

多変数解析関数論 補足

野口潤次郎

2016(H28).06.17

$$\begin{aligned}
A(z) &= (\mathbf{1}_p - B'_1(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B'_k(z)) \cdot (\mathbf{1}_p - B_{k+1}(z)) \\
&\quad \cdot (\mathbf{1}_p - B''_k(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B''_1(z)), \\
B_{k+1}(z) &\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

であるから, $A''(z) = A''_0(z)^{-1}$ とおけば, $A(z) = A'(z)A''(z)^{-1}$ ($z \in \tilde{E}' \cap \tilde{E}''$) を得る. \square

注意 20 (評価付き) 補題 4.2.2 において E', E'', U で決まる正定数 η, C と E' を内部に含む閉直方体近傍 \tilde{E}' および E'' を内部に含む閉直方体近傍 \tilde{E}'' が $\tilde{E}' \cap \tilde{E}'' \subset U$ を満たす様に存在して, $A = \mathbf{1}_p - B$ と書くとき, $\|B\|_U \leq \eta$ ならば $A' = \mathbf{1}_p - B'$, $A''_0 = \mathbf{1}_p - B''$ を

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_p - B(z) &= (\mathbf{1}_p - B'(z))(\mathbf{1}_p - B''(z)), \quad z \in \tilde{E}' \cap \tilde{E}'', \\
\max\{\|B'\|_{\tilde{E}'}, \|B''\|_{\tilde{E}''}\} &\leq C\|B\|_U
\end{aligned}$$

を満たすようにとることができる. 証明は, 上記議論と (16), (19) による.

$$N(P, Q) = P(\mathbf{1}_p - P)^{-1}Q(\mathbf{1}_p - Q)^{-1}.$$

条件より,

$$\|N(P, Q)\| \leq \|P\| \cdot 2 \cdot \|Q\| \cdot 2 = 2^2(\max\{\|P\|, \|Q\|\})^2. \quad \square$$

$$(16) \quad \varepsilon_1 = \max \left\{ \|B'_1\|_{\tilde{E}'_{(2)}}, \|B''_1\|_{\tilde{E}''_{(2)}} \right\} \left(\leq \frac{2L}{\pi\delta} \|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}} \right)$$

とおく. $\frac{\pi\delta}{2^5L} \leq \frac{1}{2}$ が満たされるように, 必要ならば $\delta > 0$ を小さく取り直す.
 $\|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}} \leq \frac{\pi^2\delta^2}{2^6L^2}$ とすると,

$$(17) \quad \varepsilon_1 \leq \frac{\pi\delta}{2^5L} \leq \frac{1}{2}.$$

以下, 帰納的に構成してゆく. $j = 1, \dots, k$ に対し

$$B'_j(z) \ (z \in \tilde{E}'_{(j+1)}), \quad B''_j(z) \ (z \in \tilde{E}''_{(j+1)}),$$

$$\varepsilon_j = \max \left\{ \|B'_j\|_{\tilde{E}'_{(j+1)}}, \|B''_j\|_{\tilde{E}''_{(j+1)}} \right\}$$

が, 次を満たすように決まったとする ($j = 1$ は, (17)):

$$(18) \quad \varepsilon_j \leq \frac{\pi\delta}{2^{j+4}L}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

$z \in \tilde{E}'_{(k+2)} \cap \tilde{E}''_{(k+2)}$ に対し $B_{k+1}(z) = N(B'_k(z), B''_k(z))$ として, 本文 p. 101 にある $\gamma'_{(k+1)}, \gamma''_{(k+1)}$ を用いて

$$B'_{k+1}(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'_{(k+1)}} \frac{B_{k+1}(z', \zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta, \quad (z', z_n) \in \tilde{E}'_{(k+2)},$$

$$B''_{k+1}(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma''_{(k+1)}} \frac{B_{k+1}(z', \zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta, \quad (z', z_n) \in \tilde{E}''_{(k+2)}$$

