

正則曲線の第二主要定理について

野口潤次郎

(東京大学)

§1 序

Green-Griffiths 予想 (1972)

X が一般型 (複素) 代数多様体ならば、任意の正則曲線 $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ は代数退化する。つまり、像 $f(\mathbb{C})$ は、 X の真第数的部分集合に含まれる。

小林予想 (1970)

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の次数 $\geq 2n - 1$ の一般の超曲面は小林双曲的である。

正則曲線の基本予想 (野口 GCA95~)

X を非特異射影代数的多様体、 $D = \sum_i D_i$ を X 上の単純正規交叉因子とせよ。任意の代数非退化正則曲線 $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ に対し次が成立する。

$$\begin{aligned} & T_f(r; [D]) + T_f(r; K_X) \\ & \leq \sum_i N_1(r; f^* D_i) + \epsilon T_f(r) + o(\epsilon), \quad \forall \epsilon > 0. \end{aligned}$$

この予想は、次の Griffiths 等が、微分非退化有理型写像に対しネヴァンリンナ理論を確立するのに成功した次の定理による。

定理 1.1 (Griffiths et al., 1972~)

X を n 次元非特異射影代数的多様体、
 $D = \sum_i D_i$ を X 上の単純正規交叉因子とせよ。
任意の微分非退化有理型写像 $f : \mathbb{C}^n \rightarrow X$ に対し次が成立する。

$$\begin{aligned} & T_f(r; [D]) + T_f(r; K_X) \\ & \leq \sum_i N_1(r; f^* D_i) + S_f(r) \|_{\epsilon}, \quad \forall \epsilon > 0. \end{aligned}$$

但し $S_f(r) = O(\delta \log r + \log^+ T_f(r)) \|_{\delta}, \quad \forall \delta > 0.$

注意 次が成立する。

正則曲線の基本予想 $\Rightarrow$ Green-Griffiths 予想
 $\Rightarrow$ 小林予想

第二の導出は、次の代数幾何の結果による。

定理 1.2 (Ein '88 '91, Xu '94, Voisin '96)
 $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ を次数 $\geq 2n - 1$ の一般の超曲面とせよ。
すると、 X の任意の部分多様体 (特異、非特異なんでも) は一般型である。

§2 記法と第一主要定理

$E = \sum_{\mu=1}^{\infty} \nu_{\mu} z_{\mu}$ $\mathbb{C}$ 上の因子とする。但し、 $z_{\mu} \in \mathbb{C}$ は相異なる。次のようにおく。

$$\text{ord}_z E = \begin{cases} \nu_{\mu}, & z = z_{\mu}, \\ 0, & z \notin \{z_{\mu}\}. \end{cases}$$

E の $l (\leq \infty)$ 打ち切り個数関数を次のように定める。

$$n_l(t; E) = \sum_{\{|z_{\mu}| < t\}} \min\{\nu_{\mu}, l\},$$
$$N_l(r; E) = \int_1^r \frac{n_l(t; E)}{t} dt.$$

$l = \infty$ の時は、簡単に、

$$n(t; E) = n_{\infty}(t; E),$$
$$N(r; E) = N_{\infty}(r; E).$$

X をコンパクト被約複素空間とし
 $\mathcal{O}_X$ をその構造層とする。
 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ を連接イダル層とする。
 整正則曲線

$$f : \mathbf{C} \rightarrow X, \quad f(\mathbf{C}) \not\subset \text{Supp } \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$$

