これは第一主要定理と呼ばれ, ネヴァンリンナ理論において重要な定理の一つである. 第一主要定理の主張は, r について有界な項を除けば, 位数関数は因子 (σ) によらず個数関数と接近関数の和であるという事である. すると, 位数関数における接近関数, 個数関数の割合はどれくらいかという問が浮かび上がる. $\varphi(t)$ ($t > 0$) を増加関数とし, この問題を, 接近関数と位数関数に関する量の比 $\frac{m_f(r, (\sigma))}{\varphi(T_f(r, L))}$ の上極限, もしくは下極限が大きくなる様な因子の成す集合の大きさを測るという方法で扱ったものがいくつかある. 例えば次のような結果が知られている.

$H_N \rightarrow \mathbf{P}^N(\mathbf{C})$ は超平面束とする.

(i) $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を非定数有理型関数とすると $\left\{a \in \mathbf{C}; \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m_f(r, a)}{T_f(r, H_1)} > 0\right\}$ は可算集合, (欠除指数定理).

(ii) $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を非定数有理型関数とすると $\left\{a \in \mathbf{C}; \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m_f(r, a)}{\log T_f(r, H_1)} > \frac{1}{2}\right\}$ のルベーク測度は 0, (Littlewood [4]).

(iii) $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を非定数有理型関数とすると $\left\{a \in \mathbf{C}; \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m_f(r, a)}{\log T_f(r, H_1)} > \frac{1}{\beta}\right\}$ のハウスドルフ次元は β 以下, (Ahlfors [1]).

(iv) $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ を有理型関数とすると $\left\{a \in \mathbf{C}; \lim_{r \rightarrow \infty} m_f(r, a) = \infty\right\}$ の対数容量は 0,

The Growth of the Nevanlinna Proximity Function

Atsushi Nitanda

March 6, 2009

Abstract

Let f be a meromorphic mapping from $\mathbf{C}^n$ into a compact complex manifold M . In this paper we give some estimates of the growth of the proximity function $m_f(r, D)$ of f with respect to a divisor D .

1 Introduction

J. E. Littlewood [2] proved that for a non-constant meromorphic function g on $\mathbf{C}$ it follows that for almost all $a \in \mathbf{C}$

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m_g(r, a)}{\log T(r, g)} \leq \frac{1}{2},$$

where $T(r, g)$ be the Nevanlinna characteristic function of g . In section 6 we generalize this result to the following.

Main Theorem . *Let M be a compact complex manifold and $L \rightarrow M$ a holomorphic line bundle. Let $1 \leq l \leq N$ be an integer and E an $(l+1)$ -dimensional linear subspace of $\Gamma(M, L)$. Let $f : \mathbf{C}^n \rightarrow M$ be a meromorphic mapping such that $f(\mathbf{C}^n) \not\subset B(E)$. If $T_{f_E}(r, H_l) \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) then for almost all divisor $D \in P(E)$*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m_f(r, D) - m_f(r, \mathcal{I}_E)}{\log T_{f_E}(r, H_l)} \leq \frac{1}{2},$$

where $B(E)$ is the set of base points of E and $T_{f_E}(r, H_l)$ is the order function of the meromorphic mapping f_E depending on f and E with respect to hyperplane bundle $H_l \rightarrow \mathbf{P}^l(\mathbf{C})$.

First, in section 4 we prove the Main Theorem in the case where $E = \Gamma(M, L)$ and $B(E) = \emptyset$.

In section 5 we show the following estimate which is independent of the order function. Let $L \rightarrow M$ be a holomorphic line bundle with $B(\Gamma(M, L)) = \emptyset$. For a meromorphic mapping $f : \mathbf{C}^n \rightarrow M$, there exists a subset $F \subset P(\Gamma(M, L))$ such that the projective logarithmic capacity of F is 0 and that for an arbitrary divisor $D \in P(\Gamma(M, L)) \setminus F$

$$m_f(r, D) < \varphi(r) + O(1),$$

where $\varphi(r) > 0$ is a Borel measurable function on $[1, \infty)$ such that

$$\int_1^\infty \frac{dr}{\varphi(r)} < \infty.$$

§3 国際交流

多変数複素解析葉山シンポジウム（1995年～）

Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables

概ね70～80名、海外より15名程度。

- 日本語は、漢字・ひらがな（カタカナ）の両方を使い複雑である。
なぜ、複数の文字を使い複雑にするのか？

- 日本語は、漢字・ひらがな（カタカナ）の両方を使い複雑である。
なぜ、複数の文字を使い複雑にするのか？
- なぜ強大なヨーロッパ文化の受容にかくも速く成功したのか？

