21世紀 複素解析入門

A.L. コーシー ～ 岡潔

相原義弘・野口潤次郎

2023年1月30日

21世紀 複素解析入門

コーシー ～ 岡潔

21C. Introduction to Complex Analysis

— from A.L. Cauchy to K. Oka —

まえがき

複素解析あるいは関 (函) 数論については既にかなりの数の書籍が出版されている．その中で本書の特徴を標語的に一言でいえば “コーシーから岡潔まで” であろう．大学初年次に学習する微積分学においては，一変数の理論の後に多変数の関数の偏微分や重積分を扱う．21 世紀に入り現在の数学の進展状況から，複素関数論においても微積分学の場合と同様に，一変数の理論の後に多変数の基礎理論を学習しておくことが必要となってきた．そのようなわけで，本書は数学コースの学生諸君だけではなく，ひろく理工学の分野の学習者を対象として書かれたものである．

複素関数論あるいは複素解析の基礎部分は，理工学分野の基礎として広く学ばれてきた．多くの場合，複素数，コーシーの積分定理，留数定理の後，リーマンの写像定理等を経て，名前で言えばワイエルシュトラース，ミッターク・レッフラー，ピカールなどで終わるのがこれまでの内容であったと思う．少し進んだ内容としてリーマン面に触れる場合もあるかもしれない．これ等は，年代的に言えば 19 世紀末までに得られていた内容である．複素解析は，20 世紀に入り大きな進展をした．特に多変数解析関数論，あるいは多変数複素解析学と呼ばれる分野で岡潔の研究成果を中心に長足の進歩をした．その基礎部分は，岡による連接定理によると言って過言ではない．

さて数学のなかで複素解析関数の理論が，上述のような展開になった歴史的経緯を一瞥しておくことは有意義なことであろう．一般複素解析関数の理論は，1880 年の論文で E. ピカールが証明した，本書では第 5 章で証明する，ピカールの定理に端を発するといわれる (小松 [11] §37)．もちろんこれは，A.L. コーシー (1789–1857)，B. リーマン (1826–1866)，K. ワイエルシュトラース (1815–1897) 等に代表される解析関数論創成期の仕事に基づいてのことであることは，言を俟たない．

一般関数論と対比する言葉として特殊関数論がある．ピカールの定理は，対象は一般解析関数であるが，その証明はエルミートによるある楕円モジュラー関数と呼ばれる特殊関数を用いるものであった．この定理に対して，E. ボレルは，1897 年の

論文で特殊関数によらず，関数の解析性のみに基づく証明を与えた．これにより関数の解析性のみを仮定してどれだけの理論展開が可能かを追求するのが，解析関数論の理論発展の流れとなった．岡潔による 3 大問題の解決 (1936～'53) や 20 世紀複素解析学の最大の発見と言われる連接定理 (1948～'51) も関数の解析性のみに基づくもので，この一般複素解析関数論の範疇に入る (例えば，一松 [24]，西野 [17]，野口 [19]，[21] 等参照)．

変数の数が 2 以上になることにより，新たに認識されるのが "凸性" の問題である．実変数の微積分学で，一変数では定義域の凸性は意識されない．2 変数以上になって初めて凸性が意味をもち，これがさらに発展していわゆる凸解析になる．複素関数においても一変数では解析性からくる凸性は自明で意識されない．しかし，2 変数以上になるとこれが非自明な大きな問題になる．この事象の全体像を明らかにしたのが岡理論といえる．

