訂正と補足

岡理論 新入門–多変数関数論の基礎

初版第 1 刷 (2021)

訂正表

+x : 上からの行数　　−x : 下からの行数

(1) p. 23, −5: $f(z)$ $(z \in \bar{\Omega})$ $\Longrightarrow$ $f(\zeta)$ $(\zeta \in \prod_j \bar{E}_j)$
(2) p. 31, +6: 近傍 $\Longrightarrow$ 連結近傍
(3) p. 31, +6: $f(z)$ $\Longrightarrow$ $f(z)$ $(\not\equiv 0)$
(4) p. 31, +7: (z_1, z') $\Longrightarrow$ (z', z_n)
(5) p. 35, +1, +2 (2ヶ所): $e^{i\theta}$ $\Longrightarrow$ $e^{i\theta_j}$
(6) p. 38, +13: $\mathscr{I}\langle X\rangle$ $\Longrightarrow$ $I(X)$
(7) p. 41, −2: **切断** $\Longrightarrow$ **切断空間**
(8) p. 62, +6: $\|_{\tilde{E}'_{(1)}\cap\tilde{E}''_{(1)}}$ $\Longrightarrow$ $\|_{\tilde{E}'_{(2)}\cap\tilde{E}''_{(2)}}$
(9) p. 66, −1 補題 2.4.1: 別紙 '修正と補足' 参照.
(10) p. 72, 7 ∼ 8 : syzyzy $\Longrightarrow$ syzygy (2 箇所)
(11) p. 91, +8: 近傍 $U \subset K$ $\Longrightarrow$ 近傍 $U \supset K$
(12) p. 93, +11: $\varphi_j \in \mathscr{O}(\Omega_1)$ $\cdots$ とする. $\Longrightarrow$ $|\varphi_j| < 1$, $\varphi_j \in \mathscr{O}(\Omega_1)$ $(1 \le j \le l)$ で P_1 は定義されているとする.
(13) p. 97, +14: $\mathbf{C}^n$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{C}^2$
(14) p. 121, +7, +8 (2ヶ所): $\mathscr{I}(\varphi_\mu(S \cap \tilde{\mathrm{P}}_\mu))$ $\Longrightarrow$ $\mathscr{I}\langle\varphi_\mu(S \cap \tilde{\mathrm{P}}_\mu)\rangle$
(15) p. 121, +9, +11 (2ヶ所): $\mathscr{I}(S)$ $\Longrightarrow$ $\mathscr{I}\langle S\rangle$
(16) p. 121, −4, −3: $\overline{\mathrm{P}\Delta}$ $\Longrightarrow$ $\overline{\mathrm{P}\Delta}_\mu$
(17) p. 121, −4: $\widetilde{\mathrm{P}\Delta}$ $\Longrightarrow$ $\widetilde{\mathrm{P}\Delta}_\mu$
(18) p. 121, −3: $\bar{\mathrm{P}}$ $\Longrightarrow$ $\bar{\mathrm{P}}_\mu$
(19) p. 129, −5, **証明** $\Longrightarrow$ **証明** $\mathrm{B} \subset \mathrm{P}\Delta$ と仮定してよい.
(20) p. 130, +4: $\|w_\nu\| \le \rho/2$ $\Longrightarrow$ $w_\nu \in \frac{\rho}{2}\overline{\mathrm{P}\Delta}$
(21) p. 130, +7: $\|w_0\| \le \rho/2$ $\Longrightarrow$ $w_0 \in \frac{\rho}{2}\overline{\mathrm{P}\Delta}$
(22) p. 165, −4: T $\Longrightarrow$ $\hat{T}$
(23) p. 168, +2: $\partial\mathfrak{D}$ $\Longrightarrow$ $\partial\mathfrak{D}_c$
(24) p. 168, +3: $U \cap \mathfrak{D}$ $\Longrightarrow$ $U \cap \mathfrak{D}_c$
(25) p. 174, −1: a によらない $\Longrightarrow$ 削除
(26) p. 180, +11: $\}_{j=1,2}$ $\Longrightarrow$ $\}_{j=0,1}$
(27) p. 187, −1: 点 $a \in E$, $\Longrightarrow$ 削除
(28) p. 188, +5: $x \in E$ $\Longrightarrow$ $x \in E \setminus \{0\}$
(29) p. 196, −5: $(1 \le k \le m)$ と制限 $\Longrightarrow$ $(1 \le k \le m)$ かつ $\mathfrak{D}_1$ では $x_1 < \delta$, $\mathfrak{D}_2$ では $x_1 > -\delta$ と制限
(30) p. 197, +10, +11: G $\Longrightarrow$ 積分 (2ヶ所)
(31) p. 201, +2: $\{|x_1| < \delta_1$ $\Longrightarrow$ $\{z \in A : |x_1| < \delta_1$
(32) p. 201, −2: 閉包 $\bar{\tilde{\mathfrak{D}}}$ $\Longrightarrow$ 閉包 $\bar{\tilde{\mathfrak{D}}}_\nu$
(33) p. 201, −2: $\mathscr{O}\left(\bar{\tilde{\mathfrak{D}}}\right)$ $\Longrightarrow$ $\mathscr{O}\left(\bar{\tilde{\mathfrak{D}}}_3\right)$
(34) p. 201, −1: 『同様に, $\tilde{\mathfrak{D}}_\nu$ $(\nu = 1, 2)$ を定義し,』 $\Longrightarrow$ 『同様に $\tilde{\mathfrak{D}}_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ を定義し,』として 1 行上の『$\tilde{\mathfrak{D}}$ で,』の後ろへ移動.
(35) p. 202, +2: I_ν $\Longrightarrow$ $I_\nu(G)$
(36) p. 202, +2: f_ν $\Longrightarrow$ $f_{0\nu}$
(37) p. 202, +5: $\bar{\mathfrak{D}}$ $\Longrightarrow$ $\mathfrak{D}$
(38) p. 210, +4: (2 番目) 開被覆 $\Longrightarrow$ な細分
(39) p. 210, +8: $(U_\alpha, \mathscr{O})$ $\Longrightarrow$ (U_α)
(40) p. 220, +7: $\mathfrak{D}_{\mathfrak{D}}$ $\Longrightarrow$ $\mathscr{O}_{\mathfrak{D}}$
(41) p. 220, −7 ∼ −6: コサイクル $\Longrightarrow$ コホモロジー類
(42) p. 227, +1: $\forall$ $\Longrightarrow$ $\forall\,\alpha$
(43) p. 227, +10: $\mathfrak{D}_{\nu+1}$ で $\Longrightarrow$ $\mathfrak{D}_{\nu+1}$, $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{D}$ で