§4 文字記述

文字の発生：

- シュメール文字：表意文字（B.C. 3500 年）。
- フェニキア人によりアルファベットへ転化：
表音文字の初出（B.C. 1500 年）。
ここまでに、2000 年かかった。
- 漢字、甲骨文字：表意文字（B.C. 1500 年）。

日本での文字の使用例の最も古い資料：

（志賀島出土の「漢倭奴国王」金印（後漢 A.D. 57 年）。これは、シナのもの。）

稲荷山古墳（埼玉）の金錯（キンサク）銘鉄剣（A.D. 471 年）。
漢字の表音表記使用（万葉仮名）が見られる。





辛酉七月申記。雅居臣上祖名意富比埃其兒多加利至尼其兒名
 其兒名多加波余其兒名半獲居臣世。為杖刀人首奉事未至今雅加多支上國大王寺
 在斯鬼宮時吾左治天下令作此百練利刀記吾奉事根也

辛亥年七月中記。半獲居臣上祖名意富比埃其兒多加利至尼其兒名
 其兒名多加波余其兒名半獲居臣世。為杖刀人首奉事未至今雅加多支上國大王寺
 在斯鬼宮時吾左治天下令作此百練利刀記吾奉事根也

辛亥年七月中記。半獲居臣上祖名意富比埃其兒多加利至尼其兒名

其兒名多加波余其兒名半獲居臣世。為杖刀人首奉事未至今雅加多支上國大王寺

在斯鬼宮時吾左治天下令作此百練利刀記吾奉事根也

(表銘文) 辛亥^{しんがい}の年七月中^{しる}、記す。ヨワケの臣^{しん}。上祖^{かみつおや}、名はオホヒコ。其^その兒^こ、(名は)タカリのスクネ。其

の兒^こ、名はテヨカリワケ。其^その兒^こ、名はタカヒ(ハ)シワケ。其^その兒^こ、名はタサキワケ。其^その兒^こ、名はハテヒ。

(裏銘文) 其^その兒^こ、名はカサヒ(ハ)ヨ。其^その兒^こ、名はヨワケの臣^{しん}。世々^{よよ}、杖刀人^{じょうとうじん}の首^{しゅ}と為^なり、奉事^{ほうじ}し來^{きた}り今

に至^{いた}る。ワカタケ(キ)ル(口)の大王^{おおきみ}の寺^じ、シキの宮^{みや}に在^ある時^{とき}、吾^わ、天下^{てんか}を左治^{さじ}し、此^この百練^{ひゃくれん}の利刀^{りとう}を作^{つく}らし

め、吾^わが奉事^{ほうじ}の根原^{こんげん}を記すなり。

獲加多支國大主

手獲居臣

日本語の表記：

- 古事記：太安万侶（A.D. 712 年）。
- 日本書紀（A.D. 720 年）。
- 万葉集（A.D. 759 年以前）。

古事記

速須佐之男命

八雲立つ、出雲八重垣、

妻籠みに、八重垣作る

その八重垣を。

古事記

速須佐之男命

八雲立つ、出雲八重垣、

妻籠みに、八重垣作る

その八重垣を。

夜久毛多都 伊豆毛夜幣賀岐

都麻碁微爾 夜幣賀岐都久流

曾能夜幣賀岐袁

日本語の表記：

- 古事記：太安万侶（A.D. 712 年）。
- 日本書紀（A.D. 720 年）。
- 万葉集（A.D. 759 年以前）。
- 古今和歌集：紀貫之、仮名序（A.D. 905 年）。
- 土佐日記：紀貫之（A.D. 934 年）。
- 源氏物語：紫式部（1000 年～）世界で初めての小説。

