値分布と有理点分布

平成９年 (1997) 秋季総合分科会企画特別講演

野口潤次郎（東工大理学部）

序.

この講演では次の三つのトピックスについて数学現象論の立場から論じてみたい.

(1) 双曲的多様体の理論.
(2) Nevanlinna 理論.
(3) 有理点の有限性の問題 (Diophantine geometry).

それぞれの話題で重要な結果でも、ここでの話しに余り関係ないものは言及されないのでご留意ください. 一つの指針として次の予想がある：

Lang 予想 (1974). 代数体上定義された双曲的多様体の有理点は有限個であり、関数体上でもその類比が成立する.

双曲的多様体の定義 (小林、1967). X を複素多様体（または空間）とし、$\Delta = \{|z| < 1\} \subset \mathbf{C}$ を単位円板とする. 二点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in X$ に対し、正則写像の連鎖

$$f_i : \Delta \to X, \quad z \in \Delta, \quad i = 1, \ldots, l,$$
$$\mathrm{P} = f_1(0), f_1(z_1) = f_2(0), \ldots, f_l = (z_l) = \mathrm{Q}$$

をとり、次の下極限をとる：

$$d_X(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \inf \sum_{j=1}^{l} d_\Delta(0, z_j).$$

ここで、d_Δ は単位円板の双曲距離を表す. X が（完備）双曲的であるとは、d_X が（完備）距離関数になることである.

一般的に次のことが成立する：

(1) $d_X(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = d_X(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) \geqq 0$.
(2) （三角不等式）$d_X(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \leqq d_X(\mathrm{P}, \mathrm{R}) + d_X(\mathrm{R}, \mathrm{Q})$.
(3) （短縮原理）二つの複素多様体間の正則写像 $F : X \to Y$ に対し

$$d_X(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \geqq d_Y(F(\mathrm{P}), F(\mathrm{Q})).$$

(4) $\pi : X' \to X$ が正則被覆空間ならば、X' が双曲的であることと X が双曲的あることは同値.
(5) $d_\Delta =$ “d_Δ” で、$\dim X = 1$ の時、X が双曲的であることと X の普遍被覆 $\tilde{X}$ が Δ に正則同型であることは同値.

Brody の定理 1 (1978). X がコンパクトならば次は同値：

(1) X は非双曲的.
(2) H を X 上のエルミート計量とする. 正則写像 $f : \mathbf{C} \to X$ で $f'(0) \neq 0$ かつ $\|f'(z)\|_H \leqq 1, \forall z \in \mathbf{C}$, を充たすものが存在する.

Brody の定理 2 (1978). コンパクト双曲的多様体の小変形は双曲的.

Mordell 予想 (1922)–**Faltings の定理** (1983). X が代数体 F 上の代数曲線で、種数 $g(X) \geqq 2$（双曲的）ならばその (F-) 有理点の集合 $X(\mathrm{F})$ は有限.

以上の事実を踏まえ、次節では、どのような経緯でこのような結果に辿りついたかをここでの観点から眺める.

§1 関数体上の類比から.

関数体上の Mordell 予想は、1960 年に Lang により予想され、1963 年に Manin により証明された、が実はギャップがあり 1990 年に Coleman により正された. 1965 年には Grauert が代数幾何的（完全な）証明を与えた.

関数体上の Mordell 予想とはなにかと言うと、それは次の関数体上の Lang 予想の一次元版である.

関数体上の Lang 予想. 定数体 $\mathrm{k}(= \mathbf{C})$ 上定義された代数多様体 R の有理関数体を K とする. K 上定義された代数多様体 $\mathcal{X}$ に対し代数的ファイバー空間 $\pi : \mathcal{X} \to R$ があり、K-有理点はこのファイバー空間の有理切断 $\sigma : R \to \mathcal{X}$ に対応する. その全体を $\Gamma(R, \mathcal{X})$ と書く.

(1)(Nog., 1981) ある $t \in R$ で、接ベクトル束 $\mathbf{T}(\mathcal{X}_t)$, $(\mathcal{X}_t = \pi^{-1}(t))$ が負（双対 $\mathbf{T}^*(\mathcal{X}_t)$ が豊富）で、$\{\sigma(t); \sigma \in \Gamma(R, \mathcal{X})\}$ が $\mathcal{X}_t$ で Zariski 稠密ならば次が成立する.

(1) $\mathcal{X} \cong R \times \mathcal{X}_t$.
(2) $|\{\sigma \in \Gamma(R, \mathcal{X}); 非定値\}| < \infty$.

$\mathbf{T}(\mathcal{X}_t)$ が負ならば $\mathcal{X}_t$ は双曲的であるが、逆は成立しない (小林、1975). Lang 予想のもとの条件である双曲的な場合は次のようになる.

(2)(Nog., 1985+1992) R はコンパクト、R' をその Zariski 開集合とする. 任意の $t \in R'$ で $\mathcal{X}_t$ は双曲的で、$\mathcal{X}' = \pi^{-1}(R')$ は境界 $\partial R'$ に沿って $\mathcal{X}$ に双曲的に埋め込まれているとする. すると、$\Gamma(R, \mathcal{X})$ はコンパクト複素空間になり、その各既約成分 Γ_i に対し R 上の部分空間 $\mathcal{Y}_i \subset \mathcal{X}$ でつぎを充たすものがある：

$$\mathcal{Y}_i \cong R \times Y_i \qquad \text{（自明ファイバー空間）}$$
$$\Gamma_i \cong \{t \to (t, y) : y \in Y_i\} \qquad \text{（定切断）.}$$

(3)（上記証明中の有限性定理：Lang 予想、1974）X, Y をコンパクト複素空間、X は双曲的とすると、$\mathrm{Mer}_{\mathrm{surj}}(Y, X) = \{f : Y \to X; 全射的有理型写像\}$ は有限集合.

Faltings による Mordell 予想の解決は、Lang による直接的類比のアプローチからではなく、次の一見 Mordell 予想とは関係のない Shafarevich による予想からのアプローチだった.

Shafarevich 予想 (1962). F を代数体、有限部分集合 $S \subset \mathrm{Spec}\mathcal{O}_{\mathrm{F}} \setminus \{\text{generic point}\}$ と自然数 g を固定する. このとき、F 上の g-次元アーベル多様体（又は、種数 g の代数曲線）で高々S 上でのみ悪い簡約をもつものは有限個しかない.

この予想は、Mordell 予想よりもずっと幾何学的である. 従って、その関数体上の類比も容易に考えられ、そこからスタートした.

関数体上 Shafarevich 予想の類比. (1) (Parshin, 1968, $S = \emptyset$; Arakelov, 1971, $S =$ 一般）簡単のため、$\dim R = 1$ とし、$S \subset R$ を有限部分集合と g を固定する. すると、高々S 上でのみ退化する種数 g（$g(\mathcal{X}_t) = g$）の代数曲線の局所非自明ファイバー空間 $\pi : \mathcal{X} \to R$ は有限個しか存在しない.