多変数解析関数に関する基本的な問題の解決は 20 世紀中葉に岡潔 (論文シリーズ Oka I, 1936 ～ IX, 1953) により成され，導入された新概念である "連接層" の理論として結実した．その展開の中で複素解析の新しい指導原理となった "岡原理" の発見もなされた．この分野の基礎的な入門書として，前世紀に数学の表現形式を変えるまでに影響した岡理論の基礎部分は，取り込まれるべきであると考える．本書では，この辺りまでの成果を岡の 3 連接定理の中で最も基礎となる "第 1 連接定理" にもとづき，数学の基礎理論として紹介する．"連接層" という概念を導入するのであるが，その中でイデアル構造をもつものが重要であり，岡潔自身はこれを "不定域イデアル" (*idéal de domaines indéterminés*) と呼んだ．岡理論には，その先に擬凸領域の理論があるが，入門書としては内容が高度になるので割愛した (例えば，[17]，[19]，[21] など)．

純粋数学だけでなく，広く理工学の分野においても一変数・多変数の複素解析学，高次元複素多様体上の解析学が用いられる．電磁気学における留数定理や流体力学における等角写像の応用 (今井功 [1] など参照) は古典的である．新しくは，理論物理学における場の量子論を初めとして (超) 弦理論など多くの先端分野で '連接層' の理論が使われる ([27] や五神東大総長告辞，2021 年 9 月など参照)．また情報理論においては，補間問題が古くから使われている．例えば，信号論の歴史的サーベイをしている Butzer–Ferreira–Higgins–Saitoh–Schmeisser–Stens [25] を見ると，その序文にサンプリング関数として次の式が書かれている．

$$F(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \frac{(-1)^n}{z-n} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \frac{\sin \pi (z-n)}{\pi (z-n)}. \tag{1}$$

数 a_n ($n \in \mathbf{Z}$) (情報) は，上式が収束するように与えられた数列である．すると，$F(n) = a_n$ となる．つまり，点 $n \in \mathbf{Z}$ で与えられた数 a_n を値としてとる正則関数が構成されている．$\sin \pi z$ の無限積表示を用いると (1) は次のように表される．

$$
(2) \qquad F(z) = \left(z \prod_{n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \right) \cdot \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \frac{(-1)^n}{z-n} \right).
$$

この式右辺の初めの括弧内は，ワイエルシュトラース積と呼ばれ，与えられた点 (今の場合は，$n \in \mathbf{Z}$) で与えられた位数 (今の場合は，1) の零点をもつ正則関数を表す (本書 §§2.6.1, 8.4.4)．二番目の括弧内は与えられた点 ($n \in \mathbf{Z}$) で与えられた位数の極 ($a_n(-1)^n/(z-n)$) をもつ有理型関数を与えるミッターク・レッフラーの定理の解を表している (本書 §§3.5.2, 8.4.2)．与えられた点で与えられた値をとる関数を求めることは補間問題と呼ばれる (本書 §8.5)．補間問題は古い歴史をもち，現在でも興味深い数学の問題であるが，これが情報理論・サンプリング理論の基礎理論を与えていることが，垣間見える．さらには，現在の暗号理論に関する著書 (たとえば辻井重男他 [14]) では，楕円暗号と共に多変数暗号が論じられ,「多変数公開鍵暗号は耐量子コンピュータ公開鍵暗号の有望な候補の一つと目されている」とある．

以上のように広く理工学の分野で，複素解析学の内容として，コーシー (一変数) から岡 (多変数) までの基礎理論を理工学の基礎として学習しておくことが，それぞれの専門に入ってからの学習・研究のために有用であろうと考えられる．

以下，本書の構成の概略を述べよう．第 1 章は，理論の出発点である実数の性質 (公理) から始めて，一般次元ユークリッド空間を述べる．その後に，複素数・複素平面を与え，リーマン球面と一次変換を述べる．

第 2 章では正則関数を扱う．定義から始まり，巾級数の収束を論じ，指数関数・三角関数を定義し，円周率 π を定義する．コーシーの定理を初めとする基本的な性質を調べる．複素平面上でのワイエルシュトラース積を述べ，終わりに調和関数との関連を調べる．