に対し、いくつかの量を定義したい。

X の有限開被覆 $\{U_j\}$ で次ぐの性質を満たすもの
 をとる。

(i) U_j 上の有限個の切断

$$\sigma_{jk} \in \Gamma(U_j, \mathcal{I}), k = 1, 2, \dots,$$

があり、 U_j 上 $\mathcal{I}$ を生成する。

(ii) $\{U_j\}$ に属する単位分割 $\{c_j\}$ がある。

$\rho_{\mathcal{I}}(x) = \left(\sum_j c_j(x) \sum_k |\sigma_{jk}(x)|^2 \right)^{1/2}$ とおくとき、
 正定数 C があって、

$$C \rho_{\mathcal{I}}(x) \leq 1, \quad x \in M.$$

X のコンパクト性から、 $\log \rho_{\mathcal{I}}$ (数論では Weil 関数) は、有界連続関数項を除いて $\{U_j\}, \{c_j\}$ 取り方によらず定義される。

f の $\mathcal{I}$ または部分空間 $Y = (\text{Supp } \mathcal{O}_X/\mathcal{I}, \mathcal{O}/\mathcal{I})$ に対する接近 (近似) 関数を次で定める。

$$\begin{aligned} m_f(r; \mathcal{I}) &= m_f(r; Y) \\ &= \int_{|z|=r} \log \frac{1}{C \rho_{\mathcal{I}}(f(z))} \frac{d\theta}{2\pi} \quad (\geq 0) \end{aligned}$$

関数 $\rho_{\mathcal{I}} \circ f(z)$ は $\mathbb{C} \setminus f^{-1}(\text{Supp } Y)$ 上可微分である。

$z_0 \in f^{-1}(\text{Supp } Y)$ の適当な近傍 U ではある自然数 ν があって $f^*\mathcal{I} = ((z - z_0)^\nu)$ となり、ある U 上の可微分関数 $\psi(z)$ が存在して、

$$\log \rho_{\mathcal{I}} \circ f(z) = \nu \log |z - z_0| + \psi(z), \quad z \in U.$$

個数関数 $N(r; f^*\mathcal{I})$ と $N_l(r; f^*\mathcal{I})$ を ν を用いて上と同様に定義する。さらに、

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{I}, f} &= \omega_{Y, f} = -dd^c \psi(z) = -\frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \psi(z) \\ &= dd^c \log \frac{1}{\rho_{\mathcal{I}} \circ f(z)} \quad (z \in U), \end{aligned}$$

とおくと、これは C の可微分 $(1,1)$ 型式である。 f の $\mathcal{I}$ または Y に対する位数関数を

$$T(r; \omega_{\mathcal{I},f}) = T(r; \omega_{Y,f}) = \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{|z|<t} \omega_{\mathcal{I},f}$$

と定める。

もし $\mathcal{I}$ が X 上の Cartier 因子 D ならば、一般に使われる記号との関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} m_f(r; \mathcal{I}) &= m_f(r; D) + O(1), \\ T(r; \omega_{\mathcal{I},f}) &= T_f(r; [D]) + O(1). \end{aligned}$$

X 上にエウミート計量型式 ω_X をとり、標準的位数関数を次で定める。

$$T_f(r) = T(r; \omega_X) = \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{|z|<t} f^* \omega_X. \quad (1)$$

定理 2 整正則曲線 $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ と $\mathcal{I}$ を上述の条件を満たすものとする。

(i) (第一主要定理)

$$T(r; \omega_{\mathcal{I}, f}) = N(r; f^*\mathcal{I}) + m_f(r; \mathcal{I}) - m_f(1; \mathcal{I})$$

(ii) X が代数多様体ならば、

$$T(r; \omega_{\mathcal{I}, f}) = O(T_f(r))$$

(iii) $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ をコンパクト複素空間の間の正則写像とし、 $Y_i \subset X_i$ ($i = 1, 2$) を被約と限らない部分空間で $\phi(Y_1) \subset Y_2$ が成立しているとする、

$$m_f(r; Y_1) \leq m_{\phi \circ f}(r; Y_2) + O(1)$$

§3 Cartan と Weyls-Ahlfors の理論

複素射影空間への整正則曲線 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ に対し $\tilde{f} = (f_0 : \cdots : f_n)$ を被約表現とする。

$$T_f(r) = T(r; f^*(F.-S.))$$

を Fubini-Study 計量形式に関する位数関数とする。

定理 3 f を線形非退化とする。

$H_j, 1 \leq j \leq q$ を一般の位置にある超平面に対し、

$$(q - n - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_n(r; f^* H_j) + S_f(r)$$