(2)(Parshin, 1968) Shafarevich 予想は Mordell 予想を含む.

M. Kuga and S.-I. Ihara, Family of families of Abelian varieties, Algebraic Number Theory, Kyoto, 1976, pp. 129-142, Japan Soc. for the Promotion of Science, Tokyo, 1977.

M. Kuga, I. Satake, 1963∼.

この論文を、関数体上 Shafarevich 予想の類比という観点から見ても興味深く、そのままでは類比が成立しないことを言っている.

Faltings (1983). 主偏極アーベル多様体に対する関数体上 Shafarevich 予想の類比が成立するための障害を記述（一般にはダメ：Serre による反例を与えている）.

さてこここで、この様な問題を考えるときの基本的アイデアを説明しておこう. $\pi : \mathcal{X} \to R$, $R' = R \setminus S$ を上で現れたものとする. $\mathcal{T}_g$, Γ_g ($\mathcal{S}_g$, $\mathrm{Sp}(2g, \mathbf{Z})$) で種数 g のタイヒミューラー空間（ジーゲル上半空間）とそのモジュラー群とする.

$$\mathbf{M} = \begin{cases} \mathrm{Sp}(2g, \mathbf{Z}) \setminus \mathcal{S}_g & \text{主偏極g次元アーベル多様体の場合} \\ \Gamma_g \setminus \mathcal{T}_g & \text{種数gの代数曲線の場合} \end{cases}$$

と置く. すると、$\pi : \mathcal{X} \to R$ は自然に正則写像

$$f \in \mathrm{Hol}(R', \mathbf{M}) = \{f : R' \to \mathbf{M}; \text{正則、非定値}\}$$

と一対一に対応する. 従って問題は次の二つに帰着される：

(1) $\mathrm{Hol}(R', \mathbf{M})$ の有界性 (finite type).
(2) $f \in \mathrm{Hol}(R', \mathbf{M})$ の剛性 (rigidity).

Royden によれば $\mathcal{T}_g$ 上のタイヒミューラー距離は小林距離に一致し、$\mathcal{T}_g$ は完備双曲的ある. $\mathcal{S}_g$ は勿論完備双曲的である. 共通項として

(1) $\mathbf{M}$ は完備双曲的.
(2) (2) 自然なコンパクト化 $\bar{\mathbf{M}}$ があり、$\mathbf{M} \subset \bar{\mathbf{M}}$ は双曲的埋込.

定理 (Nog., 1988). (1) 一般的に $\bar{M}, \bar{N}$ をコンパクト複素多様体、$M \subset \bar{M}, N \subset \bar{N}$ をそれぞれ Zariski 開部分集合とする. M が完備双曲的で、$M \subset \bar{M}$ が双曲的埋込ならば、$\mathrm{Hol}(N, M)$ は、コンパクト複素空間の Zariski 開部分集合の構造をもつ（有界性）.

(2)（コンパクトの場合は、砂田、1979）$M = \Gamma \setminus \mathbf{D}$ 有界対象領域の商多様体とすると、$\mathrm{Hol}(N, M)$ は非特異で、その各成分 Z も有界対象領域の商多様体 $\Gamma' \setminus \mathbf{D}'$ の構造をもち、各 $x \in N$ における取値写像

$$f \in \Gamma' \setminus \mathbf{D}' \to f(x) \in \Gamma \setminus \mathbf{D}$$

は全測地的正則埋込写像である.

(2) の証明では調和写像の解析を用いる. 剛性は結局 $\Gamma' \setminus \mathbf{D}'$ に沿って平行ベクトル場があるかないかで決まる. 与えられた $\Gamma \setminus \mathbf{D}$ に対しどのような $\Gamma' \setminus \mathbf{D}'$ が在り得るかを斎藤政彦氏が調べている.

高次元では Lang 予想の他に次がある.

Bombieri の予想 (1980). 代数体上の一般型代数多様体 X の有理点は真代数的部分集合に含まれる.

これは関数体上でも（K_X が豊富としても）未解決である. 部分的には前原氏による前向きの結果がある. Vojta 予想から Bombieri 予想は従うが、Vojta 予想は関数体のときもモデルとした正則曲線の場合（Griffiths 予想）でも未解決である.

準アーベル多様体 A の場合も、その部分多様体の有理点及び豊富な因子の外の整数点の分布 (Faltings, 1991; Vojta, 1996) と、正則曲線 $f : \mathbf{C} \to A$ の値分布 (Bloch, 1926; Ochiai, 1975; Green, 1978; Kawamata, 1980, Nog., 1981, 1984, 1990,; Siu-Yeung, 1996; Nog., 1997) の間には完全な類比が成立している.

§2 小林予想から.

（ア）前節の議論から双曲的多様体は種々の Diophantus 性をもつことが予見されるが定義体を勝手にとったときに双曲的多様体を得る方法はあるのだろうか？それができれば色々実験も出来るはずである. この観点から次の予想を考えてみたい.

小林予想 (1970).

(1) generic な高次 ($\deg X >> 1$) 超曲面 $X = \{P = 0\} \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ は双曲的.
(2) 同様な X に対し、補集合 $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus X$ も双曲的.

注意. (2) については幾つかの進展があるが、ここの話に直接関係しないのであまり言及はしない.

Lang 予想と合わせると、つぎが出て来るが信じられますか？

系（予想）. 代数的数を係数とする generic な $\deg P >> 1$ な一本の方程式 $P = 0$ は、どんな大きな代数体上考えても解は有限個である.

小林予想に関する例を幾つか挙げよう.

Brody-Green (1977). $X^2 \subset \mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ を次で定義する.

$$X \qquad z_1^d + \cdots + z_4^d + t(z_1 z_2)^{d/2} + s(z_1 z_3)^{d/2} = 0.$$

$d = 2e \geq 50$, 一般の $t, s \in \mathbf{C}^*$ に対し双曲的.

注意. これは、次の事からも興味深い.

(1) コンパクト双曲的多様体の変形の極限はそこで変形が滑らかでも双曲的とは限らない.
(2) 双曲性は、可微分構造と無関係.

もっと簡単なものもある.

Nog. (1992).

$$X \qquad z_1^d + \cdots + z_4^d + t(z_1 z_2 z_3 z_4)^{d/4} = 0, \quad d = 4e \geq 28, \quad t \in \mathbf{C}^*.$$

は双曲的.

かかる X が双曲的であることの証明をしよう. わざわざ証明まで述べるのは、前節での成立する事実（又は予想）の類比から更にもう一歩踏み込んで、ここではその証明の方法にまで超越的な値分布、関数体の場合、代数体の場合の三者の間に強い類比が見られるからで、それを伝えたいということによる.

Brody の定理 1 により、次を示せば十分である:

Claim. 任意の正則写像 $f : \mathbf{C} \to X$ は定写像.

