



多変数解析関数論 補足

野口潤次郎

2016(H28).06.17



$$\begin{aligned}
A(z) &= (\mathbf{1}_p - B'_1(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B'_k(z)) \cdot (\mathbf{1}_p - B_{k+1}(z)) \\
&\quad \cdot (\mathbf{1}_p - B''_k(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B''_1(z)), \\
B_{k+1}(z) &\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

であるから,  $A''(z) = A''_0(z)^{-1}$  とおけば,  $A(z) = A'(z)A''(z)^{-1}$  ( $z \in \tilde{E}' \cap \tilde{E}''$ ) を得る. □

**注意 20** (評価付き) 補題 4.2.2 において  $E', E'', U$  で決まる正定数  $\eta, C$  と  $E'$  を内部に含む閉直方体近傍  $\tilde{E}'$  および  $E''$  を内部に含む閉直方体近傍  $\tilde{E}''$  が  $\tilde{E}' \cap \tilde{E}'' \subset U$  を満たす様に存在して,  $A = \mathbf{1}_p - B$  と書くとき,  $\|B\|_U \leq \eta$  ならば  $A' = \mathbf{1}_p - B'$ ,  $A''_0 = \mathbf{1}_p - B''$  を

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_p - B(z) &= (\mathbf{1}_p - B'(z))(\mathbf{1}_p - B''(z)), \quad z \in \tilde{E}' \cap \tilde{E}'', \\
\max\{\|B'\|_{\tilde{E}'}, \|B''\|_{\tilde{E}''}\} &\leq C\|B\|_U
\end{aligned}$$

を満たすようにとることができる. 証明は, 上記議論と (16), (19) による.

$$N(P, Q) = P(\mathbf{1}_p - P)^{-1}Q(\mathbf{1}_p - Q)^{-1}.$$

条件より,

$$\|N(P, Q)\| \leq \|P\| \cdot 2 \cdot \|Q\| \cdot 2 = 2^2(\max\{\|P\|, \|Q\|\})^2. \quad \square$$

$$(16) \quad \varepsilon_1 = \max \left\{ \|B'_1\|_{\tilde{E}'_{(2)}}, \|B''_1\|_{\tilde{E}''_{(2)}} \right\} \left( \leq \frac{2L}{\pi\delta} \|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}} \right)$$

とおく.  $\frac{\pi\delta}{2^5L} \leq \frac{1}{2}$  が満たされるように, 必要ならば  $\delta > 0$  を小さく取り直す.  
 $\|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}} \leq \frac{\pi^2\delta^2}{2^6L^2}$  とすると,

$$(17) \quad \varepsilon_1 \leq \frac{\pi\delta}{2^5L} \leq \frac{1}{2}.$$

以下, 帰納的に構成してゆく.  $j = 1, \dots, k$  に対し

$$B'_j(z) \ (z \in \tilde{E}'_{(j+1)}), \quad B''_j(z) \ (z \in \tilde{E}''_{(j+1)}),$$

$$\varepsilon_j = \max \left\{ \|B'_j\|_{\tilde{E}'_{(j+1)}}, \|B''_j\|_{\tilde{E}''_{(j+1)}} \right\}$$

が, 次を満たすように決まったとする ( $j = 1$  は, (17)):

$$(18) \quad \varepsilon_j \leq \frac{\pi\delta}{2^{j+4}L}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

$z \in \tilde{E}'_{(k+2)} \cap \tilde{E}''_{(k+2)}$  に対し  $B_{k+1}(z) = N(B'_k(z), B''_k(z))$  として, 本文 p. 101 にある  $\gamma'_{(k+1)}, \gamma''_{(k+1)}$  を用いて

$$B'_{k+1}(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'_{(k+1)}} \frac{B_{k+1}(z', \zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta, \quad (z', z_n) \in \tilde{E}'_{(k+2)},$$

$$B''_{k+1}(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma''_{(k+1)}} \frac{B_{k+1}(z', \zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta, \quad (z', z_n) \in \tilde{E}''_{(k+2)}$$