ここで、 $S_f(r) = O(\delta \log^+ r + \log^+ T_f(r)) \|\delta\|, \forall \delta > 0$

Cartanの第二主要定理の“ $n + 1$ ”は、ロンスキアン $W(f_0, \dots, f_n)$ の次数から来ている。その証明の、一番の要点は、次に概 Riesz 分解とも言える、次の恒等式である。

$$\begin{aligned} & \log \frac{\prod_{j \in Q} |\hat{H}_j \circ \tilde{f}|}{|W(\tilde{f})|} \\ &= \log \frac{\prod_{j \in R} |\hat{H}_j \circ \tilde{f}|}{|W(\tilde{f})|} + \log \prod_{j \in Q \setminus R} |\hat{H}_j \circ \tilde{f}| \end{aligned}$$

ここで、 $Q = \{1, \dots, q\}, \forall R \subset Q, |R| = n + 1$.

$\tilde{f}$ の微分 $\tilde{f}^{(k)} = (f_0^{(k)} : \dots : f_n^{(k)})$ をとり、次の

ようにグラスマン多様体への導来曲線を考える。

$$\begin{aligned} f^{(k)} : \mathbf{C} &\rightarrow [\tilde{f} \wedge \tilde{f}^{(1)} \wedge \dots \wedge \tilde{f}^{(k)}] \\ &\in \mathrm{Gr}(k+1, n+1) \\ &\subset \mathbf{P}^{\binom{n+1}{k+1}-1}(\mathbf{C}). \end{aligned}$$

次が成立する。

$$\begin{aligned} T_f(r) &\sim T_{f^{(k)}}; \text{ i.e.,} \\ C^{-1}T_f(r) &\leq T_{f^{(k)}}(r) \leq CT_f(r), \exists C > 0. \end{aligned}$$

定理 4 (Weyls-Ahlfors-藤本) f を線形非退化、 $A_j, 1 \leq j \leq q$ を $\mathrm{Gr}(k+1, n+1) \subset \mathbf{P}^{\binom{n+1}{k+1}-1}(\mathbf{C})$ の分解可能超平面で一般の位置にあるものとする。すると、

$$\begin{aligned} &\left(q - \binom{n+1}{k+1} \right) T_{f^{(k)}} \\ &\leq \sum_{j=1}^q N_{(k+1)(n-k)}(r; f^{(k)*} A_j) \\ &\quad + S_{f^{(k)}}(r). \end{aligned}$$

注意 (i) (1953-54) W. Stoll は線形非退化な $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ に対しロンスキアンを $\mathbb{C}^m$ 上の多項式ベクトル場を用いて定義し、Weyls-Ahlfors理論を拡張した。

(ii) (1982) 藤本が、上述の打ち切り個数関数を用いて証明した。

定理 5 (Cartan-Nochka, 1982)

整正則曲線 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は、その像が l 次元射影空間をはるものとする。 $f(\mathbb{C})$ を含まない、一般の位置にある超曲面 $H_j \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), 1 \leq j \leq q$ に対し次が成立する。

$$\begin{aligned} & (q - 2n + l - 1)T_f(r) \\ & \leq \sum_{j=1}^q N_l(r; f^*H_j) + S_f(r). \end{aligned}$$