次を用いる.

Borel-Cartan の定理 (H. Cartan, 1933). $f_1, \ldots, f_s$ が整関数 $\not\equiv 0$ で関数方程式

$$f_1^d + \cdots + f_s^d \equiv 0, \qquad d > s(s-2)$$

を充たすとする. この時、添字集合の分割 $\{1, \ldots, s\} = \bigcup I_\alpha$ があって次が成立する.

(1) 全ての $|I_\alpha| \geqq 2$.
(2) $i, j \in I_\alpha$ に対し、$f_i / f_j \equiv$ 定数.
(3) $\sum_{j \in I_\alpha} f_j^d \equiv 0$.

これは、後出の H. Cartan の第二主要定理 (S.M.T., 1933) より容易に従う.

Brody-Green の例では、$f = (f_1, \ldots, f_4)$ とすると、

$$(f_1^2)^e + \cdots + (f_4^2)^e + t(f_1 f_2)^e + s(f_1 f_3)^e = 0, \qquad e \geqq 25.$$

どれかの $f_j \equiv 0$ となると、種数 2 以上の代数曲線 C があって、$f(\mathbf{C}) \subset C$ となり、f は定写像. どれも $f_j \not\equiv 0$ とすると、$f_5 = f_1 f_2, f_6 = f_1 f_3$, として、$s = 6$.

$$6(6-2) = 24 < 25 \leqq e$$

であるから一般化 Borel の定理が使える. 比が定数になることを $\sim$ で表す. 例えば、

$$f_1 \sim f_2^2, \quad f_3^2 \sim f_1 f_2, \quad f_4^2 \sim f_1 f_3$$

とする.

$$f_3^2 \sim f_1 f_2 \sim f_1^2 \Longrightarrow f_1 \sim f_3$$
$$f_4^2 \sim f_1 f_3 \sim f_1^2 \Longrightarrow f_4 \sim f_1$$

従って

$$f_1 \sim f_2 \sim f_3 \sim f_4, \qquad f \equiv \text{定写像}.$$

(1), (2) を充たすどんな分割 $\{1, \ldots, s\} = \bigcup I_\alpha$ に対してもこの様なことを示す.

第二主要定理 S.M.T. (H. Cartan, 1933, $l = n$; Nochka, 1983, $l =$一般). $f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ を正則曲線、その像の張る線形部分空間の次元を l とする. $H_1, \ldots, H_q$ を $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の一般の位置にある超平面とすると

$$(q - 2n + l - 1) T_f(r) \leqq \sum_{j=1}^{q} N_l(r, f^* H_j) + \text{small term}.$$

ここで記号の定義を与える. $f = (f_0, \ldots, f_n)$ を既約表現とする.

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{\sum |f_j(re^{i\theta})|^2}\, d\theta, \quad \text{位数関数},$$
$$N_l(r, f^* H) = \sum_{0<|z|<r} \min\{l, \mathrm{ord}_z H \circ f\} \log \frac{r}{|z|}, \quad l\text{-断 } (\mathit{truncated}) \text{ 個数関数},$$
$$m_f(r, H) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|H\| \cdot \|f(re^{i\theta})\|}{|H \circ f(re^{i\theta})|}\, d\theta, \quad \text{接近関数}.$$

第一主要定理 F.M.T. (H. Cartan, 1933). $T_f(r) = N_\infty(r, f^* H) + m_f(r, H) + O(1)$.

Nevanlinna 不等式. $N_\infty(r, f^* H) < T_f(r) + O(1)$.

小林予想に対するアプローチとして

$$\mathbf{Brody} + \mathbf{S.M.T.}$$

が今のところ有効である、というか、これしかない. New Idea, New Method の開発が望まれる. ともかくこのアプローチで小林予想 (2) についてはいくらかの進展があったが、(1) に関してはBrody-Green (1977) より進展がなかった.

定理 (Masuda-Nog., 1996). ある n のみに依存する数 $d(n)$ があって、任意の $d \geqq d(n)$ に対して双曲的非特異超曲面 $X \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \deg X = d$ が存在する.

注. このような X の全体は同じ次数の線形系の中で微分位相に関して開である.

この定理の証明のための鍵は次の補題である.

主補題. ある単項式の系、$M_1 = z_1^e, \ldots, M_n = z_n^e, M_{n+1}, \cdots, M_j = z_1^{\alpha_{j1}} \cdots z_n^{\alpha_{jn}}, \ldots, M_s$ $(\alpha_{j1} + \cdots \alpha_{jn} = e)$ で、

$$X \qquad\qquad a_1 M_1^d + \cdots + a_s M_s^d = 0, \qquad a_j \neq 0, \quad d > s(s-2)$$

は双曲的.

証明は、Brody-Green の例のように Borel-Cartan の定理を用いて、正則写像 $f:\mathbf{C}\to X$ は定写像しかないことを示すことにより成される.

この X を "特別双曲的超曲面" と呼ぼう. 係数の a_j はゼロでないかぎり、勝手であるから、ほぼ任意の体上定義することが出来る.

問題. 特別双曲的超曲面 X は、有理点に関する有限性をもつか？

（イ）関数体の場合.

R をコンパクトリーマン面 (コンパクトケーラー多様体でよい）. $\mathrm{K}=\mathbf{C}(R)$ をその有理関数体とする.

定理 S.M.T./f.f. (Nog., 1997). $x=(x_0,\ldots,x_n):\mathbf{C}\to\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ を正則曲線、その像を含む最少の線形部分空間の次元を l とする. $H_1,\ldots,H_q$ を $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の一般の位置にある超平面とすると

$$(q-2n+l-1)\mathrm{ht}(x)\leqq\sum_{j=1}^{q}N_l(H_j(x))+l(l+1)(g(R)-1).$$

定理 Borel-Cartan/f.f.. 係数 $a_j\in\mathrm{K}^*$ とし、点 $x=(x_j)\in\mathbf{P}^{s-1}(\mathbf{C})$ は

$$a_1x_1^d+\cdots+a_sx_s^d=0,\qquad s\geqq 2$$

を充たすとする.

(1)(Nog., 1997) $a_1x_1^d,\ldots,a_{s-1}x_{s-1}^d$ が $\mathbf{C}$ 上一次独立ならば

$$\{d-s(s-2)\}\mathrm{ht}(x)\leqq(s-1)^2\mathrm{ht}((a_j))+(s-1)(s-2)(g(R)-1).$$

(2)(Nog., 1997) $d>s(s-2)+(s-1)^2\mathrm{ht}((a_j))+(s-1)(s-2)(g(R)-1)$, $x_j\in\mathrm{K}^*$ ならば、添字集合の分割 $\{1,\ldots,s\}=\bigcup I_\alpha$ があって次が成立する.

