複素数の広がり

野口潤次郎

東京大学大学院数理科学研究科

平成 21(2009) 年 10 月 24 日（土）

複素数の広がり

野口潤次郎
東京大学大学院数理科学研究科

平成 21(2009) 年 10 月 24 日（土）

複素数に限らず、数学についてなにかを不特定な一般の方々にお話しするとなると、どのような立場・観点をとるのかが一番の考え所になります。聴衆の方々との共有点をどこに求めるのかということになります。複素数を考えると、まずはどうしてそのような「数」を考えることになったのかということから始めるのが適当に思われます。すると自然にその歴史的経緯を述べることになります。本居宣長の言にありますよう「学問は、歴史に極まり候」とは、確かなもののようです。そのようなわけで以下のような内容についてお話ししようと思います。

1. 複素数の導入。
2. 複素関数・複素解析関数（正則関数）。
3. 代数学の基本定理、コーシーの積分公式、...。
4. 多変数の正則関数、岡の連接定理。
5. 数学理解の進展の型。
6. 言語表現（言霊）ということ。風の谷のナウシカのオーマの場面。
7. 複素数をもって表現を得ている他の分野。双曲幾何学、....、量子ビット（量子計算機の理論）、宇宙創生論。
8. 数学的理解の源を求めて。神話と数学。

数学のある問題が分かるということは、それを理解したとする言語表現を得ることです。しかし言葉の初めには、厳密には、意味がない。それでは、何が意味を作り、働いているのでしょうか。

お話しの後の方は、個人的な経験と職業から離れて少し調べたことにもとづく話しで、皆様からのご批判を期待するところです。時間の中で、どこまでゆけるか分かりませんが、皆様とおもしろく思える時間を持てれば幸いです。

....

次ページの「数理科学」2009 年 8 月号の表紙コピーはサイエンス社より許諾を得て掲載。

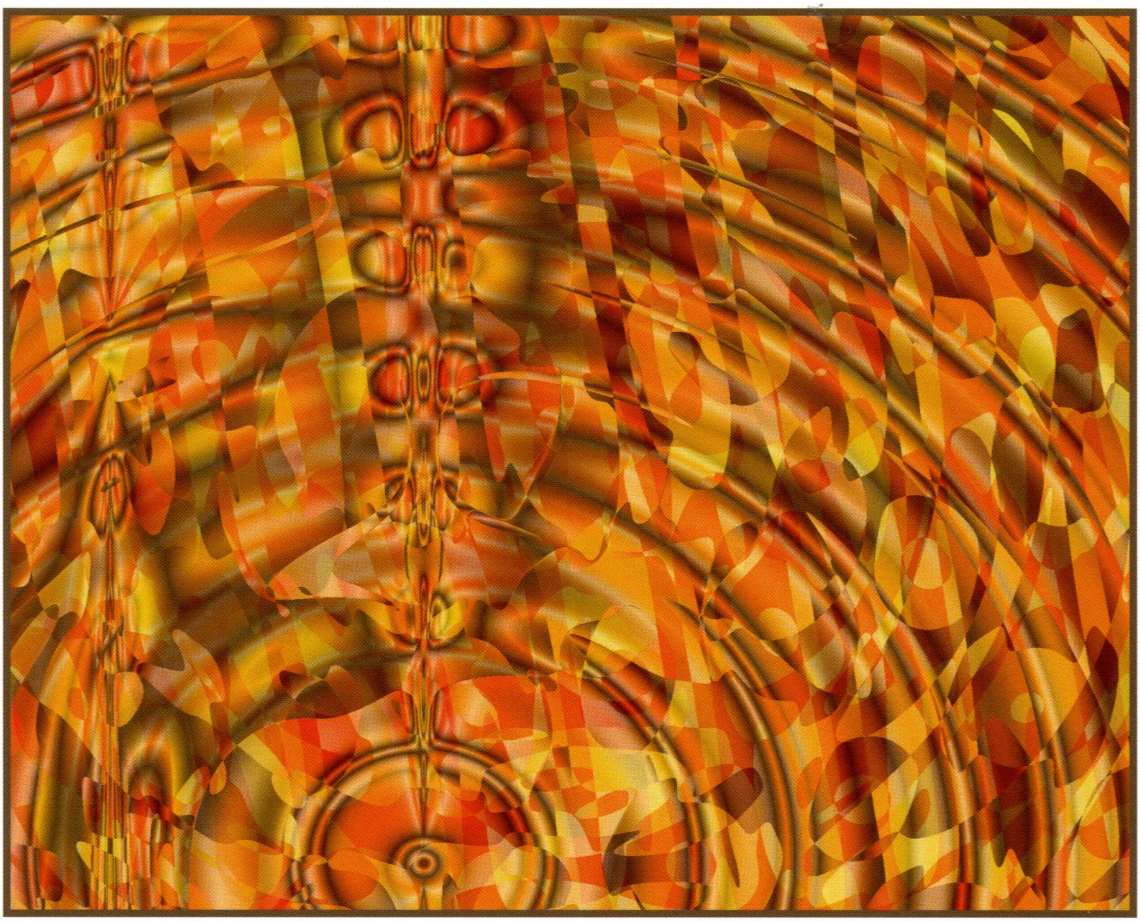
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2009年8月1日発行　第47巻8号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