とおく. ここで,  $|\zeta - z_n| \geq \frac{\delta}{2^{k+1}}$  であることに注意すると, (18) と補題 15 より,

$$(19) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &\leq \frac{L}{2\pi} \frac{2^{k+2}}{\delta} \|N(B'_k, B''_k)\|_{\tilde{E}'_{(k+1)} \cap \tilde{E}''_{(k+1)}} \\ &\leq \frac{L}{2\pi} \frac{2^{k+2}}{\delta} 2^2 \varepsilon_k^2 \leq \frac{1}{2} \varepsilon_k \leq \frac{\pi\delta}{2^{k+5}L}. \end{aligned}$$

よって, (18) は,  $j = k + 1$  に対し成立し,  $\varepsilon_k \leq \frac{1}{2^k}$ . これより, 次の無限乗積

$$A'(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{1}_p - B'_1(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B'_k(z)), \quad z \in \tilde{E}' := \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{E}'_{(k)},$$

$$A''(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{1}_p - B''_k(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B''_1(z)), \quad z \in \tilde{E}'' := \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{E}''_{(k)}$$

はそれぞれの定義域で一様収束し, その内部で可逆な  $p$  次正方行列値正則関数となる.  $z \in \tilde{E}' \cap \tilde{E}''$  に対し,

## 補足 I: 弱正則関数の連続性 (§6.10.4)

補題 1  $X$  を複素空間とする.  $X$  は,  $a \in X$  で既約とし,  $f$  を近傍  $U(\ni a)$  上の弱正則関数とする. このとき極限值  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in U \setminus \Sigma(X)}} f(x)$  が存在する.

証明 問題は局所的であるから,  $X$  は  $\mathbb{C}^n$  の原点を中心とする多重円板  $P\Delta$  内の解析的部分集合で  $a = 0$ ,  $U = P\Delta$  であるとしてよい.  $0 \in X$  の基本近傍系

$$V_\nu \subset V, \nu = 1, 2, \dots, \quad V_\nu \ni V_{\nu+1}, \quad \bigcap_{\nu} V_\nu = \{0\}$$

で  $V_\nu \setminus \Sigma(X)$  が連結なものがある (定理 6.4.16 参照).

定理 6.10.18 より  $f|_{V_\nu}$  は  $\mathcal{O}_{X,0}$  上整である. 従って, 次のモニック方程式が成立しているとしてよい.

$$(2) \quad f(x)^d + \sum_{j=1}^d a_j(x) f(x)^{d-j} = 0,$$

$$x \in X \setminus \Sigma(X), \quad a_j \in \mathcal{O}(X).$$

主張が成立しないと仮定する. すると 0 に収束する点列  $x_\nu, y_\nu \in V_\nu \setminus \Sigma(X)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$  が存在して

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(x_\nu) = \alpha, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} f(y_\nu) = \beta, \quad \alpha \neq \beta$$

となる.  $V_\nu \setminus \Sigma(X)$  は連結なので,  $x_\nu$  と  $y_\nu$  を結ぶ曲線  $\Gamma_\nu \subset V_\nu \setminus \Sigma(X)$  が取れる. 閉円板  $\overline{\Delta(\alpha, \rho)} \not\ni \beta$  を任意にとりその周を  $C_\rho$  とする.  $\nu \gg 1$  に対し,

$$f(x_\nu) \in \Delta(\alpha, \rho), \quad f(y_\nu) \notin \overline{\Delta(\alpha, \rho)}.$$

従って, ある  $w_\nu \in \Gamma_\nu$  が在って  $f(w_\nu) \in C_\rho$ . 部分列  $\{w_{\nu_\mu}\}_\mu$  を取ることにより, 極限  $\gamma_\rho = \lim_{\mu \rightarrow \infty} f(w_{\nu_\mu}) \in C_\rho$  が存在する.  $\Gamma_{\nu_\mu} \rightarrow 0$  であるから (2) より

$$\gamma_\rho^d + \sum_{j=1}^d a_j(0) \gamma_\rho^{d-j} = 0.$$

$\rho > 0$  を動かすと, この方程式は根を無限個持つことになり, 矛盾である.  $\square$

この補題より次の定理が直ちに従う.

定理 3 複素空間  $X$  上の弱正則関数  $f$  は,  $(X \setminus \Sigma(X)) \cup \{a \in \Sigma(X); \underline{X}_a \text{ は既約}\}$  上へ連続関数として一意的に拡張される.