(1) 全ての $|I_\alpha|\geqq 2$.
(2) $i,j\in I_\alpha$ に対し、$x_i/x_j\in\mathbf{C}$ (定数).
(3) $\sum_{j\in I_\alpha}a_jx_j^d\equiv 0$.

(3) Bombieri-Mueller (1991) による "Borel の定理/f.f." もある. d に関する条件は

$$d>s!(s!-2)+(s!-1)(s!-2)(g(R)-1)$$

（係数 a_j に依らないところがポイント）.

注. 関連する結果は、Bombieri-Mueller の他、W.D. Brownawell-D.M. Masser(1986), R.C. Mason (1984-1990), A. Pintér (1992), H.N. Shapiro-G.H. Sparer (1994), J.F. Voloch (1985), J. T.-Y. Wang (1996) 等がある.

定理 (Nog., 1997). X を上述の特別双曲的超曲面とする.

(1) $d>s(s-2)$ ならば、$\mathrm{ht}(x), x\in X(\mathrm{K})$, は有界: つまり、$X(\mathrm{K})$ は有限次元空間である.

(2) $d > s(s-2)+(s-1)^2\mathrm{ht}((a_j))+(s-1)(s-2)(g(R)-1)$ ならば、任意の $x = (x_0,\ldots,x_n) \in X(\mathrm{K})$ は $x_j \in \mathbf{C}$ で表現される.

(3) $d > s!(s!-2)+(s!-1)(s!-2)(g(R)-1)$ ならば、$X(\mathrm{K})$ が有限個の簡明な族から成ることが分かる.

(ウ) 代数体の場合.

Vojta 予想 (1986) があるが、Vojta は Carlson-Griffiths-King (1972, 1973) による非退化同次元写像 $f : \mathbf{C}^n \to V^n$ の Nevanlinna 理論をモデルにした. ここでは上述の H. Cartan による正則曲線の Nevanlinna 理論をモデルとし議論しよう.

以下、代数体 F 上で考えられるが、簡単のため $\mathrm{F} = \mathbf{Q}$ とする. F の付値の集合 M_{F} で積公式の成立するものを考える. いまは、$M_{\mathbf{Q}}$ は、通常の絶対値 (Archimedean place, infinite place) といわゆる p-進付値 (non-Archimedean place, finite place) からなる:

$$\mathbf{Q} \ni x = p^{\mathrm{ord}_p x}x', \quad x' \text{は } p \text{ を含まない},$$
$$\|x\|_p = p^{-\mathrm{ord}_p x},$$
$$\sum_{v \in M_{\mathbf{Q}}} \log\|x\|_v = 0 \qquad \text{積公式}.$$

さて、$x = (x_0,\ldots,x_n) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})$ に対して、その高さ $\mathrm{ht}(x)$ を次で定める:

$$\begin{aligned}\mathrm{ht}(x) &= \sum_{v \in M_{\mathrm{F}}} \log\max\{\|x_j\|_v; 0 \leqq j \leqq n\} \\ &= \sum_{v \in M_{\mathrm{F}}} \log\max\left\{1, \left\|\frac{x_j}{x_0}\right\|_v; 1 \leqq j \leqq n\right\} \\ &= \sum_{v \in M_{\mathrm{F}}} \underset{j}{\rightarrow}\max\left\{\log^+\left\|\frac{x_j}{x_0}\right\|_v\right\}.\end{aligned}$$

(全ての) アルキメデス付値を含む有限集合 $S \subset M_{\mathrm{F}}$ を取り、止める. 線形型式 $H(x) = \sum_{j=0}^n a_j x_j (a_j \in \mathbf{Q})$ に対して

$$m(H,x) = \sum_{v \in S} \log\frac{\max\{\|x_j\|_v; 0 \leqq j \leqq n\}}{\|H(x)\|_v} \quad \text{接近関数}$$
$$N(H,x) = \sum_{v \in M_{\mathbf{Q}} \setminus S} \log\frac{\max\{\|x_j\|_v; 0 \leqq j \leqq n\}}{\|H(x)\|_v} \quad \text{個数関数}$$

積公式から次は自明である.

第一主要定理 F.M.T. $\mathrm{ht}(x) = m(H,x) + N(H,x)$.

H. Cartan の l-断 (truncated) 個数関数の類比を考えたい. その為、$a_j \in \mathbf{Z}, x_j \in \mathbf{Z}$ とし

それぞれで共通因子なしとする. $\max\{\|x_j\|_v; 0 \leqq j \leqq n\} = 1, v \notin S$, となり、

$$\begin{aligned} \|H(x)\|_{v_p,l} &= p^{-\min\{l, \mathrm{ord}_p H(x)\}} \\ N_l(H,x) &= \sum_{v \in M_{\mathbf{Q}} \setminus S} \log \frac{1}{\|H(x)\|_{v,l}} \quad l\text{-断 } (truncated) \text{ 個数関数} \\ &= \sum_{v_p \in M_{\mathbf{Q}} \setminus S} \min\{l, \mathrm{ord}_p H(x)\} \log p \end{aligned}$$

次の定理は、その筋では不可欠のものである.

Schmidt の線形部分空間定理 (1970). $H_1, \ldots, H_q$ を $\mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$ 上の一般の位置にある線形型式とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対し有限個の超平面の和 $\bigcup E_\alpha$ があり、その外の $x \in \mathbf{P}^n(\mathbf{Q}) \setminus \bigcup E_\alpha$ に対し

$$(q - n - 1 - \epsilon)\mathrm{ht}(x) \leqq \sum_{j=1}^{q} N(H_j, x).$$

定義. $y \in \mathbf{Q}^*$ が S-単数であるとは

$$\mathrm{ord}_v y = 0, \qquad \forall v \notin S.$$

その全体を U_S と書く. $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})$ が S-単点とは、

$$x_j = 0\text{、又は} \quad x_j \in U_S.$$

***S*-単数 Borel の定理**. $a_j \in \mathbf{Q}^*$ とし

$$a_1 x_1 + \cdots + a_s x_s = 0$$

の S-単数解の全体を $\mathcal{S}$ とする. すると有限分割 $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}_\mu$ があって、各 $\mathcal{S}_\mu$ 毎に添字集合の分割 $\{1, \ldots, s\} = \bigcup I_\alpha$ があり次が成立する.

(1) 全ての $|I_\alpha| \geqq 2$.
(2) $\mathcal{S}_\mu = \{(x_j(\zeta)); \zeta \in \mathcal{S}_\mu\}$ と書くとき、$i, j \in I_\alpha$ に対し

$$\frac{x_i(\zeta)}{x_j(\zeta)} = c_{ij} \in U_S \quad \text{(定数)}.$$

(3) $\sum_{j \in I_\alpha} a_j x_j(\zeta) \equiv 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{S}_\mu$.

類比としては、

$$\mathcal{S}_\mu = \{(x_j(\zeta)); \zeta \in \mathcal{S}_\mu\} \quad \Longleftrightarrow \quad f : \mathbf{C} \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C}).$$

この見方による値分布のとき及び関数体のときとの類比的議論により、次が示される.