$$\alpha_i = \sum_{\nu=0}^{p'-1} \underline{c_{i\nu}(z')}_{b'} z_n^{\nu}, \quad \underline{c_{i\nu}(z')}_{b'} \in \mathscr{O}_{n-1,b'},\ 2 \le i \le q.$$

$\mathrm{P}\Delta = \mathrm{P}\Delta_{n-1} \times \Delta_{(n)}$ 上の (30) を満たす元 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ で，かつ

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_q P_q = 0 \tag{31}$$

を満たすものの全体を $\mathscr{S}(\subset \mathscr{O}^q_{\mathrm{P}\Delta})$ で表す．$\mathscr{S}$ は，$\mathrm{P}\Delta_{n-1}$ 上の $\mathscr{O}_{n-1}$ 加群の層と見ることができる．(31) の左辺は z_n 多項式的元で，次数は高々$p+p'-1$ である．したがって，関係式 (31) は，その z_n 多項式的元の $p+p'$ 個の係数全てが 0 であることと同値である．これは，(19) の表示を用いて書けば，次のようになる．

$$\sum_{i=1}^{q} \sum_{k+h=\nu}{}' \underline{c_{ih}(z')}_{b'} \cdot \underline{a_{ik}(z')}_{b'} = 0 \in \mathscr{O}_{n-1,b'}, \quad 0 \le \nu \le p+p'-1. \tag{32}$$

ここで，$\sum'$ とは，和が添字 h, k で実際対応する $\underline{a_{ik}(z')}_{b'}$, $\underline{c_{ih}(z')}_{b'}$ が存在するものに限ることを意味する．すると，(32) は $p+p'(q-1)$ 個の未知数 c_{ih} に関する $(p+p')$ 連立の $\mathscr{O}^{p+p'(q-1)}_{\mathrm{P}\Delta_{n-1}}$ 内の一次関係層 $\widetilde{\mathscr{S}}$ を定める．帰納法の仮定により $\widetilde{\mathscr{S}}$ は，0 のある近傍 $\widetilde{\mathrm{P}\Delta}_{n-1} \subset \mathrm{P}\Delta_{n-1}$ 上有限生成系をもつ．よって，(30) により $\mathscr{S}$ は $\widetilde{\mathrm{P}\Delta} := \widetilde{\mathrm{P}\Delta}_{n-1} \times \Delta_{(n)} (\subset \mathrm{P}\Delta_{n-1} \times \Delta_{(n)} = \mathrm{P}\Delta)$ 上有限生成系 $\{\pi_\mu\}_{\mu=1}^{M}$ をもつ．

以上により，$\mathscr{R}$ は $\widetilde{\mathrm{P}\Delta}$ 上 $\{T_{1,j}\}_{j=2}^{q} \cup \{\pi_\mu\}_{\mu=1}^{M}$ により生成されることがわかった． □

定理 16 と命題 1 (i) より：

系 33. 連接層の関係層は，連接層である．

定理 16 と本書の定理 2.2.17 (i) より次が従う．

定理 34. $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ を開集合，$S \subset \Omega$ を複素部分多様体とすると，$\mathscr{I}\langle S \rangle$ は連接層である．

$$c_i \in \mathscr{O}_{n,b},\ \beta_i \in \mathscr{O}_{n-1,b'}[z_n - b_n] = \mathscr{O}_{n-1,b'}[z_n],$$

(23) $$\deg_{z_n}\beta_i \le d-1.$$

$u \in \mathscr{O}_{n,b}$ は単元であるから，$\tilde{c}_i := c_i u^{-1}$ とおくことにより

(24) $$f_i = \tilde{c}_i P_1 + \beta_i, \qquad 1 \le i \le q.$$

これを使って計算すると，

(25) $$\begin{aligned}&(f_1,\dots,f_q) - \tilde{c}_2 T_{1,2} - \cdots - \tilde{c}_q T_{1,q}\\ &= (\tilde{c}_1 P_1 + \beta_1, \tilde{c}_2 P_1 + \beta_2, \dots, \tilde{c}_q P_1 + \beta_q)\\ &\quad + (\tilde{c}_2 P_2, -\tilde{c}_2 P_1, 0, \dots, 0) + \cdots + (\tilde{c}_q P_q, 0, \dots, 0, -\tilde{c}_q P_1)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{q} \tilde{c}_i P_i + \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q\right) = (g_1, \beta_2, \dots, \beta_q).\end{aligned}$$