注意 (i) W. Chen (1990) は、導来曲線 $f^{(k)}$ に対し同様な第二主要定理を証明した。

(ii) B. Shiffman (1977) は、Griffiths等の微分非退化な場合の第二主要定理を用いて、人工的にパラ

メーターを増やして Cartan の第二主要定理を別証明した。

§4 $P^n(C)$ の超曲面の場合

Eremenko-Sodin は、 $P^n(C)$ の超曲面 $D_j, 1 \leq j \leq q$ の場合を扱った (1992)。

定義 $D_j, 1 \leq j \leq q$ 、が一般の位置にあるとは、
任意の $R \subset \{1, \dots, q\}$ に対し、

$|R| \leq n$ の場合は、 $\text{codim } \cap_{j \in R} D_j = |R|$ 、

$|R| > n$ の場合は、 $\cap_{j \in R} D_j = \emptyset$

が成立することとする。

定理 6 $D_j, 1 \leq j \leq q$ 、を $P^n(C)$ の一般の位置にある超曲面とする。任意の整正則曲線 $\forall f : C \rightarrow P^n(C)$ に対し

$$\begin{aligned} & (q - 2n)T_f(r) \\ & \leq \sum_{j=1}^q \frac{1}{\deg D_j} N(r; f^* D_j) + \epsilon T_f(r) + \epsilon, \\ & \quad \forall \epsilon > 0. \end{aligned}$$

証明は、Cartanの定理のそれや、Weyls-Ahlforsのものとは、全く異なる。

注意 この定理で、個数関数を $N(r; f^*D_j)$ を打ち切り個数関数にできるかどうかは、興味深い問題である。

Corvaja と Zannier が、Schmidt の部分空間定理を射影超曲面の場合に拡張したときに、使われた評価方法を用いて $\text{Min } Ru$ は次の B. Shiffman が 1979 年に予想した第二主要定理を証明した。

定理 7 (M. Ru, 2004) $D_j \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), 1 \leq j \leq q$, を一般の位置にある超曲面とする。すると、代数非退化正則曲線 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ に対し、

$$\begin{aligned} & (q - n - 1)T_f(r) \\ & \leq \sum_{j=1}^q \frac{1}{\deg D_j} N(r; f^*D_j) + \epsilon T_f(r) + o(r). \end{aligned}$$

個数関数 $N(r; f^*D_j)$ に打ち切りレベルを入れられるかは、問題である。

§5 Siu の有理型接続

X を n 次元非特異射影多様体、 $L > 0$ その上の正直線束とする。 $D_j \in |L|, 1 \leq j \leq q$, を $s_j \in H^0(X, L)$ で与えられる非特異被約因子とする。

$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ を正則接ベクトル束 $T(X)$ 上の有理型接続とする。

F で Γ の極因子で決まる直線束とし、極因子は正則切断 $t \in H^0(X, F)$ で与えられているとする。

$f: \mathbb{C} \rightarrow X$ を超越的整正則曲線とし次を仮定する。

(i) 正則局所座系にかんして、任意の添え字 α, β に対し、 $tD_\alpha \partial_\beta s_j$ は、 $\partial_\alpha s_j, \partial_\beta s_j$ と s_j の線形結合で表せる。ここで、 ∂_α は $(1, 0)$ 偏微分、 D_α は $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ に関する $(1, 0)$ 共変微分を表す。

(ii) $f_z \wedge tD_z f_z \wedge \cdots \wedge (tD_z)^{(n-1)} f_z \in K_X^{-1} \otimes F^{n(n-1)/2}$ 恒等的に 0 でない。

定理 8 (Y. Siu, 1987) 上述の記号のもと、 $\sum D_j$ は単純正規交叉とすると、

$$\begin{aligned} & qT_f(r; L) + T_f(r; K_X) \\ & - \frac{n(n-1)}{2}T_f(r; F) \\ & \leq \sum_{j=1}^q N(r; f^*D_j) + \epsilon T_f(r) \|\epsilon. \end{aligned}$$

注意 この定理は、一般の射影多様体を対象にしている点は、良いが、 Γ や D に対する条件が大変制限的であることが欠点である。また、上記条件 (ii) が満たされないことと代数的退化性との間の直接的関係はない。