とおく. ここで, $|\zeta - z_n| \geq \frac{\delta}{2^{k+1}}$ であることに注意すると, (18) と補題 15 より,

$$(19) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &\leq \frac{L}{2\pi} \frac{2^{k+2}}{\delta} \|N(B'_k, B''_k)\|_{\tilde{E}'_{(k+1)} \cap \tilde{E}''_{(k+1)}} \\ &\leq \frac{L}{2\pi} \frac{2^{k+2}}{\delta} 2^2 \varepsilon_k^2 \leq \frac{1}{2} \varepsilon_k \leq \frac{\pi\delta}{2^{k+5}L}. \end{aligned}$$

よって, (18) は, $j = k + 1$ に対し成立し, $\varepsilon_k \leq \frac{1}{2^k}$. これより, 次の無限乗積

$$A'(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{1}_p - B'_1(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B'_k(z)), \quad z \in \tilde{E}' := \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{E}'_{(k)},$$

$$A''(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{1}_p - B''_k(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - B''_1(z)), \quad z \in \tilde{E}'' := \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{E}''_{(k)}$$

はそれぞれの定義域で一様収束し, その内部で可逆な p 次正方行列値正則関数となる. $z \in \tilde{E}' \cap \tilde{E}''$ に対し,

補足 I: 弱正則関数の連続性 (§6.10.4)

補題 1 X を複素空間とする. X は, $a \in X$ で既約とし, f を近傍 $U(\ni a)$ 上の弱正則関数とする. このとき極限值 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in U \setminus \Sigma(X)}} f(x)$ が存在する.

証明 問題は局所的であるから, X は \mathbb{C}^n の原点を中心とする多重円板 $P\Delta$ 内の解析的部分集合で $a = 0$, $U = P\Delta$ であるとしてよい. $0 \in X$ の基本近傍系

$$V_\nu \subset V, \nu = 1, 2, \dots, \quad V_\nu \ni V_{\nu+1}, \quad \bigcap_{\nu} V_\nu = \{0\}$$

で $V_\nu \setminus \Sigma(X)$ が連結なものがある (定理 6.4.16 参照).

定理 6.10.18 より f_0 は $\mathcal{O}_{X,0}$ 上整である. 従って, 次のモニック方程式が成立しているとしてよい.

$$(2) \quad f(x)^d + \sum_{j=1}^d a_j(x) f(x)^{d-j} = 0,$$

$$x \in X \setminus \Sigma(X), \quad a_j \in \mathcal{O}(X).$$

主張が成立しないと仮定する. すると 0 に収束する点列 $x_\nu, y_\nu \in V_\nu \setminus \Sigma(X)$, $\nu = 1, 2, \dots$ が存在して

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(x_\nu) = \alpha, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} f(y_\nu) = \beta, \quad \alpha \neq \beta$$

となる. $V_\nu \setminus \Sigma(X)$ は連結なので, x_ν と y_ν を結ぶ曲線 $\Gamma_\nu \subset V_\nu \setminus \Sigma(X)$ が取れる. 閉円板 $\overline{\Delta(\alpha, \rho)} \not\ni \beta$ を任意にとりその周を C_ρ とする. $\nu \gg 1$ に対し,

$$f(x_\nu) \in \Delta(\alpha, \rho), \quad f(y_\nu) \notin \overline{\Delta(\alpha, \rho)}.$$

従って, ある $w_\nu \in \Gamma_\nu$ が在って $f(w_\nu) \in C_\rho$. 部分列 $\{w_{\nu_\mu}\}_\mu$ を取ることにより, 極限 $\gamma_\rho = \lim_{\mu \rightarrow \infty} f(w_{\nu_\mu}) \in C_\rho$ が存在する. $\Gamma_{\nu_\mu} \rightarrow 0$ であるから (2) より

$$\gamma_\rho^d + \sum_{j=1}^d a_j(0) \gamma_\rho^{d-j} = 0.$$

$\rho > 0$ を動かすと, この方程式は根を無限個持つことになり, 矛盾である. \square

この補題より次の定理が直ちに従う.

定理 3 複素空間 X 上の弱正則関数 f は, $(X \setminus \Sigma(X)) \cup \{a \in \Sigma(X); \underline{X}_a \text{ は既約}\}$ 上へ連続関数として一意的に拡張される.