第 3 章では有理型関数を論ずる．留数定理とその応用を述べる．複素平面上での有理型関数の部分分数展開を与え，ワイエルシュトラースのペー関数 (楕円関数) を論じる．最後に三角関数の無限積表示を与える．

第 4 章は，解析接続を述べ，いくつかの (分岐) リーマン領域について解説する．最後にガンマ関数とリーマンのゼータ関数の初等的性質を調べる．

第 5 章では，正則写像について論ずる．モンテルの正規族の議論の後，単連結領域を標準化するリーマンの写像定理を証明する．次に，ピカールの定理を負曲率計

量法で証明する．

第 6 章からは，多変数正則・解析関数を扱う．多変数の正則関数の定義から始め，変数の数が 2 以上になる事によって生ずる “凸性” の現れであるハルトークス現象について解説する．実関数の微積分においても，変数の数が 2 以上になると，関数の定義域の図形的考察が複雑になる．複素変数の場合は，その違いの現れ方がより顕著で困難さの増加が著しい．

第 7 章では，解析層を収束巾級数の集合として定義し，岡による連接性の概念の定義を与え，$\mathbf{C}^n$ 上の正則関数の層は連接であるという岡の第 1 連接定理を証明する．ついで，第 2 連接定理の特別な場合である非特異解析的部分集合 (複素部分多様体) のイデアル層の連接性を示す．H. カルタンによる行列分解を示し，ついで岡シジジーを示した後に岡の上空移行の原理の要である拡張定理を証明する．“岡の上空移行の原理” とは，ある多変数の領域上の問題をさらに変数の数を増やしてより高い次元の多重円板 PΔ の複素部分多様体 S として埋め込み，問題を PΔ へ拡張して，PΔ は形が簡単であるので可解となり，その解を S に制限してもとの問題の解を求めるという “方法論的原理” である．ここの展開は，野口 [21] 第 2 章と同様である．

第 8 章では，カルタン・トゥーレンによる正則領域と正則凸領域の同値性定理に始まり，多変数関数論の基礎入門部分を紹介する．前章で示した岡の上空移行の原理を適用して，岡・ヴェイユの近似定理，クザンの問題，岡原理を証明する．それぞれについて，一変数の場合のルンゲの近似定理，ミッターク・レッフラーの定理およびワイェルシュトラースの定理を導く．最後に複素部分多様体に対する多変数一般補間定理を証明する．

読者諸兄においては，数学の研究を目指すもの，或いは理工学の種々の分野を目指すもの，いずれにしても将来新しい問題にぶつかり，それをわかろう，解決しようという局面に至るであろう．そもそも問題は，それまでの一通りの理論 (概念も含めて) では解決できないから問題となる．そのとき，それまでの理論の源がどのような姿か，その成立の由縁 (証明) が何か，困難をどのように乗り越えてきたかを身につけておくことは，次のステップへの力になる．

本書を書き進めるなかで，東大月曜セミナー（複素解析幾何セミナー）のメンバーとの議論には大いに助けられた．小森洋平氏からは岡シジジー補題の証明について貴重なコメントを頂いた．また，日下部佑太氏は本書の原稿を詳細に通読し，多くの誤植の指摘や興味深いコメントを数多く提供された．ここに記して深く感謝の意を表す．

2023 年 (令和 5 年) 春 著者等記す

ことわり

(i) 定理や式の番号は区別せず統一的に現れる順に従って付けられている．ただし，式は (1.1.1) のように括弧で括られている．１番目の数字は章を表し，２番目の数字は節を表す．

(ii) 標準的な集合，写像の記法は既知のものとする．“$\forall x$” は “任意の x”，“$\exists x$” は “ある x が存在して”，あるいは “存在する x” を意味する．集合の元，写像の像，逆像などの用語も既知とする．写像 $f : X \to Y$ による $y \in Y$ の逆像を $f^{-1}y$ と略記する．