注意  $f$  と  $a \in X$  を上述のものとする.  $f(a)$  を  $a$  で連続拡張したときの極限值

とする.  $f_a$  は,  $\mathcal{O}_{X,a}$  上整であるから  $a$  の近傍で次のモニック方程式を満たす.

$$P(x; f) = f(x)^d + \sum_{\nu=1}^d c_\nu(x) f(x)^{d-\nu} = 0.$$

ただし,  $c_\nu$  は  $a$  の近傍で正則な関数である. そのようなモニック多項式で  $d$  が最小なものをとる. もし,  $f(a) = 0$  ならば, 補題 1 とワイエルストラスの予備定理により,  $c_\nu(a) = 0, 0 \leq \nu \leq d$  となり,  $P(x; f)$  はワイエルストラス多項式になる.

### 補足 II: L. シュヴァルツの定理 7.3.17 の別証

定義. 位相空間  $F$  がベール (Baire) 空間であるとは, 任意の内点を含まない可算個の閉集合  $G_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) に対し和集合  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$  も内点を含まないこととする. 線形位相空間でかつベール空間であるものを線形ベール空間と呼ぶ.

問. 完備距離空間は, ベール空間であることを示せ.

補題 4  $E$  を線形位相空間,  $F$  を線形ベール空間,  $A: E \rightarrow F$  を連続線形全射とする. すると,  $0 \in E$  の任意の近傍  $U$  に対し,  $\overline{A(U)}$  は  $0 \in F$  を内点として含む.

証明 演算  $(x, y) \in E \times E \rightarrow x - y \in E$  の連続性より  $0 \in E$  の近傍  $W$  があって  $W - W \subset U$ .  $E = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \nu W$  であるから,  $F = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \nu \overline{A(W)}$ .  $\nu \overline{A(W)}$  は閉集合であるから, 仮定により, ある  $\nu_0$  が在り,  $\nu_0 \overline{A(W)}$  は内点を含む. 従って,  $\overline{A(W)}$  も内点  $x_0$  を含む. よって  $0$  は  $\overline{A(W)} - x_0$  の内点である.

$$0 \in \overline{A(W)} - x_0 \subset \overline{A(W)} - \overline{A(W)} = \overline{A(W - W)} \subset \overline{A(U)}$$

より,  $0$  は  $\overline{A(U)}$  の内点である. □

定理 5 (バナッハの開写像定理)  $E$  をフレッシュェ空間,  $F$  を線形ベール空間とする.  $A: E \rightarrow F$  が連続線形全射ならば,  $A$  は開写像である.

証明  $E$  はフレッシュェであるから (7.3.10) で定義される完備距離  $d(x, w)$  を持つ.  $d(x, w)$  は次の性質を持つことに注意する.

$$(6) \quad \begin{aligned} d(x+v, w+v) &= d(x, w), & d(-x, 0) &= d(x, 0), \\ d(x+w, 0) &\leq d(x+w, w) + d(w, 0) = d(x, 0) + d(w, 0). \end{aligned}$$

$U(\epsilon) = \{x \in E : d(x, 0) < \epsilon\}$ ,  $\epsilon > 0$  とおく. 任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $A(U(\epsilon))$  が  $0 \in F$  を内点として含むことを示せば十分である. 補題 4 により,  $0 \in F$  の近傍  $V$  があって  $V \subset \overline{A(U(\epsilon))}$  が成立する.  $U_\nu = U\left(\frac{\epsilon}{2^{\nu+1}}\right)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$  とおく. 各  $\overline{A(U_\nu)}$  に対し  $0 \in F$  の近傍  $V_\nu$  を  $V_\nu \subset \overline{A(U_\nu)}$ ,  $V_\nu \supset V_{\nu+1}$ ,  $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} V_\nu = \{0\}$  が

単に導かれる：

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{j=k}^l (\mathbf{1}_p - A_j) - \mathbf{1}_p \right\|_E &\leq \prod_{j=k}^l (1 + \|A_j\|_E) - 1 \\ &\leq \exp\left(\sum_{j=k}^l \|A_j\|_E\right) - 1, \quad k < l. \end{aligned}$$

可逆性については  $(\mathbf{1}_p - A_k(z))^{-1}$  の無限乗積に (iii) を用いて同様の議論を適用する．以上の性質は，これより断りなく用いることとする．