8
2009

特集 複素数
その奥深い魅力と広がり

巻頭言　野口潤次郎
複素数とは何か　難波　誠
複素関数のキーワード　正則関数，コーシーの積分定理，留数定理など　真島　秀行
微分方程式と複素関数　吉田　正章
素数分布と函数論　本橋　洋一
複素力学系入門　宍倉　光広
複素数と基礎物理　物理における複素数の役割　佐藤　光
複素数と現代物理　自然は複素数を必要としているのか　加藤　晃史
［コラム］有理型関数と学習理論　渡辺　澄夫
［コラム］複素数からクリフォード代数へ　前田　吉昭
［コラム］複素数と数理工学　田中　剛平　合原　一幸
［インタビュー］複素数いろいろ　野口潤次郎
《連載》目で見て学ぶ量子力学　その12　外村　彰
問題例で深める物理　その7　香取　眞理　中野　徹
《物理の道しるべ》第10回　北原　和夫



No.554

サイエンス社

§1 複素数

(1.1)
$$z = x + iy$$

x, y は、実数。
i は、虚数単位と呼ばれ、次の性質を満たす。

$$i^2 = -1, \qquad i^2 + 1 = 0.$$

実数の全体を **R** と書く。
複素数の全体を **C** と書く。

数字（文字として）：シュメール B.C. 3 千年紀前半（粘土板)。
数の色々：

- 自然数 (**N**)： $1, 2, 3, \ldots;$ $+, \times,$ 大小
- 整　数 (**Z**)： $0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$ $\pm, \times,$ 大小
- 有理数 (**Q**)： $\dfrac{q}{p}$, p, q は整数で、$p \neq 0;$ $\pm, \times, \div,$ 大小
- 実　数 (**R**)： $\pm, \times, \div,$ 大小
- 複素数 (**C**)： $\pm, \times, \div$ （四則演算）

どうして数の体系を大きくするのか？

（イ） 1次方程式： (1) $aX = b$, (2) $aX + b = 0$, $a \neq 0$.

解法：(1) $X = \dfrac{b}{a}$ 分数, (2) $X = -\dfrac{b}{a}$ 負の分数: $(\mathbf{Q})$.

ある数の体系が与えられたとき、その数を用いて記述される方程式をその数の体系の中で解こうとすることは、自然な行い。

（ロ） 2次方程式： $aX^2 + bX + c = 0$, $a \neq 0$

解法：一般に $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ を使う。

$$X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} = \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0.$$

$$\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

$$X + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

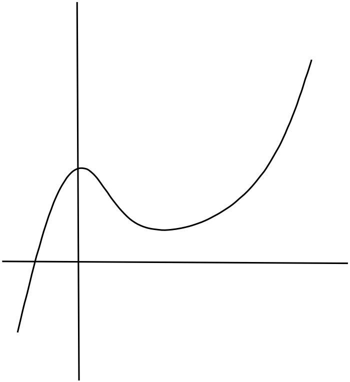
- $b^2 - 4ac \geqq 0 \Longrightarrow X$ は、実数 ($\mathbf{R}$ の元, $X \in \mathbf{R}$) として解が求まる。
  $b^2 - 4ac < 0 \Longrightarrow$ 解は、無い。実数の二乗は、正である（大小)。