(iii) 自然数（正整数）の集合 $\mathbf{N}$，整数の集合 $\mathbf{Z}$，有理数の集合 $\mathbf{Q}$，実数の集合 $\mathbf{R}$，複素数の集合 $\mathbf{C}$，虚数単位 i 等は慣習に従って用いている．$\mathbf{Z}_+$ (または $\mathbf{R}_+$) で非負整数 (または非負実数) の集合を表す．

(iv) **単調増加**，**単調減少**という場合，等しい場合も含める．例えば，関数列 $\{\varphi_\nu(x)\}_{\nu=1}^{\infty}$ が単調増加とは，定義域内の任意の x に対し $\varphi_\nu(x) \le \varphi_{\nu+1}(x)$，$\nu = 1, 2, \ldots$ が成立することである．等号成立を除外する場合，**強義単調増加**，**強義単調減少**という．

(v) 有限集合 S に対し，その元の個数を $|S|$ で表す．

(vi) 写像 $f : X \to Y$ が，１対１のとき**単射**と呼び，像 $f(X) = Y$ であるとき**全射**と呼ぶ．単射かつ全射であることを**全単射**という．部分集合 $E \subset X$ への f の制限を $f|_E$ と記す．

(vii) $\mathbf{R}^n$ の開集合 U 上の，$k(\in \mathbf{Z}_+)$ 階連続偏微分可能関数 (複素数値) の全体を $C^k(U)$ と書く．$C^0(U)$ とは，U 上の連続関数の全体である．C^k 級とは，k 階連続偏微分可能 ($k = 0$ ならば，単に連続) であることを意味する．

(viii) 集合 S の二元 $x, y \in S$ に対し関係 “$x \sim y$” が次の条件を満たすとき，関係 “$x \sim y$”(あるいは “$\sim$”) は**同値関係**と呼ばれる：(i) $x \sim x$ (反射律): (ii) 任意の二元 $x, y \in S$ に対し $x \sim y$ ならば $y \sim x$ (対称律); (iii) 任意の三元 $x, y, z \in S$ に対し $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$ (推移律).

(ix) “$A := B$” とは，記号 A を B で定めることを意味する．

(x) **(数式の読み)** 数式は，絵や図とは異なり，記述言語の一つである．その意味で，本書では数式も言語の一つとして ‘読まれる’ ことを前提にしている．例えば,「$a = b$ ならば，$f = g$.」と書くことがある．‘読み’ としては,「エイガビーニヒトシイナラバ エフトジーハヒトシイ」となる．g が長く $g \cdots$ ならば「エイガビーニヒトシイナラバ エフ ヒトシイコトノ ジー ⋯ 」と読んでもよい．

ギリシア文字と読み [1)]

大文字	小文字	対応するローマ字	読み
A	α	a	alpha （アルファ）
B	β	b	beta （ベータ）
Γ	γ	g	gamma （ガンマ）
Δ	δ	d	delta （デルタ）
E	ϵ, ε	e	epsilon （イプシロン）
Z	ζ	z	zeta （ゼータ）
H	η	e	eta （エータ）
Θ	θ, ϑ	t	theta （シータ，テータ）
I	ι	i	iota （イオタ）
K	κ	k	kappa （カッパ）
Λ	λ	l	lambda （ラムダ）
M	μ	m	mu （ミュー）
N	ν	n	nu （ニュー）
Ξ	ξ	x	xi （グザイ）
O	o	o	omicron （オミクロン）
Π	π, ϖ	p	pi （パイ）
P	ρ	r	rho （ロー）
Σ	σ, ς	s	sigma （シグマ）
T	τ	t	tau （タウ）
Υ	υ	u	upsilon （ウプシロン）
Φ	ϕ, φ	p	phi （ファイ）
X	χ	c	chi （カイ）
Ψ	ψ	p	psi （プサイ）
Ω	ω	o	omega （オメガ）