$A$  を補題 4.2.2 で与えられたものとする． $A = \mathbf{1}_p - B_1$  とおく．この  $B_1$  に (4.2.6) を適用すると，

$$(13) \quad B_1 = B'_1 + B''_1,$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \|B'_1\|_{\tilde{E}'_{(2)}} &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2^2}{\delta} L \|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}}, \\ \|B''_1\|_{\tilde{E}''_{(2)}} &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2^2}{\delta} L \|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}}. \end{aligned}$$

$(\mathbf{1}_p - B'_1)^{-1}$ ,  $(\mathbf{1}_p - B''_1)^{-1}$  の存在を仮定して，

$$\begin{aligned} M(B'_1, B''_1) &= (\mathbf{1}_p - B'_1)^{-1} (\mathbf{1}_p - B'_1 - B''_1) (\mathbf{1}_p - B''_1)^{-1} \\ &= \mathbf{1}_p - N(B'_1, B''_1) \end{aligned}$$

とおくと，

$$A = \mathbf{1}_p - B_1 = (\mathbf{1}_p - B'_1) M(B'_1, B''_1) (\mathbf{1}_p - B''_1)$$

となる． $M(B'_1, B''_1)$  を  $A$  に見立てて繰り返すと，

$$A = (\mathbf{1}_p - B'_1) (\mathbf{1}_p - B'_2) M(B'_2, B''_2) (\mathbf{1}_p - B''_2) (\mathbf{1}_p - B''_1).$$

これを繰り返して然るべく収束させる為に，次の評価が鍵となる．

補題 15  $P, Q$  を  $p$  次正方行列とし， $\max\{\|P\|, \|Q\|\} \leq \frac{1}{2}$  とすると，

$$\|N(P, Q)\| \leq 2^2 (\max\{\|P\|, \|Q\|\})^2.$$

証明  $(\mathbf{1}_p - Q)^{-1} = \mathbf{1}_p + Q(\mathbf{1}_p - Q)^{-1} = \mathbf{1}_p + Q + Q^2(\mathbf{1}_p - Q)^{-1}$  に注意して，

$$\begin{aligned} M(P, Q) &= (\mathbf{1}_p - P)^{-1} (\mathbf{1}_p - P - Q) (\mathbf{1}_p - Q)^{-1} \\ &= (\mathbf{1}_p - (\mathbf{1}_p - P)^{-1} Q) (\mathbf{1}_p - Q)^{-1} \\ &= \mathbf{1}_p + Q + Q^2(\mathbf{1}_p - Q)^{-1} \\ &\quad - (\mathbf{1}_p + P(\mathbf{1}_p - P)^{-1}) Q (\mathbf{1}_p + Q(\mathbf{1}_p - Q)^{-1}) \\ &= \mathbf{1}_p + Q + Q^2(\mathbf{1}_p - Q)^{-1} \\ &\quad - Q - Q^2(\mathbf{1}_p - Q)^{-1} - P(\mathbf{1}_p - P)^{-1} Q (\mathbf{1}_p - Q)^{-1} \\ &= \mathbf{1}_p - P(\mathbf{1}_p - P)^{-1} Q (\mathbf{1}_p - Q)^{-1}, \end{aligned}$$

による .

[†] J.-P. Demailly, Complex Analytic and Differentiable Geometry, 2012, [www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/) .

(2) L. シュヴァルツの定理 7.3.17 において, 既存の文献 (L. Schwartz, C.R. Paris **236** (1953), [一松], [Gu-R], [G-R1], [†] 等を参照) では  $F$  をフレッシュと仮定しているが, 上述のようにベール空間と仮定すれば十分である .