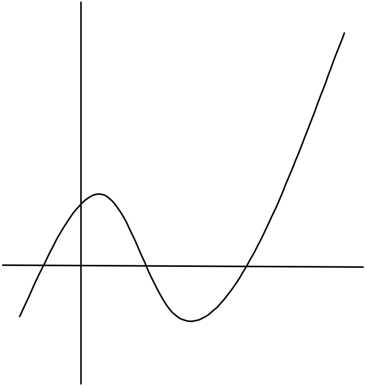
（ハ）３次方程式：　$aX^3 + bX^2 + cX + d = 0, \quad a \neq 0$

解法：ジェロラモ・カルダーノ（Girolamo Cardano, 1501 年 9 月 24 日 - 1576 年 9 月 21 日）

ニコロ・フォンタナ・タルタリア（Niccolo‘ Fontana Tartaglia、1499 年または 1500 年-1557 年 12 月 13 日）

３次曲線は必ず実根を持つことが事前に分かっている。





但し、これは $a > 0$ の図。

解いてみよう：今度は、$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ を使う。$aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$ 全体を a で割って、

$$X^3 + bX^2 + cX + d = 0 \tag{1.2}$$

と帰着する。$X = Y + u$（u は後から決める）とおくと、

$$Y^3 + (3u+b)Y^2 + (3u^2+2b+c)Y + u^3 + bu^2 + d = 0.$$

$u = -\frac{b}{3}$ と決める。(1.2) は、次に帰着される。

$$Y^3 + cY + d = 0. \tag{1.3}$$

$Y = Z + \dfrac{v}{Z}$ とおき（v は後で決める）、(1.3) に代入する。

$$
\begin{aligned}
&\left(Z+\frac{v}{Z}\right)^3+c\left(Z+\frac{v}{Z}\right)+d \\
&=Z^3+3vZ+\frac{3v^2}{Z}+\frac{v^3}{Z^3}+c\left(Z+\frac{v}{Z}\right)+d \\
&=Z^3+3vZ+\frac{3v^2}{Z}+\frac{v^3}{Z^3}+c\left(Z+\frac{v}{Z}\right)+d \\
&=Z^3+(3v+c)\left(Z+\frac{v}{Z}\right)+\frac{v^3}{Z^3}+d.
\end{aligned}
$$

$v=-c/3$ とおけば、結局 (1.2) は、次の方程式に帰着する。

$$Z^3+\frac{e}{Z^3}+d=0.$$

全体に Z^3 を掛けて、

$$(Z^3)^2 + d(Z^3) + e = 0 \tag{1.4}$$

という２次方程式に帰着される。２次方程式の解法より、

$$Z = \left(\frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4e}}{2} \right)^{1/3},$$
$$Y = Z + \frac{v}{Z}.$$

$d^2 - 4e < 0$ ならば、実根のみを求める為にも $\sqrt{負の実数}$ を使わざるを得ない。

結論：３次方程式の実根を求める公式のためには、虚数 “$\sqrt{負の実数}$” の導入が必然である。

虚数単位： $i^2 = -1 \iff i^2 + 1 = 0$

を導入して **複素数** $z = x + iy \in \mathbf{C}$ を考える。

再び、数の体系が拡大された：**四則演算**はできる。“**大小**” がなくなる。

複素数を発展させた人。まずは、

Leonhard Euler (1707∼83):

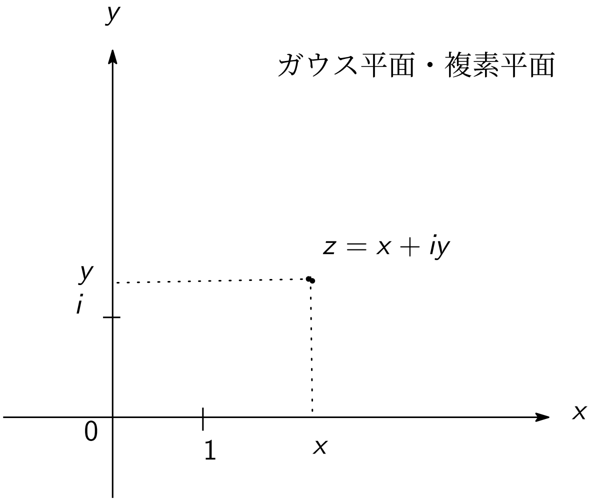
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