[1)] この表は，数式もしっかり読むことが大事との考えから入れた．数式も文章の一部として読む (発声する) 習慣をつけるのは，数学の理解の道程に大切なことと考える．一度は，全部をしっかり音読しておこう．

目 次

第1章　ユークリッド空間と複素数

解析学の諸定理の証明とは，その命題文が実数の幾つかの公理 (性質) に帰着する道を示すことである．証明がわかるとは実数公理への帰着の道を自ら辿ることができることである．本章ではその実数の公理 (性質) から始める．その後，n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ を復習して，点列の収束，開集合，閉集合等の概念を述べる．関数列，関数項級数の基本を述べ，曲線のホモトピーを解説する．$n = 2$ の特別な場合として $\mathbf{R}^2$ を考え，これを複素平面（ガウス平面）として複素数を導入する．さらに無限遠点を加えてリーマン球面を定義し，一次変換を扱う．

1.1　実数

1.1.1　実数の公理

数 $1, 2, 3, \ldots$ を**自然数**と呼び，その全体を $\mathbf{N}$ と書く[1]．$\mathbf{N}$ の中では，四則演算（$+, -, \times, \div$）のうち，加法 $+$ と乗法 $\times$ が可能であり，さらに大小が定義されている．自然数 m が自然数 n より小さい（または，大きい）ことを $m < n$（または，$m > n$）と書く．$m \le n$（または，$m \ge n$）とは，m が n より小さい（または，大きい）か等しいことを意味する．

$\mathbf{N}$ に零および負の数，$0, -1, -2, \ldots,$ を加えた集合を $\mathbf{Z}$ と書き，元 $a \in \mathbf{Z}$ を**整数**と呼ぶ．集合の包含関係 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ が成り立ち，$\mathbf{Z}$ では大小関係があり，加減 $+, -$ と乗法 $\times$ が可能となる．非負整数の全体を $\mathbf{Z}_+ = \{a \in \mathbf{Z} : a \ge 0\}$ と書く．

$\mathbf{Z}$ に，分数 $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbf{Z}, q \ne 0)$ を加えた全体を $\mathbf{Q}$ と書き，その元を**有理数**と呼ぶ．$\mathbf{Q}$ で初めて四則演算が可能となる (このことを $\mathbf{Q}$ は**体**をなすという)．$\mathbf{Q}$ では大小 $a < b$ も定義され，正 $\frac{p}{q} > 0$，負 $\frac{p}{q} < 0$ が定義されている．

---

[1] 零 “0” は，自然数に含めない．歴史的に「0 の発見」（AD 7 世紀，インド）は，自然数の文字としての初出（BC 40 世紀初頭，シュメール）からするとだいぶ後年のことである．

しかしながら，$\sqrt{2}, \sqrt{3}$ などが有理数ではないことはギリシャの昔から知られていて，解析学で主役となる極限操作（以後順次述べられる）を考えるためには数の体系をさらに拡張する必要が生ずる．直感的には両側へ無限にのびる直線 l を考え，その上に一点 0 と長さの単位を与える点 1（0 と相異なる点）を決める．そのとき，l 上の任意の点 a に対し 0 からの距離を正負を込みで考えたものを実数と呼び，その全体を $\mathbf{R}$ と書く．このように考えた l を**実直線**とも呼ぶ．$\mathbf{R}$ は体を成し，大小 “$>, <$”

l:

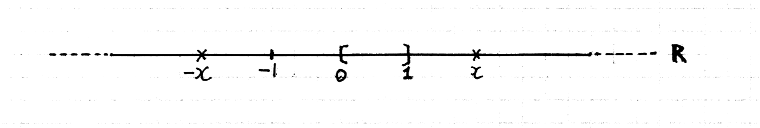

図 1.1: 単位線分・実直線

や “$\geq, \leq$” の関係をもつ．本書では，実数の構成的定義は他書に譲り[2]，その満たすべき基本的な公理を認める所から出発することとする．

実数の部分集合 $E \subset \mathbf{R}$ に対して実数 α が

$$x \leq \alpha \quad (\text{または}, \ x \geq \alpha), \quad \forall x \in E$$

を満たすとき，α を E の**上界** (または，**下界**) という．上界（または，下界）は存在するとは限らない．上界 (または，下界) が存在するとき，E は**上に有界** (または，**下に有界**) という．E が上にも下にも有界であるとき，単に**有界**という．E の上界 (または，下界) が存在してそれが E の元であるときそれを E の**最大元** ($\max E$ と書く) (または，**最小元** ($\min E$ と書く)) と呼ぶ.

命題 1.1.1　E の最大元 (または，最小元) は存在すれば，一意的である．特に，E が有限集合ならば最大元，最小元が存在する．

証明　$a, a' \in E$ を共に E の最大元であるとする．定義により，$a \leq a'$ かつ $a' \leq a$ が成立する．したがって，$a = a'$．最小元についても同様である．後半は，読者に任す.　$\square$

実数 $a \in \mathbf{R}$ に対してその**絶対値**を

$$|a| = \max\{a, -a\} \ (\geq 0)$$

[2] 例えば斎藤正彦，数学の基礎，東京大学出版会, 第 2 章を参照.

と定める．次の三角不等式が簡単に確かめられる：

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

E の上界 (または，下界) の成す集合に最小元 (または，最大元) があるとき，それを

$$\sup E \quad (\text{または，} \inf E)$$

で表し，E の**上限** (または，**下限**) と呼ぶ.

これ等は，存在すれば命題 1.1.1 により，一意的である．我々は次の公理を仮定する．

公理 1.1.2 (実数の連続性，ワイエルシュトラース) 上に有界な (または，下に有界な) 非空集合 $E \subset \mathbf{R}$ には，必ず上限 $\sup E$ (または，下限 $\inf E$) が存在する．

注意 1.1.3 $\sup E = -\inf\{-x; x \in E\}$ が成立するので，公理としてはどちらか一方の場合 (例えば，上に有界として上限の存在) を仮定すれば，十分である．

$E = \emptyset$ に対しては，便宜上

$$\sup E = -\infty, \quad \inf E = \infty \tag{1.1.4}$$

とおく．非空集合 $E \subset \mathbf{R}$ が上に非有界ならば，$\sup E = \infty$，下に非有界ならば $\inf E = -\infty$ と書くことにする．以上の定義により $\inf E, \sup E$ は常に存在し，$E \neq \emptyset$ ならば

$$-\infty \leq \inf E \leq \sup E \leq \infty$$

が成立する．

ワイエルシュトラースの公理から次の性質が導かれる．

定理 1.1.5 (アルキメデス原理) 任意の正の実数 a に対して

$$a < n$$

を満たす自然数 $n \in \mathbf{N}$ が存在する．

証明　結論を否定すると $\mathbf{N}$ は a を上界とするので，上に有界な集合となる．公理 1.1.2 から $\mathbf{N}$ に上限 γ が存在することになる．上限の定義から

$$\gamma - 1 < n, \qquad \exists n \in \mathbf{N}.$$

よって $\gamma < n + 1 \in \mathbf{N}$．これは上限の定義に反する． □

系 1.1.6 任意の正の実数 a に対し，$\{m \in \mathbf{Z} : |m| \leq a\}$ は有限集合である．

証明　定理 1.1.5 より $n \in \mathbf{N}$ で $a < n$ である元がある．$\{m \in \mathbf{Z} : |m| \leq a\}$ は，有限集合 $\{-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}$ の部分集合であるから有限集合である．　□