注意 f と $a \in X$ を上述のものとする. $f(a)$ を a で連続拡張したときの極限值

とする. f_a は, $\mathcal{O}_{X,a}$ 上整であるから a の近傍で次のモニック方程式を満たす.

$$P(x; f) = f(x)^d + \sum_{\nu=1}^d c_\nu(x) f(x)^{d-\nu} = 0.$$

ただし, c_ν は a の近傍で正則な関数である. そのようなモニック多項式で d が最小なものをとる. もし, $f(a) = 0$ ならば, 補題 1 とワイエルストラスの予備定理により, $c_\nu(a) = 0, 0 \leq \nu \leq d$ となり, $P(x; f)$ はワイエルストラス多項式になる.

補足 II: L. シュヴァルツの定理 7.3.17 の別証

定義. 位相空間 F がベール (Baire) 空間であるとは, 任意の内点を含まない可算個の閉集合 G_n ($n \in \mathbb{N}$) に対し和集合 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ も内点を含まないこととする. 線形位相空間でかつベール空間であるものを線形ベール空間と呼ぶ.

問. 完備距離空間は, ベール空間であることを示せ.

補題 4 E を線形位相空間, F を線形ベール空間, $A: E \rightarrow F$ を連続線形全射とする. すると, $0 \in E$ の任意の近傍 U に対し, $\overline{A(U)}$ は $0 \in F$ を内点として含む.

証明 演算 $(x, y) \in E \times E \rightarrow x - y \in E$ の連続性より $0 \in E$ の近傍 W があって $W - W \subset U$. $E = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \nu W$ であるから, $F = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \nu \overline{A(W)}$. $\nu \overline{A(W)}$ は閉集合であるから, 仮定により, ある ν_0 が在り, $\nu_0 \overline{A(W)}$ は内点を含む. 従って, $\overline{A(W)}$ も内点 x_0 を含む. よって 0 は $\overline{A(W)} - x_0$ の内点である.

$$0 \in \overline{A(W)} - x_0 \subset \overline{A(W)} - \overline{A(W)} = \overline{A(W - W)} \subset \overline{A(U)}$$

より, 0 は $\overline{A(U)}$ の内点である. □

定理 5 (バナッハの開写像定理) E をフレッシュ空間, F を線形ベール空間とする. $A: E \rightarrow F$ が連続線形全射ならば, A は開写像である.

証明 E はフレッシュであるから (7.3.10) で定義される完備距離 $d(x, w)$ を持つ. $d(x, w)$ は次の性質を持つことに注意する.

$$(6) \quad d(x + v, w + v) = d(x, w), \quad d(-x, 0) = d(x, 0), \\ d(x + w, 0) \leq d(x + w, w) + d(w, 0) = d(x, 0) + d(w, 0).$$

$U(\epsilon) = \{x \in E : d(x, 0) < \epsilon\}$, $\epsilon > 0$ とおく. 任意の $\epsilon > 0$ に対し $A(U(\epsilon))$ が $0 \in F$ を内点として含むことを示せば十分である. 補題 4 により, $0 \in F$ の近傍 V があって $V \subset \overline{A(U(\epsilon))}$ が成立する. $U_\nu = U\left(\frac{\epsilon}{2^{\nu+1}}\right)$, $\nu = 1, 2, \dots$ とおく. 各 $\overline{A(U_\nu)}$ に対し $0 \in F$ の近傍 V_ν を $V_\nu \subset \overline{A(U_\nu)}$, $V_\nu \supset V_{\nu+1}$, $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} V_\nu = \{0\}$ が

単に導かれる：

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{j=k}^l (\mathbf{1}_p - A_j) - \mathbf{1}_p \right\|_E &\leq \prod_{j=k}^l (1 + \|A_j\|_E) - 1 \\ &\leq \exp\left(\sum_{j=k}^l \|A_j\|_E\right) - 1, \quad k < l. \end{aligned}$$

可逆性については $(\mathbf{1}_p - A_k(z))^{-1}$ の無限乗積に (iii) を用いて同様の議論を適用する．以上の性質は，これより断りなく用いることとする．