定理 (Nog., 1997). $M_1, \ldots, M_s$ を $\mathbf{P}^n$ の特別双曲的超曲面を定義する単項式系、$a_j \in \mathbf{Q}^*$ とし、

$$X \qquad a_1 M_1^d + \cdots + a_s M_s^d = 0, \qquad a_j \neq 0 \quad (d \geqq 1)$$

と定める. このとき X の S-単点全体 $X(U_S)$ は、有限集合である.

この様なことを、U_S だけでなく F について証明したい. その為には、次が分かればよい.

A.S.M.T. 予想 (A=Arithmetic). Schmidt の線形部分空間定理の評価が次のように改良される.

$$(q-n-1-\epsilon)\mathrm{ht}(x) \leqq \sum_{j=1}^{q} N_n(H_j, x).$$

A.S.M.T. は**算術的** Borel-Cartan **の定理**を従え、結局次を含む.

系 (2 x x x). $d > s(s-2)$ ならば、$|X(\mathrm{F})| < \infty$.

注. $n = 1$ のとき、A.S.M.T. 予想は、Masser-Oesterlé の "abc"-予想と同じ. "abc"-予想とは、互いに素な $a, b, c \in \mathbf{Z}$ で方程式

$$a + b + c = 0$$

を充たすものに対して、任意の $\epsilon > 0$ を取るとき

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leqq C(\epsilon)\left(\prod_{p|abc} p\right)^{1+\epsilon}.$$

§3 算術的小林疑距離.

X を複素代数多様体とする. 二点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in X$ に対し, それ等を結ぶ代数曲線による連鎖 $\{C_i; \mathrm{P}_i, \mathrm{Q}_i\}_{i=1}^{l}$,

$$C_i \subset X, \quad \mathrm{P} = \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{Q}_i = \mathrm{P}_{i+1}, \ldots, \mathrm{Q}_l = \mathrm{Q},$$

を取り、

$$\tilde{d}_X(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \inf \sum d_{C_i}(\mathrm{P}_i, \mathrm{Q}_i)$$

と置く. 定義より

$$d_X(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \leqq \tilde{d}_X(\mathrm{P}, \mathrm{Q}).$$

実は、

定理 (Demailly-Lempert-Shiffman, 1994). $d_X(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \tilde{d}_X(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$.

Demailly-Lempert-Shiffman は非特異準射影的代数多様体に対して証明しているが、実は Moisezon 複素空間の Zariski 開部分空間に対して成立することが簡単に分かる.

これは、標題の "算術的小林疑距離" なるものを考える根拠となる. つまり、上述の $X, \mathrm{P}, \mathrm{Q}, C_i, \mathrm{P}_i, \mathrm{Q}_i$ を全て代数体 F 上で定義されるもののみを用いて考え、

$$d_{X/\mathrm{F}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$$

を定義する. 曲線 C_{F} にたいして $d_{C/\mathrm{F}}(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ は埋め込み $\mathrm{F}\subset\mathbf{C}$ に関して平均値をとる. 簡単に分かることではありますが:

命題 ([Nog93'], [Nog94]). (1) 疑計量の性質の対称性と三角不等式が成立する.

(2) 体の拡大及び K-有理正則写像に関して**短縮原理**が成立する.

いまのところ、こういう物を定義して何か勝算があるわけではないが、問題はいくらでも考えられます. 例えば次はどうでしょうか?

問題. X がある埋込 $\mathrm{F}\subset\mathbf{C}$ で双曲的であるとき、$\sup\{\frac{1}{d_{X/\mathrm{F}}(\mathrm{P},\mathrm{Q})};\mathrm{P},\mathrm{Q}\in X(\mathrm{F})\}$ と $\mathrm{ht}(X)$ の関係は?

§4 特別双曲的超曲面の例.

1. R. Brody-M. Green (1977): $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ 内の超曲面

$$z_1^d+\cdots+z_4^d+t(z_1z_2)^{d/2}+s(z_1z_3)^{d/2}=0.$$

は $d\geq 50$ ならば一般の $t,s\in\mathbf{C}^*$ に対し双曲的.

2. A. Nadel (1989): $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ 内の超曲面

$$z_1^{6e}(z_1^3+tz_2^3)+z_2^{6e+3}+z_3^{6e}(z_3^3+tz_2^3)+z_4^{6e+3}=0$$

は $e\geq 3$ $(6e+3\geq 21)$ ならば、一般の $t\in\mathbf{C}^*$ に対し双曲的.

3. Nog. (1992):

$$z_1^d+\cdots+z_4^d+t(z_1z_2z_3)^{d/3}=0,\quad d=3e\geq 24,\quad \forall t\in\mathbf{C}^*.$$

$$z_1^d+\cdots+z_4^d+t(z_1z_2z_3z_4)^{d/4}=0,\quad d=4e\geq 28,\quad \forall t\in\mathbf{C}^*.$$

4. $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$ で、一般係数の

$$z_1^d+\cdots+z_5^d+t_1(z_1^2z_2)^{d/3}+t_2(z_2^2z_3)^{d/3}+t_3(z_3^2z_4)^{d/3}$$

$$+t_4(z_4^2z_1)^{d/3}=0,\quad t_j\in\mathbf{C}^*,\quad d=3e\geq 192.$$

は双曲的. 特別係数、$t_j=1, 1\leq j\leq 4$ のときは、正則曲線:

$$f(z)=(z\exp(\pi i/e),\exp(\pi i/e),z,1,0),\quad z\in\mathbf{C},$$

$e=d/3$、を持つ. しかし、例えば $(t_j)=(-1,-1,1,1)$ ならば双曲的.

5. 同様に、一般係数で、

$$z_1^d+\cdots+z_5^d+t_1(z_3z_4^2z_5)^{d/4}+t_2(z_1z_2^2z_5)^{d/4}+t_3(z_1z_2z_3^2)^{d/4}=0$$

$$t_j\in\mathbf{C}^*,\quad d=4e\geq 196.$$

$t_1 = t_2 = t_3 = 1$ では、双曲的.

6. 同様に、一般係数で、

$$z_1^d + \cdots + z_5^d + t_1(z_1^2 z_2)^{d/3} + t_2(z_2^2 z_3)^{d/3} + t_3(z_3^2 z_4)^{d/3}$$

$$+t_4(z_4^2 z_5)^{d/3} + t_5(z_5^2 z_1)^{d/3} = 0, \quad t_j \in \mathbf{C}^*, \quad d = 3e \geq 243.$$

全ての $t_j = 1$ の時、双曲的.