定理 1.1.7 (有理数の稠密性) 任意の $x < y$ を満たす実数 x, y に対し $x < r < y$ を満たす有理数 r が存在する．

証明　定理 1.1.5 により自然数 $n \in \mathbf{N}$ で

$$\frac{1}{y-x} < n$$

を満たすものがある．系 1.1.6 と命題 1.1.1 より，$x > 0$ の場合には $m \in \mathbf{Z}$ で $m \leq nx + 1$ を満たす最大の元を表し，$x \leq 0$ の場合には $nx < m$ を満たす最小の $m \in \mathbf{Z}$ を表すことにする．いずれの場合でも次が成立する．

$$\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}.$$

すると，

$$x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y.$$

$r = \frac{m}{n}$ ととればよい．　□

定義 1.1.8 (区間) 二つの実数 $a < b$ に対し，$\mathbf{R}$ の部分集合 $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$ とおき，これを**閉区間**と呼ぶ．a, b を $[a, b]$ の端点と呼ぶ．$[a, b]$ から両端点を除いた，$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ を**開区間**と呼ぶ．$(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}$，$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} : x < b\}$，$[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}$，$(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$ 等も考え，これ等を無限 (閉，開) 区間と呼ぶ．これに比して，$[a, b], (a, b)$ 等を**有界 (閉，開) 区間**と呼ぶことがある．$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$，$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$ 等を**半開区間**と呼ぶ．

1.1.2　数列の極限

自然数 $n = 1, 2, \ldots$ に対し，実数 $a_1, a_2, \ldots$ が対応しているとき，これを $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ で表し，**実数列**と呼ぶ．また，これを $\{a_n\}$ と略記することがある．しばらく，実数列しか扱わないので単に**数列**と呼ぶことにする．

定義 1.1.9 (数列の収束) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が $\alpha\in\mathbf{R}$ に収束するとは，任意に与えられた正の数 $\varepsilon>0$ に対して自然数 $N\in\mathbf{N}$ が存在して

$$|a_n-\alpha|<\varepsilon,\qquad \forall\, n\geq N \tag{1.1.10}$$

が成立することである．このとき

$$a_n\to\alpha\quad(n\to\infty),$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\quad \text{あるいは,}\quad \lim\nolimits_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim a_n=\alpha$$

等と表すことにする．α を数列 $\{a_n\}$ の**極限**と呼ぶ.

数列が収束しないとき，その数列は**発散**するという.

特に，0 に収束する数列を**零列**と呼ぶ.

命題 1.1.11 (i) 数列 $\{a_n\}$ が収束し極限 α をもつことと，$\{a_n-\alpha\}$ が零列であることは，同値である.

(ii) $\{a_n\}$ を零列とし，$c\in\mathbf{R}$ を定数とすると，$\{ca_n\}$ も零列である.

証明 (i) 定義より容易に確かめられる.

(ii) $c=0$ ならば自明であるので，$c\neq 0$ とする．任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $N\in\mathbf{N}$ があって

$$|a_n|<\frac{\varepsilon}{|c|},\qquad \forall\, n\geq N.$$

したがって，

$$|ca_n|<\varepsilon,\qquad \forall\, n\geq N.$$

これは，$\{ca_n\}$ が零列であることを示している． □

命題 1.1.12 (i) $\{a_n\},\{b_n\}$ を収束する数列とする．任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して $a_n\leq b_n$ (または，$a_n\geq b_n$) が成立するならば，$\lim a_n\leq\lim b_n$ (または，$\lim a_n\geq\lim b_n$)．特に $b_n=b$ (定数) ならば，$\lim a_n\leq b$ (または，$a_n=a$ (定数) ならば，$\lim b_n\geq a$).

(ii) (挟み撃ち) 三つの数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ が

$$a_n\leq c_n\leq b_n,\qquad \forall\, n\in\mathbf{N}$$

を満たしているとする．もし $\{a_n\},\{b_n\}$ が収束し，$\alpha:=\lim a_n=\lim b_n$ ならば，$\{c_n\}$ も収束し，$\lim c_n=\alpha$.