### 補足 III: カルタンの行列分解 補題 4.2.2 の別証

§4.2 の議論では, 行列の対数  $\log(\cdot)$  を用いる為に諸定数を決める手続きが複雑であった . ここでは, 定数の決め方が簡易化された証明を与える . 行列の  $\exp(\cdot)$ ,  $\log(\cdot)$  も用いない

一般に  $p$  次正方行列 (複素係数)  $A$  に対し作用素ノルム  $\|A\| = \max\{\|A\xi\|; \xi \in \mathbf{C}^p, \|\xi\| = 1\}$  を考える .  $A = A(z)$  が, 部分集合  $E \subset \mathbf{C}^n$  上定義された  $p$  次正方行列値関数であるとき,  $\|A\|_E = \sup\{\|A(z)\|; z \in E\}$  と書く . さらに,  $B$  も  $p$  次正方行列とすると, 次が成立する :

- (i)  $A$  の成分を  $a_{ij}$  として,  $\frac{1}{p}\|A\| \leq \max_{i,j}\{|a_{ij}|\} \leq \|A\|$ .
- (ii)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .
- (iii)  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$  .
- (iv)  $A = A(z)(z \in E)$  に対し,  $\|A\|_E \leq \varepsilon < 1$  ならば, 逆行列  $(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1}$  が存在して次が成立する .

$$(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1} = \mathbf{1}_p + A(z) + A(z)^2 + \cdots .$$

ここで, 右辺は  $E$  上一様収束し,

$$\|(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad \|(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1} - \mathbf{1}_p\| \leq \frac{\|A(z)\|}{1 - \varepsilon} .$$

特に,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  ならば,  $\|(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1}\| \leq 2$  .

- (v)  $k = 0, 1, \dots$  に対し,  $0 < \varepsilon_k < 1$  と  $p$  次正方行列値関数  $A_k(z), z \in E$  が与えられ,  $\|A_k\|_E \leq \varepsilon_k, \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$  が成立しているとする . このとき, 次の 2 つの無限乗積

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{1}_p - A_0(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - A_k(z)),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{1}_p - A_k(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - A_0(z))$$

は  $E$  上一様収束し, 極限は共に可逆行列値関数である .

- (v) は,  $\|\prod_{j=0}^k (\mathbf{1}_p - A_j)\|_E \leq \prod_{j=0}^k (1 + \|A_j\|_E)$  と次の不等式を用いると簡

成立するようにとる .

主張. 任意の  $\epsilon > 0$  対し  $A(U(\epsilon)) \supset V_1$ .

$\therefore$  任意に  $y = y_1 \in V_1$  をとる.  $y_1 \in \overline{A(U_1)}$  であるから  $(y_1 - V_2) \cap A(U_1) \neq \emptyset$ . ある  $y_2 \in V_2, x_1 \in U_1$  が在って,  $y_1 - y_2 = A(x_1)$  となる.  $y_2 \in \overline{A(U_2)}$  であるから,  $(y_2 - V_3) \cap A(U_2) \neq \emptyset$ .  $y_3 \in V_3, x_2 \in U_2$  が在って,  $y_2 - y_3 = A(x_2)$  が成立する. 以下帰納的に,  $x_\nu \in U_\nu$  と  $y_\nu \in V_\nu$  を

$$y_\nu - y_{\nu+1} = A(x_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots$$

ととる.  $\{V_\nu\}_\nu$  の取り方から,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} y_\nu = 0$ .

$$(7) \quad y = y_1 = A(x_1) + y_2 = A(x_1) + A(x_2) + y_3$$

$$= \dots = \sum_{j=1}^{\nu} A(x_j) + y_{\nu+1} = A\left(\sum_{j=1}^{\nu} x_j\right) + y_{\nu+1}.$$

$\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$  の収束を調べる.  $x_\nu \in U_\nu = U(\frac{\epsilon}{2^{\nu+1}})$  より, 任意の  $\nu, \mu \in \mathbb{N}$  に対して (6) を用いて計算すると

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{j=1}^{\nu} x_j, \sum_{j=1}^{\nu+\mu} x_j\right) &= d\left(0, \sum_{j=\nu+1}^{\nu+\mu} x_j\right) \leq \sum_{j=\nu+1}^{\nu+\mu} d(0, x_j) \\ &< \sum_{j=\nu+1}^{\nu+\mu} \frac{\epsilon}{2^{j+1}} < \frac{\epsilon}{2^{\nu+1}}. \end{aligned}$$

従って,  $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$  はコーシー級数で収束する. 極限を  $w = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$  とおくと, (7) より  $y = A(w)$  となる. また

$$d(0, w) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} d(0, x_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{\nu+1}} = \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon.$$

よって,  $A(U(\epsilon)) \supset V_1$  が示された.  $\square$

#### L. シュヴァルツの定理 7.3.17 の証明.

仮定.  $F$  は, 線形ベール空間と仮定すれば十分である.