A を補題 4.2.2 で与えられたものとする． $A = \mathbf{1}_p - B_1$ とおく．この B_1 に (4.2.6) を適用すると，

$$(13) \quad B_1 = B'_1 + B''_1,$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \|B'_1\|_{\tilde{E}'_{(2)}} &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2^2}{\delta} L \|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}}, \\ \|B''_1\|_{\tilde{E}''_{(2)}} &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{2^2}{\delta} L \|B_1\|_{\tilde{E}'_{(1)} \cap \tilde{E}''_{(1)}}. \end{aligned}$$

$(\mathbf{1}_p - B'_1)^{-1}$, $(\mathbf{1}_p - B''_1)^{-1}$ の存在を仮定して，

$$\begin{aligned} M(B'_1, B''_1) &= (\mathbf{1}_p - B'_1)^{-1} (\mathbf{1}_p - B'_1 - B''_1) (\mathbf{1}_p - B''_1)^{-1} \\ &= \mathbf{1}_p - N(B'_1, B''_1) \end{aligned}$$

とおくと，

$$A = \mathbf{1}_p - B_1 = (\mathbf{1}_p - B'_1) M(B'_1, B''_1) (\mathbf{1}_p - B''_1)$$

となる． $M(B'_1, B''_1)$ を A に見立てて繰り返すと，

$$A = (\mathbf{1}_p - B'_1) (\mathbf{1}_p - B'_2) M(B'_2, B''_2) (\mathbf{1}_p - B''_2) (\mathbf{1}_p - B''_1).$$

これを繰り返して然るべく収束させる為に，次の評価が鍵となる．

補題 15 P, Q を p 次正方行列とし， $\max\{\|P\|, \|Q\|\} \leq \frac{1}{2}$ とすると，

$$\|N(P, Q)\| \leq 2^2 (\max\{\|P\|, \|Q\|\})^2.$$

証明 $(\mathbf{1}_p - Q)^{-1} = \mathbf{1}_p + Q(\mathbf{1}_p - Q)^{-1} = \mathbf{1}_p + Q + Q^2(\mathbf{1}_p - Q)^{-1}$ に注意して，

$$\begin{aligned} M(P, Q) &= (\mathbf{1}_p - P)^{-1} (\mathbf{1}_p - P - Q) (\mathbf{1}_p - Q)^{-1} \\ &= (\mathbf{1}_p - (\mathbf{1}_p - P)^{-1} Q) (\mathbf{1}_p - Q)^{-1} \\ &= \mathbf{1}_p + Q + Q^2(\mathbf{1}_p - Q)^{-1} \\ &\quad - (\mathbf{1}_p + P(\mathbf{1}_p - P)^{-1}) Q (\mathbf{1}_p + Q(\mathbf{1}_p - Q)^{-1}) \\ &= \mathbf{1}_p + Q + Q^2(\mathbf{1}_p - Q)^{-1} \\ &\quad - Q - Q^2(\mathbf{1}_p - Q)^{-1} - P(\mathbf{1}_p - P)^{-1} Q (\mathbf{1}_p - Q)^{-1} \\ &= \mathbf{1}_p - P(\mathbf{1}_p - P)^{-1} Q (\mathbf{1}_p - Q)^{-1}, \end{aligned}$$

による .

[†] J.-P. Demailly, Complex Analytic and Differentiable Geometry, 2012, www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/ .

(2) L. シュヴァルツの定理 7.3.17 において, 既存の文献 (L. Schwartz, C.R. Paris **236** (1953), [一松], [Gu-R], [G-R1], [†] 等を参照) では F をフレッシュと仮定しているが, 上述のようにベール空間と仮定すれば十分である .