ただし，$g_1 = \sum_{i=1}^{q} \tilde{c}_i P_i + \beta_1 \in \mathscr{O}_{n,b}$ とおいた．$\beta_i \in \mathscr{O}_{n-1,b'}[z_n]$, $2 \le i \le q$, であることに注意する．$(g_1, \beta_2, \dots, \beta_q) \in \mathscr{R}_b$ であるから，

(26) $$g_1 P_1 = -\beta_2 P_2 - \cdots - \beta_q P_q \in \mathscr{O}_{n-1,b'}[z_n].$$

(26) の右辺の表示より

$$\deg_{z_n} g_1 P_1 \le \max_{2\le i\le q} \deg_{z_n} \beta_i + \max_{2\le i\le q} \deg_{z_n} P_i \le d+p-1.$$

一方，$g_1 P_1 = g_1 u Q$ であり，Q は b でのワイエルシュトラース多項式である．再び補題 14 を使うと

$$\alpha_1 := g_1 u \in \mathscr{O}_{n-1,b'}[z_n],$$

(27) $$\deg_{z_n} \alpha_1 = \deg_{z_n} g_1 P_1 - \deg_{z_n} Q \le p-1.$$

$\alpha_i = u\beta_i \in \mathscr{O}_{n-1,b'}[z_n]$, $2 \le i \le q$, とおくことにより，(22) と (23) より

(28) $$\deg_{z_n} \alpha_i \le p_1 - d + d - 1 = p_1 - 1 = p' - 1, \quad 2 \le i \le q.$$

すると (25) より

(29) $$f = \sum_{j=2}^{q} \tilde{c}_j T_{1,j} + u^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q).$$ △

ここまでの議論では，まだ帰納法の仮定を使っていない．それを (29) に現れる $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ に対し局所有限生成系がとれることを示すのに使う．(27) と (28) により次のように書き表せる：

(30) $$\alpha_1 = \sum_{\nu=0}^{p-1} \underline{c_{1\nu}(z')}_{b'} z_n^{\nu}, \quad \underline{c_{1\nu}(z')}_{b'} \in \mathscr{O}_{n-1,b'},$$

修正と補足

(1) 補題 2.4.1 (岡シジジー) は，証明が未完になっている．弱連接定理自体は，証明も含めて正しいのであるが，この補題の証明には力不足になっている．このアプローチで証明が完了するか検討中であるが，ここでは以下のように岡の第 1 連接定理にもどり，その証明を補足する．

内容的には「弱連接定理」を「弱第 2 連接定理」として「第 1 連接定理」と共に用いる．現状では，p. iv にある項目 (i) はひとまず取り下げざるを得ない．読者には誤解とご不便かけることになり申し訳ありません．

(2) 補題 2.4.1 の命題文を次の様に修正する．

補題 2.4.1 (岡シジジー) $E \Subset \mathbf{C}^n$ を任意の閉直方体とする．

(1) E 上で定義された任意の連接層 $\mathscr{F}$ は，E 上で有限生成系をもつ．

(2) $\mathscr{F}$ は E 上で定義された連接層，$\{\underline{\sigma_j}\}_{1 \leq j \leq N}$ を E 上の $\mathscr{F}$ の有限生成系とする．このとき，任意の $\underline{\sigma} \in \Gamma(E, \mathscr{F})$ に対し E 上の正則関数 $a_j \in \mathscr{O}(E)$, $1 \leq j \leq N$ があって

$$\underline{\sigma} = \sum_{j=1}^{N} \underline{a_j} \cdot \underline{\sigma_j} \quad (E \text{ 上}) \tag{2.4.2}$$

と表される．

本書にあるこの補題の証明は，$\mathscr{F}$ を連接層とすれば，その任意の関係層 $\mathscr{R}$ も連接層になるので (この補足最後部の系 33)，証明は ‘局所有限’ を ‘連接’ に読み替えて，そのまま適用される．

補題 2.4.1 を定理 2.4.10 (幾何学的シジジー) で $\mathscr{I}\langle S\rangle$ に使うために，$\mathscr{I}\langle S\rangle$ の連接性が必要となるが，それは定理 2.2.17 (i) と当補足より従う (この補足最後の定理 34 を参照)．いずれも $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$ の連接性から導かれる．

(3) 以下最も基本的な $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$ の連接性の証明を，順に述べる．ただし，命題や式の番号付はここだけのものである．

命題 1. $\mathscr{F}$ を開集合 Ω ($\subset \mathbf{C}^n$) 上の連接層とする．

(1) $\mathscr{F}$ の部分解析層については，局所有限性と連接性は同値である．

(2) $\mathscr{F}^N$ ($N = 1, 2, 3, \ldots$) も連接である．

証明 (i) 関係層の局所有限性は，もとの解析層 $\mathscr{F}$ が連接であるから明らかである．

(ii) N についての帰納法による．$N = 1$ は仮定である．$N \geq 2$ とし，$N - 1$ では成立しているとする．$U \subset \Omega$ を開集合として，有限個の切断 $F_i \in \Gamma(U, \mathscr{F}^N)$, $1 \leq i \leq q$ が与えられたとき，その関係層

$$\mathscr{R} = \left\{ (a_i) \in \mathscr{O}_z^q : \ \sum_{i=1}^{q} a_i \underline{F_i}_z = 0, \ z \in U \right\} \subset \mathscr{O}_U^q$$