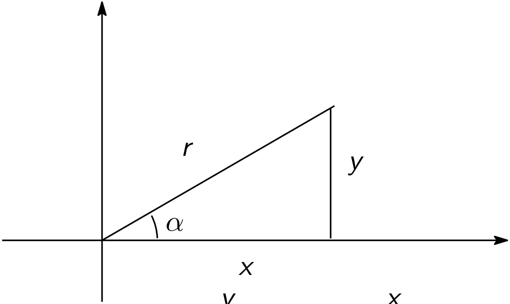
（オイラーの公式）

Friedrich Gauss (1777∼1855)：

ガウス平面・複素平面

ガウス平面・複素平面





$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$z = x + iy = re^{i\alpha} \qquad (\text{極座標}),$$
$$w = u + iv = se^{i\beta},$$
$$z \times w = (r \times s)e^{i(\alpha+\beta)},$$
$$e^{i\alpha} \times e^{-i\alpha} = 1.$$

§2 複素関数

問題：複素数を用いて記述される方程式は、複素数の中で解がみつかるのか？

定理 2.1

（代数学の基本定理 (Gauss)）任意次数の任意の複素数を係数とする代数方程式

$$a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

は、複素数の中で全て解が存在する。

ガウスは、４回証明を与えた。

簡明で、一番納得できる証明：Liouville の定理を用いた証明（学部２～３年）。

新しく、**正則関数・解析関数**という概念の導入。

複素数平面 **C** 上の正則（解析）関数 $f(z)$ とは、z の収束巾級数で表されるものである。

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

複素数自体は、$c_1 = c_2 = \cdots = 0$ の場合として特別な正則関数（定数関数）と見なされる。

C 上の正則関数の全体は、多項式関数の全体を含み、真に大きい。

定理 2.2

コーシーの積分公式。

ポイント：**線積分**を新たに得た.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

Tambara Institute of Mathematical Sciences
The University of Tokyo

定理 2.3

(Liouville) $\mathbf{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ に対し、ある正数 M があって $|f(z)| \leqq M$ $(z \in \mathbf{C})$（有界）ならば、$f(z) \equiv c \in \mathbf{C}$（定数）である。

ガウスの定理の証明：多項式関数

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

が $\mathbf{C}$ 上に零点を持たなかったとする。$f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ は、$\mathbf{C}$ 上の正則関数で、定数ではない。

更に、$|z| \to \infty$ とするとき $|f(z)| \to 0$ となるので、$\mathbf{C}$ 上有界である。リュービルの定理で、$f(z)$ は定数関数でなければならない。これは、矛盾。

ガウスの定理の言い換え：多項式関数 $P(z)$ は、任意の複素数 $a \in \mathbf{C}$ に対し $P(z) = a$ となる根 $z \in \mathbf{C}$ を持つ。

この証明で正則関数の概念を導入した。では、

この性質は、$\mathbf{C}$ 上の正則関数についてはどうか？

$$f(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

は、$\mathbf{C}$ 上の正則関数で 0 を取らない：$f(z) \cdot f(-z) = e^z \cdot e^{-z} = e^0 \equiv 1.$

定理 2.4

(Picard) $\mathbf{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ が、２つの複素数を値として取らなければ、$f(z)$ は、定数である。

$f(z)$ が有界ならば、取らない値は無限個ある。その意味で、Picard の定理は Liouville の定理を大幅に改良するものである。

〜〜〜〜〜〜この延長線上に私の研究課題：非ユークリッド幾何と関係。

ここまでで見てきた問題解決へのアプローチ：基本に戻って概念を見直し、それを拡張して既存の問題を解決する（理解の表現を得る）。

§3 多変数関数論

変数の数を増やして一般に n 個の複素変数 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ の正則（解析）関数

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

を考える。局所的には、考えている点 $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n$ の近くで、次のように収束巾級数で表されるものである。

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n \geqq 0} c_{\nu_1\ldots\nu_n}(z_1 - a_1)^{\nu_1}(z_2 - a_2)^{\nu_2} \cdots (z_n - a_n)^{\nu_n}.$$

(1) Weierstrass は、Weierstrass の予備定理（**局所理論**）を証明し、多変数正則関数 $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ の性質は、一変数正則関数とたいした違いはない、と考えていた（19 世紀後半）。

(2) その後、しばらくして同じようにはなっていないという事実が次々に出てきた。

次の２つに集約された。

1. クザン問題 I、II.
2. レビ問題.