補足 III: カルタンの行列分解 補題 4.2.2 の別証

§4.2 の議論では, 行列の対数 $\log(\cdot)$ を用いる為に諸定数を決める手続きが複雑であった . ここでは, 定数の決め方が簡易化された証明を与える . 行列の $\exp(\cdot)$, $\log(\cdot)$ も用いない

一般に p 次正方行列 (複素係数) A に対し作用素ノルム $\|A\| = \max\{\|A\xi\|; \xi \in \mathbf{C}^p, \|\xi\| = 1\}$ を考える . $A = A(z)$ が, 部分集合 $E \subset \mathbf{C}^n$ 上定義された p 次正方行列値関数であるとき, $\|A\|_E = \sup\{\|A(z)\|; z \in E\}$ と書く . さらに, B も p 次正方行列とすると, 次が成立する :

- (i) A の成分を a_{ij} として, $\frac{1}{p}\|A\| \leq \max_{i,j}\{|a_{ij}|\} \leq \|A\|$.
- (ii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
- (iii) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.
- (iv) $A = A(z)(z \in E)$ に対し, $\|A\|_E \leq \varepsilon < 1$ ならば, 逆行列 $(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1}$ が存在して次が成立する .

$$(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1} = \mathbf{1}_p + A(z) + A(z)^2 + \cdots .$$

ここで, 右辺は E 上一様収束し,

$$\|(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad \|(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1} - \mathbf{1}_p\| \leq \frac{\|A(z)\|}{1 - \varepsilon} .$$

特に, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ならば, $\|(\mathbf{1}_p - A(z))^{-1}\| \leq 2$.

- (v) $k = 0, 1, \dots$ に対し, $0 < \varepsilon_k < 1$ と p 次正方行列値関数 $A_k(z), z \in E$ が与えられ, $\|A_k\|_E \leq \varepsilon_k, \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ が成立しているとする . このとき, 次の 2 つの無限乗積

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{1}_p - A_0(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - A_k(z)),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{1}_p - A_k(z)) \cdots (\mathbf{1}_p - A_0(z))$$

は E 上一様収束し, 極限は共に可逆行列値関数である .

- (v) は, $\|\prod_{j=0}^k (\mathbf{1}_p - A_j)\|_E \leq \prod_{j=0}^k (1 + \|A_j\|_E)$ と次の不等式を用いると簡

成立するようにとる .

主張. 任意の $\epsilon > 0$ 対し $A(U(\epsilon)) \supset V_1$.

\therefore 任意に $y = y_1 \in V_1$ をとる. $y_1 \in \overline{A(U_1)}$ であるから $(y_1 - V_2) \cap A(U_1) \neq \emptyset$. ある $y_2 \in V_2, x_1 \in U_1$ が在って, $y_1 - y_2 = A(x_1)$ となる. $y_2 \in \overline{A(U_2)}$ であるから, $(y_2 - V_3) \cap A(U_2) \neq \emptyset$. $y_3 \in V_3, x_2 \in U_2$ が在って, $y_2 - y_3 = A(x_2)$ が成立する. 以下帰納的に, $x_\nu \in U_\nu$ と $y_\nu \in V_\nu$ を

$$y_\nu - y_{\nu+1} = A(x_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots$$

ととる. $\{V_\nu\}_\nu$ の取り方から, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} y_\nu = 0$.

$$(7) \quad y = y_1 = A(x_1) + y_2 = A(x_1) + A(x_2) + y_3$$

$$= \dots = \sum_{j=1}^{\nu} A(x_j) + y_{\nu+1} = A\left(\sum_{j=1}^{\nu} x_j\right) + y_{\nu+1}.$$

$\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$ の収束を調べる. $x_\nu \in U_\nu = U(\frac{\epsilon}{2^{\nu+1}})$ より, 任意の $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ に対して (6) を用いて計算すると

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{j=1}^{\nu} x_j, \sum_{j=1}^{\nu+\mu} x_j\right) &= d\left(0, \sum_{j=\nu+1}^{\nu+\mu} x_j\right) \leq \sum_{j=\nu+1}^{\nu+\mu} d(0, x_j) \\ &< \sum_{j=\nu+1}^{\nu+\mu} \frac{\epsilon}{2^{j+1}} < \frac{\epsilon}{2^{\nu+1}}. \end{aligned}$$

従って, $\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$ はコーシー級数で収束する. 極限を $w = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu$ とおくと, (7) より $y = A(w)$ となる. また

$$d(0, w) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} d(0, x_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{\nu+1}} = \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon.$$

よって, $A(U(\epsilon)) \supset V_1$ が示された. \square

L. シュヴァルツの定理 7.3.17 の証明.

仮定. F は, 線形ベール空間と仮定すれば十分である.