が局所有限であることを示せばよい．$F_i = (F_{i1}, \ldots, F_{iN})$ とおけば，$\mathscr{R}$ は次で決まる：

$$(a_i) \in \mathscr{O}_z^q, \quad \sum_{i=1}^{q} a_i \underline{F_{ij}}_z = 0, \quad 1 \leq j \leq N, \ z \in U.$$

まず，$j=1$ を考える．

$$(a_i)\in\mathscr{O}_z^q,\quad \sum_{i=1}^q a_i\underline{F_{i1}}_z=0,\quad z\in U$$

で決まる関係層を $\mathscr{R}_1\subset\mathscr{O}_U^q$ とおく．$\mathscr{R}\subset\mathscr{R}_1$ であり，$\mathscr{F}$ は連接と仮定されているから $\mathscr{R}_1$ は局所有限である．任意の点 $a\in U$ に近傍 $V\subset U$ と $\mathscr{R}_1|_V$ の局所有限生成系 $\{\phi^{(\lambda)}\}_{\lambda=1}^L$ $(\phi^{(\lambda)}\in\Gamma(V,\mathscr{R}_1))$ が存在する．$\phi^{(\lambda)}=(\phi_i^{(\lambda)})_{1\le i\le q}$ とおく．任意の点 $z\in V$ において $\mathscr{R}_{1z}$ の元

$$(a_i)=\Big(\sum_\lambda \underline{c_\lambda}_z\cdot\phi_i^{(\lambda)}(z)\Big),\qquad \underline{c_\lambda}_z\in\mathscr{O}_z$$

が $\mathscr{R}_z$ に属する必要十分条件は,

$$\sum_i\sum_\lambda \underline{c_\lambda}_z\cdot\phi_i^{(\lambda)}(z)\cdot\underline{F_{ij}}_z=0,\quad 1\le j\le N. \tag{2}$$

これを $\left(\underline{c_\lambda}_z\right)$ に関する関係式と見る．$j=1$ については，$\phi_i^{(\lambda)}$ の取り方からすでに成立している．よって (2) の連立関係式は，実質 $N-1$ 個の連立関係式である．帰納法の仮定により a の近傍 $W(\subset V)$ 上かかる $\left(\underline{c_\lambda}_z\right)$ は有限個の切断 $\gamma^{(\nu)}=\left(\gamma_\lambda^{(\nu)}\right)$ $(\gamma_\lambda^{(\nu)}\in\Gamma(W,\mathscr{O}))$ の線形和で表せる．したがって $(a_i^{(\nu)})=\sum_\lambda\gamma_\lambda^{(\nu)}\cdot\phi_i^{(\lambda)}$ は，任意の点 $z\in W$ で $\mathscr{R}_z$ を生成する． □

$a\in\mathbf{C}^n$ とし，$f\in\mathscr{O}(\mathrm{P}\Delta(a;r))$ を考える．$\underline{f}_a\in\mathscr{O}_{n,a}$ は，(f の a での) **芽** (germ) と呼ばれる．次元 n を明示するときは $\mathscr{O}_{n,a}$ と書く．

$f\neq 0$ $(f(z)\not\equiv 0)$ とする．f の a での零の位数を ν_0 とすると，$f(z)$ は次のように同次多項式展開される．

$$f(z)=\sum_{\nu=\nu_0}^\infty P_\nu(z-a),\quad P_{\nu_0}(z-a)\not\equiv 0.$$

簡単のため平行移動して，$a=0$ で考える．$f(0)=0$ $(\nu_0\ge 1)$ とする．ベクトル $v\in\mathbf{C}^n\setminus\{0\}$ を $P_{\nu_0}(v)\neq 0$ ととる．$\zeta\in\mathbf{C}$ に対し

$$f(\zeta v)=\sum_{\nu=\nu_0}^\infty\zeta^\nu P_\nu(v)=\zeta^{\nu_0}(P_{\nu_0}(v)+\zeta P_{\nu_0+1}(v)+\cdots).$$

座標を線形変換して新しく座標 $z=(z_1,\ldots,z_n)$ を $v=(0,\ldots,0,1)$ となるようにする．

$$\mathrm{P}\Delta(0;r)=\mathrm{P}\Delta_{n-1}\times\Delta(0;r_n)\subset\mathbf{C}^{n-1}\times\mathbf{C}$$

と書き，座標は $z=(z',z_n)\in\mathrm{P}\Delta_{n-1}\times\Delta(0;r_n)$，$0=(0,0)$ 等と書く．この座標について改めて次のようになっていると仮定する．

(1) $f(z)$ は，閉多重円板 $\overline{\mathrm{P}\Delta(0;r)}$ の近傍で正則で，同次多項式展開 $f(z)=\sum_{\nu=\nu_0}^\infty P_\nu(z)$ について，$P_{\nu_0}(0,1)\neq 0$ かつ

$$f(0,z_n)=z_n^{\nu_0}(P_{\nu_0}(0,1)+z_nP_{\nu_0+1}(0,1)+\cdots).$$

記号が煩雑になるので，混乱のないかぎり，正則関数 f や z_n でそれらが定める切断 $\underline{f}$，$\underline{z_n}$ を表すことがある．