古今和歌集序

やまと歌は、ひとつの心をたねとして、よろつのことの葉とそなれりける、世中にある人、ことわさしけきものなれは、こゝろに思ふことを、みるものきく物につけていひいたせる也、花になくうくひす、水にすむかはつの声をきけは、いきとしける物、いつれか歌をよまさりける、ちからをもいれすして、あめつちをうこかし、めにみえぬおに神をも、あはれとおもはせ、をとこをんなのなかをも和らけ、たけきものゝふのこゝろをもなくさむるは歌なり、此歌、あめつちのひらけはしまりける時よりいてきにけり、しかあれとも、世につたはることは、久かたのあめにしては、下てるひめにはしまり、あらかねのつちにしては、すきのをのみことよりそおこりける、ちはやふる神代には歌のもしもさたまらず、すなほにしてことのこゝろわきかたかりけらし、人の世となりて、すきのをのみことよりそ、みそもしあまりひともしはよみける、かくてそ花をめて、鳥をうらやみ、かすみをあはれみ、露をかなしふ心、こと葉おほく、さま／＼になりける、とほき所も、いてたつあしもとよりはしまりて、年月をわたり、たかき山も、ふもとのちりひちよりなりて、あま雲たなひくまで、おひのほれることくに、此歌もかくのことくなるへし、なには津のうたは、みかとのおほんはしめなり、あさか山のことの葉は、うねめのたはふれよりよみて、此ふたうたは、歌の父母のやふにてそ、てならふ人のはしめにもしける、そも／＼歌のさま、むつなり、からの歌にもかくそあるへき、そのむくさの、ひとつには、そへ歌、おほさ／＼きの御門をそへたてまつれる歌、難波津にさくや木の花冬こもりいまを春へと咲やこの花といへる成へし

ふたつには、かそへ歌、さく花におもひつくみのあちきなさみにいたつきのいるもしらすてといへる成へし

ヨーロッパ言語の初記述（母国語・日常言語の表記という観点から）：

- 英語： ベオウルフ（A.D. 9世紀初め）、編者不明。
- フランス語： ストラスブルグの誓い（A.D. 842年）。
- ドイツ語： ヒルデブラントの歌（A.D. 9世紀）。
- イタリア語： 神曲、ダンテ（A.D. 1304～21年）。

これらより前は、ラテン語で書くしかなかった。

日本語と北ヨーロッパ言語では、文化的には大きな文化の辺境にあったことと、その表記経験について時代的類似性がある。

- 言葉は、言霊（万葉集）。

- 言葉は、言霊（万葉集）。
- 言葉は、単なる意味を伝える符牒ではなく、新しい創造の源である。
- 記述されることで、文化が時空を超えて伝わる。その表される所の姿・形が大切で、それには母校語の記述表現の働きが本質的重要性をもつ。

- 言葉は、言霊（万葉集）。
- 言葉は、単なる意味を伝える符牒ではなく、新しい創造の源である。
- 記述されることで、文化が時空を超えて伝わる。その表される所の姿・形が大切で、それには母校語の記述表現の働きが本質的重要性をもつ。
- 日本の国語の漢字・かな文字の共用表記（交ぜ書き）は、大変高性能なハイブリッド表現。

日本の三大古典：

- 古事記。
- 日本書紀。
- 万葉集。

日本書紀

(法)

坂本太郎・家永三郎
井上光貞・大野晋校注

黄 4-1
岩波文庫

新訂

新訓

万葉集 上卷

佐佐木信綱編



『万葉集』20巻は世界に誇るわが国最古の一大歌集であり、日本人の魂の故郷というに相應しい古典である。無名の人民から大詩人・貴族・天

皇まで前後4世紀余にわたるその収録歌はおよそ4500首を数える。上巻には巻1～10を収録。柿本人麿・山部赤人・大伴旅人・山上憶良ら代表的な万葉歌人たちの作が巻3に集中して現われる。(全2冊)



黄 5-1
岩波文庫

古事記

倉野憲司校注



8世紀初めに成立した現存するわが国最古の歴史書・文学書。数多い口伝えを、天武天皇が稗田阿礼に

命じて覚えさせ、元明天皇が太安万侶に書きとめさせたもの。天地開闢に始まり、伊邪那岐命、伊邪那美命の国生み神話、須佐之男命の大蛇退治等、神代より推古天皇に至る皇室の系譜を中心に、わが国古代の神話・伝説・歌謡を広範囲に収録。



黄 1-1
岩波文庫