7. $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$ で、

$$z_1^d + \cdots + z_5^d + t_1(z_1^3 z_2)^{d/4} + t_2(z_2^3 z_3)^{d/4} + t_3(z_3^3 z_4)^{d/4}$$

$$+t_4(z_4 z_1)^{d/2} = 0, , \quad \forall t_j \in \mathbf{C}^*, \quad d = 4e \geq 256.$$

注. これらは、$\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$ でみつかった初めての例である.

8. $\mathbf{P}^5(\mathbf{C})$ で、一般係数で、

$$z_1^d + \cdots + z_6^d + t_1(z_1 z_2^3)^{d/4} + t_2(z_2 z_3^3)^{d/4} + t_3(z_3 z_4^3)^{d/4}$$

$$+t_4(z_4 z_5^3)^{d/4} + t_5(z_5 z_1^3)^{d/4} + t_6(z_1 z_3)^{d/2}$$

$$+t_7(z_2 z_4)^{d/2} + t_8(z_3 z_5)^{d/2} + t_9(z_4 z_1)^{d/2} = 0,$$

$$t_j \in \mathbf{C}^*, \quad d = 4e \geq 784.$$

$t_1 = -1$ and other $t_j = 1$ ならば、双曲的.

9. 同様に、一般係数で、

$$z_1^d + \cdots + z_6^d$$

$$+t_1(z_1 z_2^4)^{d/5} + t_2(z_2^2 z_3^3)^{d/5} + t_3(z_3^2 z_4^3)^{d/5} + t_4(z_4 z_5^4)^{d/5} + t_5(z_5^3 z_1^2)^{d/5}$$

$$+t_6(z_1^4 z_3)^{d/5} + t_7(z_2 z_4^4)^{d/5} + t_8(z_3^3 z_5^2)^{d/5} = 0,$$

$$t_j \in \mathbf{C}^*, \quad d = 5e \geq 845.$$

全ての $t_j = 1$ ならば、双曲的.

10. $\mathbf{P}^5(\mathbf{C})$ で、一般係数で、

$$z_1^d + \cdots + z_6^d + t_1(z_1 z_2^3)^{d/4} + t_2(z_2 z_3^3)^{d/4} + t_3(z_3 z_4^3)^{d/4}$$

$$+t_4(z_4 z_5^3)^{d/4} + t_5(z_5 z_1^3)^{d/4} + t_6(z_1 z_3)^{d/2} + t_7(z_2 z_4)^{d/2}$$

$$+t_8(z_3 z_5)^{d/2} + t_9(z_1 z_4)^{d/2} + t_{10}(z_2 z_5)^{d/2} = 0,$$

$$t_j \in \mathbf{C}^*, \quad d = 4e \geq 900.$$

$t_1 = -1$ 他の $t_j = 1$ の時、双曲的.

11. $\mathbf{P}^5(\mathbf{C})$ で、一般係数で、

$$z_1^d + \cdots + z_6^d$$

$$+t_1(z_1z_2^5)^{d/6}+t_2(z_2z_3^5)^{d/6}+t_3(z_3z_4^5)^{d/6}+t_4(z_4z_5^2)^{d/3}+t_5(z_5z_1^2)^{d/3}$$
$$+t_6(z_1z_3)^{d/2}+t_7(z_2z_4)^{d/2}+t_8(z_3z_5)^{d/2}=0,$$
$$t_j\in\mathbf{C}^*,\quad d=6e\geq 1014.$$

全ての $t_j=1$ の時、双曲的..

12. $\mathbf{P}^5(\mathbf{C})$ で、

$$z_1^d+\cdots+z_6^d+t_1(z_1z_2^4)^{d/5}+t_2(z_2z_3^4)^{d/5}+t_3(z_3z_4^4)^{d/5}$$
$$+t_4(z_4z_5^4)^{d/5}+t_5(z_5z_1^4)^{d/5}$$
$$+t_6(z_1^2z_3^3)^{d/5}+t_7(z_2^2z_4^3)^{d/5}+t_8(z_3^2z_5^3)^{d/5}$$
$$+t_9(z_4^2z_1^3)^{d/5}+t_{10}(z_5^2z_2^3)^{d/5}=0,$$
$$\forall t_j\in\mathbf{C}^*,\quad d=5e\geq 1125.$$

13. (Sarnak-Wang, 1995). 例 12 で、$d=1130$ と取り、

$$z_1^{1130}+\cdots+z_6^{1130}-15(z_1z_2^4)^{226}+(z_2z_3^4)^{226}+(z_3z_4^4)^{226}$$
$$+(z_4z_5^4)^{226}+(z_5z_1^4)^{226}$$
$$+(z_1^2z_3^3)^{226}+(z_2^2z_4^3)^{226}+(z_3^2z_5^3)^{226}$$
$$+(z_4^2z_1^3)^{226}+(z_5^2z_2^3)^{226}=0.$$

と置くと、この X は $\mathbf{Q}$ 上定義され、非特異 (Maple) で双曲的である. これに対し、$X(\mathbf{R})$ と 任意の素数 p に対し $X(\mathbf{Q}_p)$ は共に無限集合である.

References

[AS90] Y. Adachi and Masakazu Suzuki, On the family of holomorphic mappings into projective space with lacunary hypersurfaces, J. Math. Kyoto Univ. **30**, (1990), 451-459 (1990)

[AS91] —— and ——, Degeneracy points of the Kobayashi pseudodistances on complex manifolds, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 2, **52** pp. 41-51, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991

[AN91] Y. Aihara and J. Noguchi, Value distribution of meromorphic mappings into compactified locally symmetric spaces, Kodai Math. J. (1991), **14** 320-334.

[Ax72] J. Ax, Some topics in differential algebraic geometry II, Amer. J. Math. **94** (1972), 1205-1213.

[AzS80] K. Azukawa and Masaaki Suzuki, Some examples of algebraic degeneracy and hyperbolic manifolds, Rocky Mountain J. Math. **10**, 655-659 (1980)

[B26] A. Bloch, Sur les systèmes de fonctions uniformes satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique dont l'irrégularité dépasse la dimension, J. Math. Pures Appl. **5** (1926), 9-66

[BM91] E. Bombieri and J. Mueller, The generalized Fermat equation in function fields, J. Number Theory **39** (1991), 339-350.

[BrM86] W.D. Brownawell and D.M. Masser, Vanishing sums in function fields, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **100** (1986), 427-434.

[C33] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, Mathematica **7** (1933), 5-31.

[Ch90] W. Chen, Defect relations for degenerate meromorphic maps, Trans. Amer. Math. Soc. **319** (1990), 499-515.

[D96] J.-P. Demailly, Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials, preprint, 1996.

[DLS94] J.-P. Demailly, L. Lempert and B. Shiffman, Algebraic appoximations of holomorphic maps from Stein domains to projective manifolds, Duke Math. J. **76** (1994), 333-363.

[DeL96] G. Dethloff and S. Lu, Metric proof of Lang's conjecture, a seminar talk at MSRI, UC, Berkeley, 1996.