§6 有界対称領域の商空間のコンパクト化の場合

Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の有界対称領域とする。 g をその Bergman 計量で $\text{Ricci}(g) = -g$ と正規化されているものとする。正定数 κ_Ω を正則断面曲率が次を満たすようにとる。

$$H(v, v) \leq -\kappa_\Omega.$$

一般に、 $1/n \leq \kappa_\Omega \leq 1$ となり Ω が球ならば $\kappa_\Omega = 2/(n+1)$ 。

$\Gamma \subset \text{Aut}(\Omega)$ を固定点を持たない離散部分群とし $X = \overline{\Omega/\Gamma}$ を商空間の非特異トロイダルコンパクト化とする。境界因子を

$$D = X \setminus (\Omega/\Gamma)$$

とおく。

定理 9 (A. Nadel 1989, 相原-野口 1991) **任意の** 整正則曲線 $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ 、 $f(\mathbb{C}) \not\subset D$ 、**に対し、**

$$\begin{aligned} & \kappa_\Omega \{T_f(r; [D]) + T_f(r; K_X)\} \\ & \leq N_1(r; f^*D) + S_f(r). \end{aligned}$$

注意 正則曲線 $f: \{0 < |z| < 1\} \rightarrow X$ に対しても同様な定理が成立することがわかり、 $f: \{0 < |z| < 1\} \rightarrow \Omega/\Gamma$ の正則拡張 (Picard の大定理の拡張) が従う (小林-落合の結果)。

§7 Deligne の対数微分

X を n 次元非特異射影代数的多様体とする。 D を X 上の被約因子とし、 $\Omega_X^1(\log D)$ で D に極をもつ Deligne の対数的 1 微分形式の芽の層を表す。

$\alpha : X \setminus D \rightarrow A_X$ を準 Albanese 写像とし、その像の Zariski 閉包を Y 記す。

定理 10 (野口 1977/81) 次を仮定する。

- (i) $\dim Y = n$ 。
- (ii) Y は (対数的) 一般型。

すると、 $\exists \kappa > 0$ で、代数非退化整正則曲線 $\forall f : \mathbb{C} \rightarrow X$ に対し、

$$\kappa T_f(r) \leq N_1(r, f^*D) + S_f(r).$$

対数的不正則指数 $X \setminus D$ を次で定める。

$$\bar{q}(X \setminus D) = h^0(X, \Omega_X^1(\log D));$$

$D = \emptyset$ のときは、 $q(X) = \bar{q}(X)$ と書く。

Corollary 11 (対数的 Bloch-落合の定理) $\bar{q}(X \setminus D) > n$ と仮定すると、 $\forall f : \mathbb{C} \rightarrow X \setminus D$ は代数退化である。

Corollary 12 (Bloch-落合の定理 1926/77; ...) $q(X) > n$ とすると $\forall f : \mathbb{C} \rightarrow X$ は、代数退化する。

A. Bloch (1926) は、Nevanlinna の対数微分の補題に相当する補題を証明できずに仮定して議論を進めていたが、それは落合 (1977) によりにより証明され、多くのこと (殆どのこと) が明確化された。

Corollary 13 (Borel の定理 1897) $H_j \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), 1 \leq j \leq n+2$ を一般の位置にある超平面とすると、 $\forall f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \sum_{j=1}^{n+2} H_j$ は代数 (線形) 退化する。

注意 $\bar{q}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \sum_{j=1}^{n+2} H_j) = n+1 > n$ 。従って、対数的 Bloch-落合の定理は、古典的 Borel の定理と Bloch-落合の定理を統合する。

§8 準アーベル多様体

A を準アーベル多様体とする。即ち、

$$0 \rightarrow (C^*)^t \rightarrow A \rightarrow A_0 \rightarrow 0,$$

ここで A_0 はアーベル多様体である。 $J_k(A)$ を A 上の k ジェット空間とする。 $f : C \rightarrow A$ を整正則曲線とし、 $J_k(f) : C \rightarrow J_k(X)$ をその k ジェット持ち上げとする。 $X_k(f)$ で像 $J_k(f)(C)$ の $J_k(A)$ 内の Zariski 閉包を表す。

定理 14 (野口-Winkelmann-山ノ井 2007 to appear in Forum Math.)