(3) 困難な点：「局所理論 $\Longrightarrow$ 大域理論」のギャップが、これまでになく大きい。

(4) 岡潔 (1901-1978) が、全て解決。

通常の常識的アプローチ：

$$\text{局所理論} \Longrightarrow \text{準大域理論} \Longrightarrow \text{大域理論}$$

岡潔があるステップでとったアプローチ：

$$\begin{array}{ccccccc} \text{究極局所理論} & \Longleftarrow & \text{局所理論} & & & & \\ \Downarrow & & & & & & \\ \Longrightarrow & & \Longrightarrow & & \Longrightarrow & & \text{大域理論} \end{array}$$

“究極局所理論” で得られた言葉が、
「不定域イデアル (idéaux de domaines indéterminés)」
であった： *idéaux coherent*, *coherent ideal* .
その後、H. Cartan や J.P. Serre 等により整理され、

1. 層の理論：J. Leray, 1946 2 頁の論文に始まる。
2. **岡の連接定理 (Oka’s Coherence Theorem)** (1948)。
3. 連接層のコホモロジー理論が局所理論と大域理論を結ぶという、問題解決の方法が確立した。

§4 岡の連接定理

論文：K. Oka, Sur quelques notions arithmétiques (Bulletin 版), Bulletin de la Société Mathématique de France 78 (1950), p.1-27 （受理 1948 年 10 月 15 日）

一点 $\mathrm{P}_0 \in \mathbf{C}^n$ を含むが、定義されている場所が指定されていない正則関数に関する次の一次関係式を考える。

$$A_1(z)F_1(z) + A_2(z)F_2(z) + \cdots + A_N(z)F_N(z) = 0. \tag{4.1}$$

$A_i(z)$ は与えられた正則な係数関数で、$F_i(z)$ は未知正則関数である。

定理 4.2

(岡の連接定理) 有限個の (4.1) の解の組

$$(F_{1,\alpha}(z), F_{2,\alpha}(z), \ldots, F_{N,\alpha}(z)),\ \alpha = 1, 2, \ldots, M(< \infty)$$

が存在して、点 P_0 の近くの全ての点 Q での (4.1) の解を一次結合で書き表せる。

Grauert-Remmert, “Coherent Analytic Sheaves” (1984) より：

Of great importance in Complex Analysis is the concept of a *coherent* analytic sheaf. Already in 1944 Cartan had experimented with the notion of coherent system of ..... He posed the fundamental problem, ... In 1948 Oka gave an affirmative answer .....”

岡 潔： 奈良女子大学附属図書館「岡潔文庫」 http://www.lib.nara-wu.ac.jp/oka/

岡潔博士の遺稿集からの画像。第 VII 論文に関係する部分から。

複素数の導入 $\Rightarrow$ ガウスの代数学の基本定理 $\Rightarrow$ コーシーの積分定理 $\Rightarrow$ 岡の連接定理.

共通に見られるもの：基本に戻って概念を見直し、それを拡張して既存の問題を解決する（理解の表現を得る）。

名前を与える（言葉を与える）ことは、本質的に重要である。

言葉が適切に与えられると、その言葉が自然に姿を持ち、自身で働き始める（言霊）。

宮崎のナウシカのオーマの場面。

複素数をもって表現を得ている他の分野：

1. 双曲幾何学（非ユークリッド幾何学）（数学）
2. 流体の運動方程式（飛行機の翼）
3. 電磁気学
4. 量子ビット（量子計算機の理論）
5. 量子力学
6. 理論宇宙物理、宇宙創生理論

(a) 量子計算機の理論・量子ビット：

$$v = (z, w) \in \mathbf{C}^2, \quad |z|^2 + |w|^2 = 1.$$

量子ビットの全体空間 = リーマン球面 $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ 上の S^1 束

（数学的視点）

(b) 量子力学、シュレーディンガー方程式 (波動関数 ψ)：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi.$$

(c) 宇宙創生論：佐藤勝彦・二間瀬敏史編「宇宙論 I」（日本評論社）より、

「1983 年、インフレーション理論が提唱されてしばらくたった頃、宇宙は “無” の状態から創生されたというモデルが A. Vilenkin によって提唱される。...... 量子宇宙は大きさゼロの状態からトンネルをくぐって出てくるまで、虚数の時間で膨張してゆく。トンネルから出たところで実時間となり、インフレーション宇宙へとつながるのである。」