(イ) $A_0 = A + B : E \rightarrow F$ とおく. 有限次元線形部分空間 $S \subset F$ があって A_0 と商写像 $F \rightarrow F/S$ の合成を \tilde{A}_0 とするとき, \tilde{A}_0 が全射であることを示せば十分である.

なぜならば, まず $S = S' \oplus (S \cap A_0(E))$ と S を直和分解する. 代数的に $F = A_0(E) \oplus S'$ となる. S' は, 有限次元であるから線形位相空間としてフレッシュェである. また $\text{Ker } A_0$ は閉であるから商空間 $E/\text{Ker } A_0$ はハウスドルフである. 次の連続線形全射と全単射を考える.

$$\tilde{A}_0 : x \oplus y \in E \oplus S' \rightarrow A_0(x) + y \in F,$$

$$\widehat{A}_0 : [x] \oplus y \in \widehat{E} := (E/\text{Ker } A_0) \oplus S' \rightarrow A_0(x) + y \in F.$$

定理 5 により \widetilde{A}_0 は、開写像であるから、 \widehat{A}_0 も開写像である。従って、 \widehat{A}_0 は線形位相同型であることがわかった。 $(E/\text{Ker } A_0) \oplus \{0\} (\subset \widehat{E})$ は閉であるから $\widehat{A}_0((E/\text{Ker } A_0) \oplus \{0\}) = A_0(E)$ は閉である。 $\text{Coker } A_0 = F/A_0(E) \cong S'$ となるので、 $\text{Coker } A_0$ は有限次元である。

上記 S の存在を示そう。仮定により、 $0 \in E$ のある凸近傍 U_0 で $-U_0 = U_0$ を満たし、かつ $K := \overline{B(U_0)}$ がコンパクトなものがある。 A は全射なので、定理 5 により $V_0 := A(U_0)$ は開である。開被覆 $K \subset \bigcup_{b \in K} (b + \frac{1}{2}V_0)$ を考えると、 K はコンパクトであるから、有限個の点 $b_j \in K, 1 \leq j \leq l$ があって $K \subset \bigcup_{j=1}^l (b_j + \frac{1}{2}V_0)$ 。 $S = \langle b_1, \dots, b_l \rangle$ を $b_j, 1 \leq j \leq l$ で張られる有限次元部分空間とする。定理 7.3.5 により S は閉であるから、商空間 F/S は線形ベール空間になることに注意する。 $\pi : F \rightarrow F/S$ を商写像とする。 $\widetilde{V}_0 = \pi(V_0)$ とおく。 $\widetilde{K} = \pi(K)$ はコンパクトである。 $\widetilde{K} \subset \frac{1}{2}\widetilde{V}_0$ となっている。 F を F/S で置き換えて、

$$K \subset \frac{1}{2}V_0$$

が初めから満たされているとして、 A_0 が全射であることを示せば良い。

(口) $A_0(E)$ は、 F の線形部分空間であるから、次より $A_0(E) = F$ が従う。

主張 8 上述の仮定の下で、 $A_0(E) \supset V_0$ 。

(\because) 任意の $y_0 \in V_0$ をとる。ある $x_0 \in U_0$ が在って $A(x_0) = y_0$ 。 $y_1 = y_0 - A_0(x_0) = -B(x_0) \in K \subset \frac{1}{2}V_0 = A(\frac{1}{2}U_0)$ であるから、ある $x_1 \in \frac{1}{2}U_0$ で $A(x_1) = y_1$ となるものがある。

$$y_2 := y_1 - A_0(x_1) = -B(x_1) \in B\left(\frac{1}{2}U_0\right) = \frac{1}{2}B(U_0)$$

$$\subset \frac{1}{2}K \subset \frac{1}{2^2}V_0 = A\left(\frac{1}{2^2}U_0\right).$$