(イ)  $A_0 = A + B : E \rightarrow F$  とおく. 有限次元線形部分空間  $S \subset F$  があって  $A_0$  と商写像  $F \rightarrow F/S$  の合成を  $\tilde{A}_0$  とするとき,  $\tilde{A}_0$  が全射であることを示せば十分である.

なぜならば, まず  $S = S' \oplus (S \cap A_0(E))$  と  $S$  を直和分解する. 代数的に  $F = A_0(E) \oplus S'$  となる.  $S'$  は, 有限次元であるから線形位相空間としてフレッシュェである. また  $\text{Ker } A_0$  は閉であるから商空間  $E/\text{Ker } A_0$  はハウスドルフである. 次の連続線形全射と全単射を考える.

$$\tilde{A}_0 : x \oplus y \in E \oplus S' \rightarrow A_0(x) + y \in F,$$

$$\widehat{A}_0 : [x] \oplus y \in \widehat{E} := (E/\text{Ker } A_0) \oplus S' \rightarrow A_0(x) + y \in F.$$

定理 5 により  $\widetilde{A}_0$  は、開写像であるから、 $\widehat{A}_0$  も開写像である。従って、 $\widehat{A}_0$  は線形位相同型であることがわかった。 $(E/\text{Ker } A_0) \oplus \{0\} (\subset \widehat{E})$  は閉であるから  $\widehat{A}_0((E/\text{Ker } A_0) \oplus \{0\}) = A_0(E)$  は閉である。  $\text{Coker } A_0 = F/A_0(E) \cong S'$  となるので、 $\text{Coker } A_0$  は有限次元である。

上記  $S$  の存在を示そう。仮定により、 $0 \in E$  のある凸近傍  $U_0$  で  $-U_0 = U_0$  を満たし、かつ  $K := \overline{B(U_0)}$  がコンパクトなものがある。  $A$  は全射なので、定理 5 により  $V_0 := A(U_0)$  は開である。開被覆  $K \subset \bigcup_{b \in K} (b + \frac{1}{2}V_0)$  を考えると、 $K$  はコンパクトであるから、有限個の点  $b_j \in K, 1 \leq j \leq l$  があって  $K \subset \bigcup_{j=1}^l (b_j + \frac{1}{2}V_0)$ 。  $S = \langle b_1, \dots, b_l \rangle$  を  $b_j, 1 \leq j \leq l$  で張られる有限次元部分空間とする。定理 7.3.5 により  $S$  は閉であるから、商空間  $F/S$  は線形ベール空間になることに注意する。  $\pi : F \rightarrow F/S$  を商写像とする。  $\widetilde{V}_0 = \pi(V_0)$  とおく。  $\widetilde{K} = \pi(K)$  はコンパクトである。  $\widetilde{K} \subset \frac{1}{2}\widetilde{V}_0$  となっている。  $F$  を  $F/S$  で置き換えて、

$$K \subset \frac{1}{2}V_0$$

が初めから満たされているとして、 $A_0$  が全射であることを示せば良い。

(口)  $A_0(E)$  は、 $F$  の線形部分空間であるから、次より  $A_0(E) = F$  が従う。

主張 8 上述の仮定の下で、 $A_0(E) \supset V_0$ 。

( $\because$ ) 任意の  $y_0 \in V_0$  をとる。ある  $x_0 \in U_0$  が在って  $A(x_0) = y_0$ 。  $y_1 = y_0 - A_0(x_0) = -B(x_0) \in K \subset \frac{1}{2}V_0 = A(\frac{1}{2}U_0)$  であるから、ある  $x_1 \in \frac{1}{2}U_0$  で  $A(x_1) = y_1$  となるものがある。

$$y_2 := y_1 - A_0(x_1) = -B(x_1) \in B\left(\frac{1}{2}U_0\right) = \frac{1}{2}B(U_0)$$

$$\subset \frac{1}{2}K \subset \frac{1}{2^2}V_0 = A\left(\frac{1}{2^2}U_0\right).$$