$f : C \rightarrow A$ を代数非退化とする。

(i) Z を $X_k(f)$ ($k \geq 0$) の被約部分空間とすると、コンパクト化 $\exists \bar{X}_k(f)$ が存在して、*such that*

$$T(r; \omega_{\bar{Z}, J_k(f)}) \leq N_1(r; J_k(f)^* Z) + \epsilon T_f(r) \|\epsilon, \\ \forall \epsilon > 0,$$

ここで、 $\bar{Z}$ は $\bar{X}_k(f)$ での Z の閉包である。

(ii) 更に、もし $\text{codim}_{X_k(f)} Z \geq 2$ ならば、

$$T(r; \omega_{\bar{Z}, J_k(f)}) \leq \epsilon T_f(r) \|\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

(iii) $k = 0$ で Z が A 上の正係数因子 D の場合は、 A のコンパクト化 $\bar{A}$ が、非特異、 A 作用同変かつ f に独立にとれて、

$$T_f(r; L(\bar{D})) \leq N_1(r; f^* D) + \epsilon T_f(r; L(\bar{D})) + \epsilon, \\ \forall \epsilon > 0.$$

上述 (iii) は、次の Lang の予想の別証明も与える。

Corollary 15 (Y.T. Siu-Z.K. Yeung 1996、野口 1998、M. McQuillan 2001)

A を準アーベル多様体、 D をその上の被約因子とすると、 $\forall f : \mathbb{C} \rightarrow A \setminus D$ は代数退化する。

§8 準アーベル多様体の有限被覆

前節の結果の応用として対数的 Bloch-落合の定理を改良する。 X を正規代数多様体とし必ずしもコンパクト性を仮定しない。 $\bar{\kappa}(X)$ でその(対数的)小平次元を表す。 A を準アーベル多様体とする。

定理 16 (野口-Winkelmann-山ノ井 2007)

次を仮定する。

(i) $\exists \pi : X \rightarrow A$ 有限射。

(ii) $\bar{\kappa}(X) > 0$.

すると、 $\forall f : \mathbb{C} \rightarrow X$ は代数退化する。

注意 条件 “ $\bar{\kappa}(X) > 0$ ” は X が準アーベル多様体になることを禁じている。対数的 Bloch-落合の定理でも上述の定理 16 においても証明は、結局 X が一般型の場合に帰着してなされる。その意味では、これら定理は、Green-Griffiths 予想の特別な場合とも言える。

Corollary 17 X の準 Albanese 写像は、固有とする。 $\bar{\kappa}(X) > 0$ および $\bar{q}(X) \geq \dim X$ を仮定すると、

$\forall f : \mathbb{C} \rightarrow X$ は代数退化する。

この特別な場合として次を得る。

Corollary 18 $D = \sum_{i=1}^q D_i$ を $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の単純正規交叉因子とする。 $q \geq n + 1$ 、 $\deg D \geq n + 2$ と

仮定する。すると、 $\forall f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus D$ は代数退化する。

注意 これは、1987年の古典的 Borel の定理の拡張とも言える。 $n = 2, q = 4$ で、 D_1, D_2, D_3 が直線、 D_4 が2次 Fermat 曲線の場合は、M. Green が予想していた (1974)。

§9 山ノ井の相対第二主要定理

山ノ井は、論文 Acta(2004)において、有理型関数に対する Nevanlinna の第二主要定理を動標的に対し、打ち切りレベル1の個数関数をもって証明した。この結果は、その道の専門家を驚かせるものであった。証明では、Ahlfors の被覆定理、 $\mathbb{P}^1$ の点分布のモジュライ理論、ツリーの理論などが縦横に用いられる。Math. Review のなかで、D. Drasin は次のように言及している。

D. Drasin: This outstanding paper resolves several issues in classical value-distribution theory, but perhaps more significantly does it

by methods that reach far beyond those considered in the usual theory.