全ての τ_j に対して共通の標準多重円板 $\mathrm{P}\Delta = \mathrm{P}\Delta_{n-1} \times \Delta_{(n)}$, $\Delta_{(n)} = \{|z_n| < r_n\}$, をとる．0 におけるワイエルシュトラースの予備定理 4 により，τ_j の単元部分は f_j に繰り込めるので，全ての τ_j は，ワイエルシュトラース多項式であるとしてよい：

$$\tau_j = P_j(z', z_n) = \sum_{\nu=0}^{p_j} a_{j\nu}(z') z_n^\nu = \sum_{\nu=0}^{p} a_{j\nu}(z') z_n^\nu \in \mathscr{O}(\mathrm{P}\Delta_{n-1})[z_n], \tag{19}$$

$$a_{j\nu}(0) = 0 \ (\nu < p_j), \quad a_{jp_j} = 1, \quad a_{j\nu} = 0 \ (p_j < \nu \le p).$$

改めて，

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}(P_1, \ldots, P_q) \tag{20}$$

とおく．この自明解は，次より成る：

$$T_{i,j} = (0, \ldots, 0, \overset{i\,\text{番目}}{-P_j}, 0, \ldots, 0, \overset{j\,\text{番目}}{P_i}, 0, \ldots, 0) \in \Gamma(\mathrm{P}\Delta, \mathscr{R}), \quad 1 \le i < j \le q.$$

$\mathscr{R}$ の局所有限性を示すために，未知ベクトル $\alpha = (\alpha_j) \in \mathscr{R}$ に対し自明解 $T_{i,j}$ $(1 \le i < j \le q)$ によるある種の割り算をする (後出 (24)，(25) を参照)．

任意に点 $b = (b', b_n) \in \mathrm{P}\Delta_{n-1} \times \Delta_{(n)}$ をとる．$\mathscr{O}_{n-1,b'}[z_n]$ の元を z_n **多項式的芽**と呼ぶことにする．同様に，z_n 多項式的芽 α_j からなる $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in \mathscr{O}_{n,b}^q$ を z_n **多項式的元**と呼び，$(f_j)_{1 \le j \le q} \in (\mathscr{O}(\mathrm{P}\Delta_{n-1})[z_n])^q$ の場合，$f := (f_j)$ を z_n **多項式的切断**と呼ぶ．それらの z_n に関する次数を

$$\deg \alpha = \deg_{z_n} \alpha = \max_j \deg_{z_n} \alpha_j, \quad \deg f = \deg_{z_n} f = \max_j \deg_{z_n} f_j$$

とおく．すると，自明解 $T_{i,j}$ は，$\deg T_{i,j} \le p$ である z_n 多項式的切断である．次を示そう．

補題 21. (次数構造) 記号は上述のものとすると，$\mathscr{R}_b$ の任意の元は，自明解 $T_{1,j}$, $2 \le j \le q$, と $\mathscr{R}_b$ の有限個の z_n 多項式的元 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$ の $\mathscr{O}_{n,b}$ を係数とする有限和で書き表され，それ等 α の次数は，次を満たす．

$$\deg \alpha_1 < p, \quad \deg \alpha_j < p', \quad 2 \le j \le q.$$

$\because$) b において，ワイエルシュトラースの予備定理 4 を適用して，P_1 を単元 u とワイエルシュトラース多項式 Q の積に分解する：

$$P_1(z', z_n) = u \cdot Q(z', z_n - b_n), \qquad \deg Q = d \le p_1.$$

ここで，$Q \in \mathscr{O}_{n-1,b'}[z_n - b_n] = \mathscr{O}_{n-1,b'}[z_n]$ である．補題 14 より $u \in \mathscr{O}_{n-1,b'}[z_n - b_n] = \mathscr{O}_{n-1,b'}[z_n]$ が従う．よって

$$\deg_{z_n} u = p_1 - d. \tag{22}$$

任意に $f = (f_1, \ldots, f_q) \in \mathscr{R}_b$ をとる．ワイエルシュトラースの予備定理 4 (ii) より

$$f_i = c_i Q \ + \beta_i, \quad 1 \le i \le q,$$

補題 14. $Q(z', z_n) \in \mathscr{O}_{n-1,0}[z_n]$ をワイエルシュトラース多項式とする．$R \in \mathscr{O}_{n-1,0}[z_n]$ として $R = Q \cdot \underline{g}_0$, $\underline{g}_0 \in \mathscr{O}_{n,0}$ と書けていたならば，$\underline{g}_0 \in \mathscr{O}_{n-1,0}[z_n]$.

証明　関数は全て 0 を中心とする閉多重円板 $\overline{\mathrm{P}\Delta}$ の近傍で正則とする．z_n 多項式としての $Q(z', z_n)$ の最高次の係数は 1 であるから互除法により,

$$(15) \qquad R = \varphi Q + \psi, \quad \varphi, \psi \in \mathscr{O}_{n-1,0}[z_n], \quad \deg_{z_n} \psi < p = \deg_{z_n} Q$$