従って $x_2 \in \frac{1}{2^2}U_0$ が在って $y_2 = A(x_2)$ 。以下順次、 $x_\nu \in \frac{1}{2^\nu}U_0, y_\nu = A(x_\nu), \nu = 1, 2, \dots$, を

$$y_{\nu+1} = y_\nu - A_0(x_\nu) \in \frac{1}{2^\nu}K \subset A\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}U_0\right)$$

が満たされるように取ることができる。従って $\lim_{\nu \rightarrow \infty} y_\nu = 0$ が成立し、

$$(9) \quad y_{\nu+1} = y_\nu - A_0(x_\nu) = \dots = y_0 - A_0\left(\sum_{j=0}^{\nu} x_j\right).$$

$\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ が収束するように取り直せることを示したい。(7.3.10) で定義される E の完備距離を d とし、 $U(r) = \{x \in E; d(x, 0) < r\}$ と書く。 $0 \in E$ の基本近傍

系 $\{U_p\}_{p=0}^{\infty}$ を次のようにとる.

- (i) U_0 は既に取りつてあるが, $U_0 \subset U(1)$ が成り立つとしてよい. さらに,
 $U_p \subset U(2^{-p}), p = 1, 2, \dots$
- (ii) 各 U_p は, 凸かつ対称, $-U_p = U_p$, である.
- (iii) $U_{p+1} \subset \frac{1}{2}U_p, p = 0, 1, \dots$

K の開被覆

$$K \subset A \left(\left(\bigcup_{\mu=1}^{\infty} 2^{\mu} U_p \right) \cap \frac{1}{2} U_0 \right) = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} A \left((2^{\mu} U_p) \cap \frac{1}{2} U_0 \right)$$

を考えると, ある $N(p) (\geq 1)$ が存在して

$$(10) \quad K \subset A \left((2^{N(p)} U_p) \cap \frac{1}{2} U_0 \right)$$

となる. $N(p) < N(p+1) (p = 1, 2, \dots)$ が成立しているとしてよい. $0 \leq \nu \leq N(1)$ に対しては上で取った x_{ν} をとり

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \dots + x_{N(1)}$$

とおく. 以下順に, $N(p) < \nu \leq N(p+1) (p = 1, 2, \dots)$ に対しては (10) より

$$\frac{1}{2^{\nu-1}} K \subset A \left((2^{N(p)-\nu+1} U_p) \cap \frac{1}{2^{\nu}} U_0 \right)$$

が成立し, $y_{\nu} \in \frac{1}{2^{\nu-1}} K$ であつたから, $x_{\nu} \in (2^{N(p)-\nu+1} U_p) \cap \frac{1}{2^{\nu}} U_0$ を $A(x_{\nu}) = y_{\nu}$ が成立するように取ることができる. すると

$$(11) \quad \tilde{x}_p := x_{N(p)+1} + \dots + x_{N(p+1)} \in \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{N(p+1)-N(p)-1}} \right) U_p \\ \subset 2U_p \subset U_{p-1} \subset U \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right);$$

$$(12) \quad d(\tilde{x}_p, 0) < \frac{1}{2^{p-1}}.$$

任意の $p > q > q_0$ に対し, (6) と (12) を使って

$$d \left(\sum_{\nu=0}^p \tilde{x}_{\nu}, \sum_{\nu=0}^q \tilde{x}_{\nu} \right) \leq \sum_{\nu=q+1}^p d(\tilde{x}_{\nu}, 0) < \sum_{\nu=q+1}^p \frac{1}{2^{\nu-1}} \\ < \frac{1}{2^{q-1}} \leq \frac{1}{2^{q_0}} \rightarrow 0 \quad (q_0 \rightarrow \infty).$$

よつて $\sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{x}_{\nu}$ は, コーシー級数をなし, d は完備であるから極限 $w = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{x}_{\nu}$ が存在する. (9) より

$$y_{N(p+1)+1} = y_0 - A_0 \left(\sum_{\nu=0}^p \tilde{x}_{\nu} \right)$$

である. $p \rightarrow \infty$ として, $y_0 = A_0(w)$. よつて, $A_0(E) \supset V_0$. \square

注意. (1) 上記証明は, 次の文献 [†] の Chap. IX, Theorem (1.8) b) の証明法