[F91] G. Faltings, Diophantine approximation on Abelian varieties, Ann. Math. **133** (1991), 549-576.

[Fu93] H. Fujimoto, Value Distribution Theory of the Gauss Map of Minimal Surfaces in $\mathbf{R}^m$, Aspect Math. **E21**, Vieweg, Braunschweig, 1993.

[G75] M. Green, Some examples and counter-examples in value distribution theory for several complex variables, Compositio Math. **30** (1975), 317-322.

[G78] M. Green, Holomorphic maps to complex tori, Amer. J. Math. **100** (1978), 615-620.

[GG80] M. Green and P. Griffiths, Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings, The Chern Symposium 1979, pp. 41-74, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1980.

[Gr72] P. Griffiths, Holomorphic mappings: Survey of some results and discussion of open problems, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 374-382.

[Gy93] K. Györy, On the numbers of families of solutions of systems of decomposable form equations, Publ. Math. Debrecen **42** (1993), 65-101.

[H64] W.K. Hayman, Meromorphic Functions, Oxford Univ. Press, London, 1964.

[I83] Y. Imayoshi, Generalization of de Franchis theorem, Duke Math. J. **50** (1983), 393-408.

[I85] Y. Imayoshi, Holomorphic maps of compact Riemann surfaces into 2-dimensional compact C-hyperbolic manifolds, Math. Ann. **270** (1985), 403-416.

[I94] Y. Imayoshi, Holomorphic maps of projective algebraic manifolds into compact C-hyperbolic manifolds, J. Math. Soc. Japan **46** (1994), 289-307.

[IS88] Y. Imayoshi and H. Shiga, A finiteness theorem for holomorphic families of Riemann surfaces, In: D. Drasin (ed.) Holomorphic Functions and Moduli vol. II, Springer, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo, 1988.

[K80] Y. Kawamata, On Bloch's conjecture, Invent. Math. **57** (1980), 97-100.

[KT95] H. H. Khoai and M. V. Tu, p-adic Nevanlinna-Cartan theorem, Internat. J. Math. **6** (1995), 719-731.

[Ki94] K. Kitayama, Algebraic approximations of Kobayashi pseudodistances on complex algebraic varieties, Master Thesis at Tokyo Institute of Technology, 1994.

[Ko67] S. Kobayashi Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 460-480.

[Ko67'] S. Kobayashi Distance, holomorphic mappings and Schwarz lemma, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 481-485.

[Ko70] S. Kobayashi, Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Marcel Dekker, New York, 1970.

[Ko76] S. Kobayashi, Intrinsic distances, measures, and geometric function theory, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 357-416.

[KO75] S. Kobayashi and T. Ochiai, Meromorphic mappings onto compact complex spaces of general type, Invent. Math. **31** (1975), 7-16.

[KMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori, Rationally connected varieties, J. Alg. Geometry **1** (1992), 429-448.

[L74] S. Lang, Higher dimensional Diophantine problems, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 779-787.

[L86] S. Lang, Hyperbolic and Diophantine analysis, Bull. Amer. Math. Soc. **14** (1986), 159-205.

[L87] S. Lang, Introduction to Complex Hyperbolic Spaces, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1987.

[L91] ——, Number Theory III, Encycl. Math. Sci. vol. **60**, Springer-Verlag, Berlin-Heidel-berg-New York-London-Paris-Tokyo-Hong Kong-Barcelona, 1991.

[La84] M. Laurent, Equations diophantinnes exponentielles, Invent. Math. **78** (1984), 299-327.

[Lu91] S. S.-Y. Lu, On meromorphic maps into varieties of log-general type, Proc. Symposia in Pure Math. **52** (1991), Part 2, 305-333.

[LuY90] S. S.-Y. Lu and S.-T. Yau, Holomorphic curves in surfaces of general type, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **87** (1990), 80-82.

[M33] K. Mahler, Zur Approximation algebraischer Zahlen. I. (Über den größten Primteiler binärer Formen.), Math. Ann. **107** (1933), 691-730.

[Ma84] R.C. Mason, Diophantine Equations over Function Fields, London Math. Soc. Lecture Notes vol. **96**, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[Ma86] ——, Norm form equations. I, J. Number Theory **22** (1986), 190-207.

[MN96] K. Masuda and J. Noguchi, A construction of hyperbolic hypersurfaces of $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, Math. Ann. **304** (1996), 339-362.

[MiN91] T. Miyano and J. Noguchi, Moduli spaces of harmonic and holomorphic mappings and Diophantine geometry, Prospects in Complex Geometry, Proc. 25th Taniguchi International Symp., Katata/Kyoto, 1989, Lecture Notes in Math. **1468**, pp. 227-253, Springer-Verlag, Heidelberg-Tokyo, 1991.

[Mu90] J. Mueller, Binomial Thue's equation over function fields, Compo. Math. **73** (1990), 189-197.

[N89] A. Nadel, Hyperbolic surfaces in $\mathbf{P}^3$, Duke Math. J. **58** (1989), 749-771.

[Na93] H. Nakamura, Galois rigidity of algebraic mappings into some hyperbolic varieties, Intern. J. Math. **4** (1993), 421-438.

[No83] E.I. Nochka, On the theory of meromorphic functions, Sov. Math. Dokl. **27** (1983), 377-381.

[Nog77] J. Noguchi, Meromorphic mappings into a compact complex space, Hiroshima Math. J. **7** (1977), 411-425.

[Nog77'] J. Noguchi, Holomorphic curves in algebraic varieties, Hiroshima Math. J. **7** (1977), 833-853.

[Nog78] J. Noguchi, Open Problems in Geometric Function Theory, Proc. of Conf. on Geometric Function Theory, p.p. 6-9, Katata, 1978.

[Nog80] J. Noguchi, Supplement to “Holomorphic curves in algebraic varieties”, Hiroshima Math. J. (1980) **10**, 229-231.

[Nog81] J. Noguchi, Lemma on logarithmic derivatives and holomorphic curves in algebraic varieties, Nagoya Math. J. **83** (1981), 213-233.

[Nog81] J. Noguchi, A higher dimensional analogue of Mordell's conjecture over function fields, Math. Ann. **258** (1981), 207-212.

[Nog84] J. Noguchi, A higher dimensional analogue of Mordell's conjecture over function fields and related problems, Several Complex Variables, Proc. 1981 Hangzhou Conference, pp. 237-244, Birkh:auser, Boston-Basel-Stuttgart, 1984.

[Nog85] ——, Hyperbolic fibre spaces and Mordell's conjecture over function fields, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **21** (1985), 27-46.

[Nog85'] J. Noguchi, On the value distribution of meromorphic mappings of covering spaces over $\mathbf{C}^m$ into algebraic varieties, J. Math. Soc. Japan (1985) **37**, 295-313.

[Nog86] J. Noguchi, Logarithmic jet spaces and extensions of de Franchis' theorem, Contributions to Several Complex Variables, Aspects Math. p.p 227-249, **E9**, Vieweg, Braunschweig, 1986.