と割り算ができる．$\mathrm{P}\Delta = \mathrm{P}\Delta_{n-1} \times \Delta_{(n)}$ を Q の標準多重円板にとると，$z' \in \mathrm{P}\Delta_{n-1}$ を止めると $Q(z', z_n) = 0$ は $\Delta_{(n)}$ 内に重複度を込めて p 個の零点をもつ．したがって，R は重複度を込めて，少なくとも p 個の零点をもつ．(15) より，ψ も重複度を込めて，少なくとも p 個の零点を持つ．$\deg \psi < p$ であるから $\psi \equiv 0$ でなければならない．以上より，$R = \varphi Q = gQ$, $(\varphi - g)Q = 0$, $Q \neq 0$. $\mathscr{O}_{n,0}$ は整域であるから，$\underline{g}_0 = \underline{\varphi}_0 \in \mathscr{O}_{n-1,0}[z_n]$. □

定理 16 (岡の第 1 連接定理). $\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}$ は，連接層である．したがって，$\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n}^N$ $(N \geq 1)$ は，連接である．

証明　$\mathscr{O}_{\mathbf{C}^n} = \mathscr{O}_n$ と書くことにする．$\mathscr{O}_n$ の連接性がわかれば，命題 1 (ii) により $\mathscr{O}_n^N$ の連接性が従う．しかし，ここで使う帰納法の型から $\mathscr{O}_n^N$ の連接性を証明する．

証明は，$N \geq 1$ は一般として，$n \geq 0$ に関する帰納法による．

(イ) $n = 0$:　この場合は，$\mathbf{C}$ 上の有限次元ベクトル空間の線形関係式に有限個の基底が存在するかを問う問題で，必ず有限基底が存在するので主張は成立している．

(ロ) $n \geq 1$:　$\mathscr{O}_{n-1}^N$ は，任意の $N \geq 1$ に対して連接であると仮定する．

$N = 1$ の場合を示せば十分である (命題 1 (ii)).

問題は，局所的であり関係層の局所有限性を示せばよい．開集合 $U \subset \mathbf{C}^n$ と $\tau_j \in \mathscr{O}_n(U)$, $1 \leq j \leq q$ をとり次の関係式と関係層を考える：

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\underline{f_1}_z \underline{\tau_1}_z + \cdots + \underline{f_q}_z \underline{\tau_q}_z = 0, \quad \underline{f_j}_z \in \mathscr{O}_{n,z}, \ z \in U, \\ &\mathscr{R} := \mathscr{R}(\tau_1, \ldots, \tau_q) \subset \mathscr{O}_U^q. \end{aligned}$$

示したいことは，任意の点 $a \in U$ の周りでの $\mathscr{R}$ の局所有限性である．

平行移動により $a = 0$ としてよい．$q = 1$ では自明であるから，$q \geq 2$ とする．

$$(18) \qquad T_{i,j} = (0, \ldots, 0, -\overset{i\,番目}{\underline{\tau_j}}, 0, \ldots, 0, \overset{j\,番目}{\underline{\tau_i}}, 0, \ldots, 0), \quad 1 \leq i < j \leq q$$

は明らかに (17) の解であり，$T_{i,j} \in \Gamma(U, \mathscr{R})$. $T_{i,j}$ を**自明解**と呼ぶ.

いま，ある $\tau_j(0) \neq 0$, 例えば $\tau_1(0) \neq 0$ とすると，(17) は，0 の近傍で $\underline{f_1}_b = -\sum_{j=2}^q \frac{\underline{\tau_j}_b}{\underline{\tau_1}_b} \underline{f_j}_b$ と解ける．すなわち，$(\underline{f_j}_b)$ は，$\{T_{1,j}\}_{j=2}^q$ の $\mathscr{O}_b$ の元を係数とする線形和で書かれる．すなわち，$\mathscr{R}$ は 0 の近傍で自明解で生成される．

以下，全ての $\tau_j(0) = 0$ とする．また，$\underline{\tau_j}_0 \neq 0$, $1 \leq j \leq q$ と仮定してよい．p_j を τ_j の 0 での零の位数とし,

$$p = \max_{1 \leq j \leq q} p_j, \qquad p' = \min_{1 \leq j \leq q} p_j \geq 0$$

とおく．順番を付け直して $p' = p_1$ となっているとしてよい．

(2) $r_n > 0$ を十分小さくとり，$\{|z_n| \leq r_n; f(0, z_n) = 0\} = \{0\}$.

(3) $r_1, \ldots, r_{n-1} > 0$ を r_n に従って小さくとれば，任意の $z' \in \overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1}$ に対して $f(z', z_n) = 0$ の根 z_n は円板 $\Delta(0; r_n)$ に含まれる．特に $(z', z_n) \in \overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1} \times \{|z_n| = r_n\}$ に対して常に $|f(z', z_n)| > 0$.

芽 $\underline{f}_0 \in \mathscr{O}_{n,0}$ に対し，上述の (i)∼(iii) を満たす多重円板 $\mathrm{P}\Delta(0; r)$ を $\underline{f}_0$ または f の**標準多重円板**，その座標 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ を**標準座標**と呼ぶ.

注意 3. $\underline{f}_0$ の標準多重円板は任意に小さくとれる．また，$\{v \in \mathbf{C}^n; P_{\nu_0}(v) = 0\}$ は内点を含まないので，標準多重円板と標準座標は有限個の $\underline{f_k}_0 \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}^n,0} \setminus \{0\}$, $1 \leq k \leq l(< \infty)$, $f_k(0) = 0$ について共通のものをとることができる.

定理 4 (ワイエルシュトラースの予備定理)**.** $\underline{f}_0 \in \mathscr{O}_{n,0} \setminus \{0\}, f(0) = 0$, $p = \mathrm{ord}_0 f$ とし，f の標準多重円板 $\mathrm{P}\Delta = \mathrm{P}\Delta_{n-1} \times \Delta(0; r_n)$ を一つとる.