.....

A fundamental role is played by Ahlfors' theory of covering surfaces (now 70 years old), with the author systematically examining Ahlfors' insights and decompositions of the covering of the sphere induced by a meromorphic function.

.....

; this was obtained using an ingenious manipulation of Ahlfors' viewpoint, with sophisticated combinatorics,

.....

The general problem, then, , using refinements of the Ahlfors theory and a tree structure to include all cases. However, the combinatorics rely on the structure of the moduli space, ; however, this will be hard going for classically-trained readers. There are several interesting applications of the results here.

.....

さて、ここでは山ノ井の定理をここでの目的に使いやすい形で述べよう。

$p : X \rightarrow S$ 非特異射影代数多様体間の全射とし、 $K_{X/S}$ は相対標準束を表すとする。

定理 19 (山ノ井 2004)

相対次元 $\dim X/S = 1$ 、 $D \subset X$ を被約因子、 $f : C \rightarrow X$ を代数非退化と仮定し、 $g = p \circ f : C \rightarrow S$ とおく。

この時、 $\forall \epsilon > 0$ に対し $\exists C(\epsilon) > 0$ で、

$$\begin{aligned} T_f(r; [D]) + T_f(r; K_{X/S}) \\ \leq N_1(r; f^*D) + \epsilon T_f(r) + C(\epsilon) T_g(r) \|\epsilon. \end{aligned}$$

ここで、 $f : C \rightarrow X$ に対し次の新しい概念を導入しよう。

小次元 $s\text{-dim}(f)$

Y を X 内での像 $f(C)$ のザリスキー閉包とし、 $C(Y)$ で Y の有理関数体を表すと、

$$\text{transc-deg}_C C(Y) = \dim Y \leq \dim X.$$

$$S(f) = \{\phi \in C(Y); \text{Supp}(\phi)_\infty \not\supset f(C), \\ T(r; f^*\phi) \leq \epsilon T_f(r) + o(r), \forall \epsilon > 0\}.$$

とおく。すると、 $S(f)$ は $C(Y)$ の部分体をなす。

$$\text{s-dim}(f) = \text{transc-deg}_C S(f)$$

とおく。

命題 20 代数非退化な $f : C \rightarrow X$ があれば、 $\text{s-dim}(f) < \dim X$ 。

Corollary 11 (Log Bloch-Ochiai) や Corollary 15 (Lang's conjecture) の証明では、実は f が代数非退化との仮定の下、高次ジェット $J_k(f) (k \gg 1)$ に対し

$$\text{s-dim}(J_k(f)) = \dim \overline{J_k(f)(C)}^{\text{Zar}}$$

を示し、矛盾を導いた。

山ノ井の相対第二主要定理の応用として、次を得る。

定理 21 $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ に対し次を仮定する。

$$\bar{\kappa}(X) = \dim X = 2, \quad \text{s-dim}(f) = 1.$$

すると、 f は代数退化である。

証明 f は代数非退化であったとせよ。仮定より 適当な双有理変換の後、曲線 $\exists S$ と正則全射 $\exists p : X \rightarrow S$ があって、 $g = p \circ f : \mathbb{C} \rightarrow S$ は非定値で次を満たすようにできる。

$$T_g(r) \leq \epsilon T_f(r) \|\epsilon.$$

S は有理曲線か楕円曲線であるので、 $\kappa(S) \leq 0$ 。 $K_{X/S} = K_X - p^* K_S$ であるから、 $K_{X/S}$ は大 (ビッグ) である。よって、

$$T_f(r; K_{X/S}) \sim T_f(r).$$

これと、山ノ井の相対第二主要定理を組み合わせると、次の矛盾を得る。

$$T_f(r) \leq \epsilon T_f(r) \|\epsilon. \quad (\text{q.e.d})$$

§10 より易しいと思われる予想

正則曲線の基本予想は、次のものであった。

正則曲線の基本予想 X を非特異射影代数的多様体、 $D = \sum_i D_i$ を X 上の単純正規交叉因子とせよ。任意の代数非退化正則曲線 $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ に対し次が成立する。

$$\begin{aligned} T_f(r; [D]) + T_f(r; K_X) \\ \leq \sum_i N_1(r; f^* D_i) + \epsilon T_f(r) + o(\epsilon), \quad \forall \epsilon > 0. \end{aligned}$$