A. Vilenkin のアイデア：宇宙が準古典的に振る舞う場合、系全体の波動関数は

$$\psi(a,q) = A(a)e^{iS(a)/\hbar}\xi(a,q) = \psi_0(a)\xi(a,q). \tag{4.3}$$

この方程式から、“時空間” が自然に導出される。

問題点：(4.3) の妥当性の吟味。量子力学でのトンネル効果の理解のアナロジーを追っている。

●宇宙（この世）が、どのようにして始まったかを理解しようという試みは、人類太古からのテーマであった。理解するということは、言語表現を与えるということであるから、“神話” はその初出。

●「宗教と科学」という形而上学的観点ではなく、もっと身近な「神社と数学」（算額ではない）の観点で、これを見てみたい。

§5 空間の理解

ユークリッド幾何：空間と図形の理解のための言語表現である。

ユークリッド原論:

定義

1. 点とは部分をもたないものである。
2. 線とは幅のない長さである。
3. 線の端は点である。
4. 直線とはその上にある点について一様に横たわる線である。
⋮
23. 平行線とは、同一の平面上にあって、両方向に限りなく延長しても、いずれの方向においても交わらない直線である。

公準（要請）　1. ∼ 5.

公理（共通概念）　1. ∼ 9.

このパターンは、神話を連想させる。

ギリシャ神話の神々：ガイア、エロス、エレボス、ウラノス、....、クロノス、アフロディテ、....

キリスト教 Testament：アダムの系図（アダムーカインーアベルーエノクー … ーセツーエノスーカイナンーマハラレー … ）、

古事記：伊邪那岐命の神々の生成の場面、また よもつ平坂での伊邪那美命との別れの後、禊ぎから生まれる神々、....

初めは、無定義語で始まり、次々に言葉が定められ、それらが自身で動き始める。

数学・自然科学は、神話のアナロジー（言語表現による理解の型）を追っている。

● "新たな理解" を得るという言語表現の創造的営みの為には話し言葉（母語・国語）の記述能力の涵養が、大事でこれを教育の基本とすべきである。

●特に表音文字の使い方が重要。

●言葉は意味を伝えるだけの単なる貼附ではない（小林秀雄「本居宣長」より）。創造の源。

●体系化、システム化の営みが大事。

Testament: 一創造

第一章　始めに神が天地を創造された。地は混沌としていた。暗黒が原始の海の表面にあり、神の霊風が大水の表面に吹きまくっていたが、神が「光あれよ」と言われると、光が出来た。神は光をみてよしとされた。神は光を昼と呼び、暗黒を夜と呼ばれた。こうして夕あり、また朝があった。以上が一日である。.....

孔子 論語 巻第一：　学而第一

子の曰わく、学びて時にこれを習う、亦た説ばしからずや。朋あり、遠方より来たる、亦た楽しからずや。人知らずしてうらみず。亦た君子ならずや。........

古事記（太安万侶記述）：　天地初めて発けし時、高天の原になれる神の名は、天之御中主の神。次に高御産巣日神、次に神産巣日神。この三柱の神は、みな独神となりまして、身を隠したまひき。

次に国稚く浮きし脂の如くして、海月なす漂へる時、葦牙の如く萌え騰がる物によりて成れる神の名は、宇摩志阿斯訶備比古遅神。次に天之常立神。この二柱の神もまた、独神と成りまして、身を隠したまいき。（別天つ神五柱）

次に成れる神の名は、... 二神... 独神、身を隠したまいき。次に成れる神の名は、宇比地邇神（身を隠さない神の初出）、... 7 柱の神 ....、次に伊邪那岐神、次に伊邪那美神。

....

古事記

速須佐之男命

八雲立つ、出雲八重垣、
妻籠みに、 八重垣作る
その八重垣を。

夜久毛多都 伊豆毛夜幣賀岐
都麻碁微爾 夜幣賀岐都久流
會能夜幣賀岐袁

あをによし　奈良の都に　たなびける　天の白雲　見れど飽かぬかも
安乎尓余志　奈良能美夜古尓　多奈妣家流　安麻能之良久毛　見礼杼安可奴加毛

あおに良し奈良の都は咲く花の匂うが如く今盛りなり
青丹吉　寧楽乃京師者　咲花乃　薫如　今盛有

春過ぎて　夏来るらし　白妙の衣干したり　天の香具山　（持統天皇）
春過而　夏来良之　白妙能　衣乾有　天乃香来山