(1) 正則関数 $a_j \in \mathscr{O}(\overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1}), a_j(0) = 0, 1 \leq j \leq p$ と零をとらない正則関数 $u \in \mathscr{O}(\overline{\mathrm{P}\Delta})$ が一意的に存在して次が成立する.

$$f(z', z_n) = u(z)\Big(z_n^p + \sum_{j=1}^{p} a_j(z') z_n^{p-j}\Big),\ (z', z_n) \in \mathrm{P}\Delta_{n-1} \times \Delta(0; r_n). \tag{5}$$

(2) 任意の $\varphi \in \mathscr{O}(\mathrm{P}\Delta)$ に対し，正則関数 $a \in \mathscr{O}(\mathrm{P}\Delta)$ と $b_j \in \mathscr{O}(\mathrm{P}\Delta_{n-1}), 1 \leq j \leq p$ が一意的に存在して次が成立する.

$$\varphi(z) = af + \sum_{j=1}^{p} b_j(z') z_n^{p-j}, \quad z = (z', z_n) \in \mathrm{P}\Delta_{n-1} \times \Delta(0; r_n). \tag{6}$$

証明 (i) $k \in \mathbf{Z}_+$ に対し，

$$\sigma_k(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_n| = r_n} z_n^k \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', z_n)}{f(z', z_n)} dz_n, \quad z' \in \overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1} \tag{7}$$

とおく．$\sigma_k \in \mathscr{O}(\overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1})$ となる．偏角の原理により $\sigma_0(z') \equiv p \in \mathbf{N}$. よって，$z' \in \mathrm{P}\Delta_{n-1}$ を止めたときの $f(z', z_n) = 0$ の根の個数は，重複度を込めれば常に p 個であることがわかる．それらを，$\zeta_1(z'), \ldots, \zeta_p(z')$ (重複度を込めて) と書く．留数定理より，

$$\sigma_k(z') = \sum_{j=1}^{p} (\zeta_j(z'))^k, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

$\zeta_1(z'), \ldots, \zeta_p(z')$ の ν 次基本対称式に $(-1)^\nu$ を乗じて

$$a_\nu(z') = (-1)^\nu \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_\nu \leq p} \zeta_{j_1}(z') \cdots \zeta_{j_\nu}(z')$$

とおく．すると，対称式の基本的な性質より，$a_\nu(z') \in \mathbf{Q}[\sigma_1(z'), \ldots, \sigma_\nu(z')]$ となる[1]．たとえば，$p = 2$ とすると

$$a_2(z') = \zeta_1(z')\zeta_2(z') = \frac{1}{2}\sigma_1(z')^2 - \frac{1}{2}\sigma_2(z').$$

[1]直接計算でもわかるが，たとえば森田康夫著，代数概論 (裳華房)，p. 29 参照.

全ての $\zeta_j(0)=0$ より，$a_\nu \in \mathscr{O}(\overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1})$, $a_\nu(0)=0, \nu \geq 1$．次のようにおく．

$$W(z', z_n) = \prod_{j=1}^{p} \bigl(z_n - \zeta_j(z')\bigr) = z_n^p + \sum_{j=1}^{p} a_j(z') z_n^{p-j}. \tag{8}$$

すると，$W(z', z_n) \in \underline{\mathscr{O}}(\overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1})[z_n] \subset \mathscr{O}(\overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1} \times \mathbf{C})$．$s_n > r_n$ を r_n に十分近くとれば，任意に $z' \in \overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1}$ を止めるとき，$|z_n| < s_n$ における $W(z', z_n) = 0$ と $f(z', z_n) = 0$ の根は重複度を込めて一致しているので $u(z', z_n) := \frac{f(z', z_n)}{W(z', z_n)}$ は z_n の正則関数として 0 をとらない関数で，次の積分表示が成立する．

$$u(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_n| = s_n} \frac{f(z', \zeta_n)}{W(z', \zeta_n)} \cdot \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n}, \quad |z_n| < s_n.$$

この表示式より $u(z', z_n)$ は $\overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1} \times \{|z_n| \leq r_n\}$ 上の正則関数 (0 をとらない) であることがわかり，$a_\nu \in \mathscr{O}(\overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1})$ で次が成立する：

$$f(z', z_n) = u(z)\Bigl(z_n^p + \sum_{j=1}^{p} a_j(z') z_n^{p-j}\Bigr) = u(z) W(z', z_n).$$

$u(z)$, $W(z', z_n)$ は $\mathscr{O}_{n,0}$ の元として一意的に定まることを見よう．

$$\underline{f}_0 = \underline{u}_0 \cdot \underline{\Bigl(z_n^p + \textstyle\sum_{j=1}^{p} a_j(z') z_n^{p-j}\Bigr)}_0 = \underline{\tilde{u}}_0 \cdot \underline{\Bigl(z_n^p + \textstyle\sum_{j=1}^{p} \tilde{a}_j(z') z_n^{p-j}\Bigr)}_0$$

とする．二つの表示が共に有効である標準多重円板 $\widetilde{\mathrm{P}\Delta}_{n-1} \times \Delta(0; \tilde{r}_n)$ をとれば，各 $z' \in \widetilde{\mathrm{P}\Delta}_{n-1}$ について

$$z_n^p + \sum_{j=1}^{p} a_j(z') z_n^{p-j} = 0, \quad z_n^p + \sum_{j=1}^{p} \tilde{a}_j(z') z_n^{p-j} = 0$$