この線から、小林予想に迫りたい。

正則曲線の基本予想、まだ難しいので特化する。が、 D の仮定はゆるめる。

X を n 次元射影多様体とし、埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ をとる。

$\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ を一般的な射影、 D をその X 上の分岐因子、 $E = \pi_* D$ を $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上の分岐跡因子とする。

以下の議論では、 π は動きうるので、一般の π について予想が成立すれば十分である。

予想 1 上述記法のもと、 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ を代数非退化とすると、

$$\begin{aligned} & \{\deg E - n - 1\}T_f(r) \\ & \leq N_1(r; f^*E) + \epsilon T_f(r) \|\epsilon, \\ & \quad \forall \epsilon > 0, \end{aligned}$$

が成立する。

次に、第一主要定理の変形を考える。

予想 2 $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ を代数非退化とすると、

$$\begin{aligned} T_f(r; [D]) \leq & N_1(r; f^*D) + m_f(r, D) \\ & + \epsilon T_f(r) \|\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0. \end{aligned}$$

これは、一般の X に対し主張する。

予想 1 + 2 $\Rightarrow$ Green-Griffits 予想

$f : \mathbb{C} \rightarrow X$ を代数非退化とせよ。

射影 $\pi : X \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, 分岐因子 D (X 上), 分岐跡因子 E ($\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 上) をとり、予想 1・2 が成立とする。

予想 1 は次を含む。

$$\begin{aligned} & (\deg E - n - 1)T_g(r) \\ & \leq N_1(r; g^*E) + \epsilon T_g(r) \parallel \epsilon. \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} & N(r; g^*E) - N_1(r; g^*E) \\ & \leq (n + 1)T_g(r) - m_g(r; E) + \epsilon T_g(r) \parallel \epsilon. \end{aligned}$$

分岐因子については、

$$\begin{aligned} & N_1(r; f^*D) \leq N(r; g^*E) - N_1(r; g^*E) \\ & \leq (n + 1)T_g(r) - m_g(r; E) + \epsilon T_g(r) \parallel \epsilon. \end{aligned}$$

予想 2 より、

$$\begin{aligned} T_f(r; [D]) & \leq N_1(r; f^*D) + m_f(r, D) \\ & \quad + \epsilon T_f(r) \parallel \epsilon \end{aligned}$$

これら二つと $m_f(r; D) \leq m_g(r; E)$ を併せて、

$$\begin{aligned} T_f(r; [D]) &\leq (n+1)T_g(r) - m_g(r; D) \\ &\quad + \epsilon T_g(r) + m_f(r; D) \\ &\leq (n+1)T_g(r) + \epsilon T_g(r) \parallel \epsilon. \end{aligned}$$

$K_X = \pi^* K_{\mathbf{P}^n(\mathbf{C})} + D$ に注意して、

$$T_f(r; K_X) = -(n+1)T_g(r) + T_f(r; [D]).$$

斯くして、

$$T_f(r; K_X) \leq \epsilon T_g(r) \parallel \epsilon.$$

K_X は大なので、 $T_f(r; K_X) \sim T_g(r)$ 。 よって、 次の矛盾を得る。

$$T_g(r) \leq \epsilon T_g(r) \parallel \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

注意 予想 1 と 2 は、 $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 上の有限被覆ではなく、準アーベル多様体上の有限被覆に対しては、成立している (定理 14)。