従って  $x_2 \in \frac{1}{2^2}U_0$  が在って  $y_2 = A(x_2)$ 。以下順次、 $x_\nu \in \frac{1}{2^\nu}U_0, y_\nu = A(x_\nu), \nu = 1, 2, \dots$ , を

$$y_{\nu+1} = y_\nu - A_0(x_\nu) \in \frac{1}{2^\nu}K \subset A\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}U_0\right)$$

が満たされるように取ることができる。従って  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} y_\nu = 0$  が成立し、

$$(9) \quad y_{\nu+1} = y_\nu - A_0(x_\nu) = \dots = y_0 - A_0\left(\sum_{j=0}^{\nu} x_j\right).$$

$\sum_{j=0}^{\infty} x_j$  が収束するように取り直せることを示したい。(7.3.10) で定義される  $E$  の完備距離を  $d$  とし、 $U(r) = \{x \in E; d(x, 0) < r\}$  と書く。 $0 \in E$  の基本近傍

系  $\{U_p\}_{p=0}^{\infty}$  を次のようにとる.

- (i)  $U_0$  は既に取りつてあるが,  $U_0 \subset U(1)$  が成り立つとしてよい. さらに,  
 $U_p \subset U(2^{-p}), p = 1, 2, \dots$
- (ii) 各  $U_p$  は、凸かつ対称,  $-U_p = U_p$ , である.
- (iii)  $U_{p+1} \subset \frac{1}{2}U_p, p = 0, 1, \dots$

$K$  の開被覆

$$K \subset A \left( \left( \bigcup_{\mu=1}^{\infty} 2^{\mu} U_p \right) \cap \frac{1}{2} U_0 \right) = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} A \left( (2^{\mu} U_p) \cap \frac{1}{2} U_0 \right)$$

を考えると、ある  $N(p) (\geq 1)$  が存在して

$$(10) \quad K \subset A \left( (2^{N(p)} U_p) \cap \frac{1}{2} U_0 \right)$$

となる.  $N(p) < N(p+1)$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) が成立しているとしてよい.  $0 \leq \nu \leq N(1)$  に対しては上で取った  $x_{\nu}$  をとり

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \dots + x_{N(1)}$$

とおく. 以下順に、 $N(p) < \nu \leq N(p+1)$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) に対しては (10) より

$$\frac{1}{2^{\nu-1}} K \subset A \left( (2^{N(p)-\nu+1} U_p) \cap \frac{1}{2^{\nu}} U_0 \right)$$

が成立し、 $y_{\nu} \in \frac{1}{2^{\nu-1}} K$  であつたから、 $x_{\nu} \in (2^{N(p)-\nu+1} U_p) \cap \frac{1}{2^{\nu}} U_0$  を  $A(x_{\nu}) = y_{\nu}$  が成立するように取ることができる. すると

$$(11) \quad \tilde{x}_p := x_{N(p)+1} + \dots + x_{N(p+1)} \in \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{N(p+1)-N(p)-1}} \right) U_p \\ \subset 2U_p \subset U_{p-1} \subset U \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right);$$

$$(12) \quad d(\tilde{x}_p, 0) < \frac{1}{2^{p-1}}.$$

任意の  $p > q > q_0$  に対し、(6) と (12) を使って

$$d \left( \sum_{\nu=0}^p \tilde{x}_{\nu}, \sum_{\nu=0}^q \tilde{x}_{\nu} \right) \leq \sum_{\nu=q+1}^p d(\tilde{x}_{\nu}, 0) < \sum_{\nu=q+1}^p \frac{1}{2^{\nu-1}} \\ < \frac{1}{2^{q-1}} \leq \frac{1}{2^{q_0}} \rightarrow 0 \quad (q_0 \rightarrow \infty).$$

よつて  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{x}_{\nu}$  は、コーシー級数をなし、 $d$  は完備であるから極限  $w = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{x}_{\nu}$  が存在する. (9) より

$$y_{N(p+1)+1} = y_0 - A_0 \left( \sum_{\nu=0}^p \tilde{x}_{\nu} \right)$$

である.  $p \rightarrow \infty$  として、 $y_0 = A_0(w)$ . よつて、 $A_0(E) \supset V_0$ .  $\square$

注意. (1) 上記証明は、次の文献 [†] の Chap. IX, Theorem (1.8) b) の証明法