の根は重複度を込めて一致するので，$a_j(z') = \tilde{a}_j(z')$ $(1 \leq j \leq p)$．したがって，$u(z) = \tilde{u}(z)$ が従う．

(ii) 次のように書かれているとしてよい．

$$f(z) = W(z', z_n) = \sum_{\nu=0}^{p} a_\nu(z') z_n^{p-\nu} \ \in \mathscr{O}(\overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1})[z_n].$$

ただし，$a_0(z') = 1$ とした．$\varphi \in \mathscr{O}(\mathrm{P}\Delta_{n-1} \times \Delta(0; r_n))$ に対し，

$$a(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_n| = t_n} \frac{\varphi(z', \zeta_n)}{W(z', \zeta_n)} \cdot \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n}, \tag{9}$$
$$(z', z_n) \in \mathrm{P}\Delta_{n-1} \times \Delta(0; r_n), \quad |z_n| < t_n < r_n$$

とおく．$a(z', z_n)$ は，t_n の取り方によらないので，$a(z', z_n) \in \mathscr{O}(\mathrm{P}\Delta_{n-1} \times \Delta(0; r_n))$ を定める．$z' \in \mathrm{P}\Delta_{n-1}, |z_n| < t_n$ として次式に (9) を代入して計算すると，

$$\varphi(z', z_n) - a(z', z_n) W(z', z_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_n|=t_n} \varphi(z',\zeta_n)\left\{1-\frac{W(z',z_n)}{W(z',\zeta_n)}\right\}\frac{d\zeta_n}{\zeta_n-z_n} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_n|=t_n} \varphi(z',\zeta_n)\frac{\sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu(z')(\zeta_n^{p-\nu}-z_n^{p-\nu})}{W(z',\zeta_n)(\zeta_n-z_n)}d\zeta_n \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta_n|=t_n} \frac{\varphi(z',\zeta_n)}{W(z',\zeta_n)}\left\{\sum_{\nu=0}^{p-1} a_\nu(z')\sum_{\mu=0}^{p-1-\nu}\zeta_n^{p-1-\nu-\mu}z_n^\mu\right\}d\zeta_n \\
&= \sum_{\nu=0}^{p-1}\sum_{\mu=0}^{p-1-\nu}\frac{z_n^\mu}{2\pi i}\int_{|\zeta_n|=t_n}\frac{\varphi(z',\zeta_n)}{W(z',\zeta_n)}a_\nu(z')\zeta_n^{p-1-\nu-\mu}d\zeta_n \qquad (10)\\
&= b_1(z')z_n^{p-1}+b_2(z')z_n^{p-2}+\cdots+b_p(z')
\end{aligned}
$$

と表す ($b_\nu(z')$ を $z_n^{p-\nu}$ の係数関数として定義している)．(10) の和の各項の積分は t_n のとり方によらず $z' \in \mathrm{P}\Delta_{n-1}$ の正則関数である．よって，$b_\nu(z') \in \mathscr{O}(\mathrm{P}\Delta_{n-1})$ $(1 \le \nu \le p)$．以上より次が示された．

$$
\varphi(z',z_n) = a(z',z_n)W(z',z_n) + \sum_{\nu=1}^{p} b_\nu(z')z_n^{p-\nu}. \tag{11}
$$

次に一意性を示す．より小さい f の標準多重円板 $\widetilde{\mathrm{P}\Delta}_{n-1} \times \Delta(0;\tilde{r}_n)$ 上で

$$
\varphi(z',z_n) = \tilde{a}(z',z_n)W(z',z_n) + \sum_{\nu=1}^{p} \tilde{b}_\nu(z')z_n^{p-\nu} \tag{12}
$$

と表されたとする．(11), (12) の両辺を引いて移項すると

$$
(a(z',z_n)-\tilde{a}(z',z_n))W(z',z_n) = \sum_{\nu=1}^{p}(\tilde{b}_\nu(z')-b_\nu(z'))z_n^{p-\nu}. \tag{13}
$$

これが，恒等的に 0 でないとすると，任意の $z' \in \widetilde{\mathrm{P}\Delta}_{n-1}$ を止める毎に，(13) の左辺は $z_n \in \Delta(0;\tilde{r}_n)$ について重複度を込めて少なくとも p 個の零点を持つ．一方右辺は高々 $p-1$ 個の零点しか持たないので矛盾をきたす．よって，$\tilde{b}_\nu(z') = b_\nu(z')$ $(1 \le \nu \le p)$，$\tilde{a}(z',z_n) = a(z',z_n)$ でなければならない． □

$\mathrm{P}\Delta_{n-1} \subset \mathbf{C}^{n-1}$ とし，$\mathscr{O}(\overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1})$ 係数の z_n 多項式

$$
W(z',z_n) = z_n^p + \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu(z')\cdot z_n^{p-\nu}, \quad a_\nu \in \mathscr{O}(\overline{\mathrm{P}\Delta}_{n-1}),\ a_\nu(0)=0
$$

を**ワイエルシュトラース多項式**と呼ぶ．これを芽で考えた

$$
W = z_n^p + \sum_{\nu=1}^{p} \underline{a_\nu}_0 \cdot z_n^{p-\nu} \in \mathscr{O}_{n-1,0}[z_n]
$$

もワイエルシュトラース多項式と呼ぶ．