[Nog88] J. Noguchi, Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and locally symmetric spaces, Invent. Math. **93** (1988), 15-34.

[Nog91] ——, Hyperbolic manifolds and Diophantine geometry, Sugaku Expositions **4** (1991), pp. 63-81, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.

[Nog91'] ——, Moduli space of Abelian varieties with level structure over function fields, International J. Math. **2** (1991), 183-194.

[Nog92] ——, Meromorphic mappings into compact hyperbolic complex spaces and geometric Diophantine problem, Internat. J. Math. **3** (1992), 277-289.

[Nog93] ——, An example of a hyperbolic fiber space without hyperbolic embedding into compactification, Proc. Osaka International Conference, Osaka 1990, Complex Geometry (G. Komatsu and Y. Sakane, eds.) Lecture Notes in Pure and Appl. Math. vol. **143**, pp. 157-160, Marcel Dekker, New York-Basel-Hong Kong, 1993.

[Nog93'] J. Noguchi, Some problems in value distribution, and hyperbolic manifolds, to appear in Proc. International Symposium, Holomorphic Mappings, Diophantine Geometry and Related Topics in Honor of Professor Shoshichi Kobayashi on his 60th Birthday at R.I.M.S., Kyoto University, October 26 - October 30, 1992, Surikaisekikenkyujokokyuroku Vol. **819**, pp. 66-79, Research Institute of Mathematics Sciences, Kyoto University, 1993.

[Nog94] ——, Some topics in Nevanlinna theory, hyperbolic manifolds and Diophantine geometry, Geometry and Analysis on Complex Manifold, Festschrift for S. Kobayashi 60th Birthday, pp. 140–156, World Scientific, Singapore, 1994.

[Nog96] J. Noguchi, On Nevanlinna's second main theorem, Geometric Complex Analysis, Proc. the Third International Research Institute, Math. Soc. Japan, Hayama, 1995, pp. 489–503, World Scientific, Singapore, 1996.

[Nog96'] J. Noguchi, Value distribution theory over function fields and a Diophantine equation, Analytic Number Theory 1994 (Ed. Y. Motohashi), Surikaisekikenkyujokokyuroku Vol. **958**, pp. 33-42, Research Institute of Mathematics Sciences, Kyoto University, 1996.

[Nog97] J. Noguchi, Nevanlinna-Cartan theory over function fields and a Diophantine equation, J. reine angew. Math. **487** (1997), 61-83.

[Nog97'] J. Noguchi, On holomorphic curves in semi-Abelian varieties (preprint, 1996), to appear in Math. Z.

[NO90] J. Noguchi and T. Ochiai, Geometric Function Theory in Several Complex Variables, Transl. Mono. **80**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1990.

[NS82] J. Noguchi and T. Sunada, Finiteness of the family of rational and meromorphic mappings into algebraic varieties, Amer. J. Math. **104** (1982), 887-900.

[O77] T. Ochiai, On holomorphic curves in algebraic varieties with ample irregularity, Invent. Math. **43** (1977), 83-96.

[P92] Á. Pintér, Exponential diophantine equations over function fields, Publ. Math. Debrecen **41** (1992), 89-98.

[R83] M. Raynaud, Around the Mordell conjecture for function fields and a conjecture of S. Lang, Algebraic Geometry (M. Raynaud and T. Shioda, eds.), Lecture Notes in Math. vol. 1016, pp. 1-19, Springer, Berlin-New York, 1983.

[RW91] M. Ru and P.-M. Wong, Integral points of $\mathbf{P}^n - (2n+1)$ hyperplanes in general position, Invent. Math. **106** (1991), 195-216.

[SW95] P. Sarnak and L. Wang, Some hypersurfaces in $\mathbf{P}^4$ and the Hasse-principle, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **321** (1995), 319-322.

[Sc77] H.P. Schlickewei, The $\mathfrak{p}$-adic Thue-Siegel-Roth-Schmidt Theorem, Archiv Math. **29** (1977), 267-270.

[Sch80] W. Schmidt, Diophantine Approximation, Lecture Notes in Math. vol. **785**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[Sch91] W. Schmidt, Diophantine Approximations and Diophantine Equations, Lecture Notes in Math. vol. **1467**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[ShS94] H.N. Shapiro and G.H. Sparer, Extension of a theorem of Mason, Comm. Pure and Appl. Math. **XLVII** (1994), 711-718.

[Si82] J.H. Silverman, The Catalan equation over function fields, Trans. Amer. Math. Soc. **273** (1982), 201-205.

[Siu87] Y.-T. Siu, Defect relations for holomorphic maps between spaces of different dimensions, Duke Math. J. **55** (1987), 213-251.

[SiuY96] Y.-T. Siu and S.-K. Yeung, A generalized Bloch's theorem and the hyperbolicity of the complement of an ample divisor in an Abelian variety, Math. Ann. **306** (1996), 743-758.

[Su79] T. Sunada, Rigidity of certain harmonic mappings, Invent. Math. **51** (1979), 297-307.

[Suz94] M. Suzuki, Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically embedded complex spaces and holomorphic fibre spaces, J. Math. Soc. Japan **46** (1996), 681-698.

[Suz95] ——, Mordell property of hyperbolic fiber spaces with noncompact fibers, Tôhoku J. Math. **1995** (1995), 601-611.

[V87] P. Vojta, Diophantine Approximations and Value Distribution Theory, Lecture Notes in Math. vol. **1239**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.

[V96] P. Vojta, Integral points on subvarieties of semiabelian varieties, I, Invent. Math. **126** (1996), 133-181; II, preprint, 1995.

[Vo85] J.F. Voloch, Diagonal equations over function fields, Bol. Soc. Brasil. Math. **16** (1985), 29-39.

[W94] J. T.-Y. Wang, Diophantine equations over function fields, Thesis, Notre Dame, 1994.

[W96] ——, The truncated second main theorem of function fields, J. Number Th. **58** (1996), 139-157.

[W96'] ——, Effective Roth theorem of function fields, Rocky Mountain J. Math. **26** (1996), 1225-1234.

[W96"] ——, S-integral points of $\mathbf{P}^n - \{2n+1$ hyperplanes in general position$\}$ over number fields and function fields, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3379-3389.

[Z89] M.G. Zaidenberg, Stability of hyperbolic imbeddedness and construction of examples, Math. USSR Sbornik **63** (1989), 351-361.

[Z90] M.G. Zaidenberg, A function-field analog of the Mordell conjecture: a noncompact version, Math. USSR Izvestiya **35** (1990), 61-81.

[ZL89] M.G. Zaidenberg and V.Ya. Lin, Finiteness theorems for holomorphic maps, Several Complex Variables III, Encyclopeadia of Math. Scie. **9**, pp. 113-172, Berlin-Heidelberg-New York 1989.