(iii) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は零列である．
(iv) 正の実数 $\alpha < 1$ に対し $\{\alpha^n\}_{n=1}^{\infty}$ は零列である．

証明 (i) $a_n \leq b_n$ ($\forall n \in \mathbf{N}$) とする．もし仮に $\alpha = \lim a_n > \lim b_n = \beta$ であったとする．ある共通の $N \in \mathbf{N}$ があって，

$$|a_n - \alpha| < \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad |b_n - \beta| < \frac{\alpha - \beta}{2}, \qquad n \geq N.$$

よって $n \geq N$ に対し

$$a_n > \alpha - \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2},$$
$$b_n < \beta + \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

よって，$a_n > b_n$ ($n \geq N$)．これは，仮定に反する．

(ii) $\alpha = \lim a_n$ とおく．条件より，$\{c_n - \alpha\}$ が零列であることが従う．命題 1.1.11 (i) より $\{c_n\}$ は α に収束する．

(iii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，定理 1.1.5 よりある自然数 $N \in \mathbf{N}$ があって，$N > 1/\varepsilon$．つまり

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon, \qquad \forall n \geq N.$$

よって，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(iv) 仮定より $\frac{1}{\alpha} = 1 + \beta$, $\beta > 0$ と書かれる．$n \in \mathbf{N}$ に対し，

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = (1+\beta)^n = 1 + n\beta + \binom{n}{2}\beta^2 + \cdots + \binom{n}{n}\beta^n > n\beta,$$
$$0 < \alpha^n < \frac{1}{\beta n}.$$

上述 (iii) と命題 1.1.11 (ii) より $\left\{\frac{1}{\beta n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は零列であるから，既に示した挟み撃ち (ii) より，$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$. □

数列 $\{a_n\}$ について，上に有界 (または下に有界，あるいは有界) とは集合 $\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ が上に有界 (または下に有界，あるいは有界) であることを意味する．

命題 1.1.13 収束する数列は，有界である．

証明　$\{a_n\}$ を収束する数列とし，その極限を α とする．(1.1.10) において $\varepsilon = 1$ ととると，ある $N_1 \in \mathbf{N}$ があって

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| &< 1, \quad \forall n \geq N_1, \\ |a_n| &< |\alpha| + 1, \quad \forall n \geq N_1. \end{aligned}$$

$M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N_1}|, |\alpha| + 1\}$ とおくと，

$$|a_n| \leq M, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

よって，$\{a_n\}$ は有界である．□

収束する数列の基本的性質として次の命題が成立する．

命題 1.1.14 二つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がそれぞれ α, β に収束するとする．このとき次が成立する．

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$.

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$.

(iii) $b_n \neq 0$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ かつ $\beta \neq 0$ ならば，$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

証明は読者に任せる．((ii), (iii) の証明では命題 1.1.13 を用いる．)

数列 $\{a_n\}$ が，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し $a_n \leq a_{n+1}$ (または，$a_n \geq a_{n+1}$) を満たすとき，**単調増加** (または，**単調減少**) であるという．特に，任意の $n \in \mathbf{N}$ について $a_n < a_{n+1}$ (または，$a_n > a_{n+1}$) を満たすとき，**強義単調増加** (または，**強義単調減少**) という．単調増加または単調減少である数列を単に**単調数列**と呼ぶ．

定理 1.1.15 単調数列は，有界ならば収束する．

証明　$\{a_n\}$ を単調増加数列とする．集合 $\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ は上に有界であるから公理 1.1.2 により上限 $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在する．任意の正の数 ε に対して $\alpha - \varepsilon < a_N$ となる N が存在する．$\{a_n\}$ は単調増加だから

$$\alpha - \varepsilon < a_n \qquad (n \geq N).$$

一方，$a_n \leq \alpha$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ であるから，上式と合わせて

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon, \qquad n \geq N.$$

よって $\{a_n\}$ は α に収束する．$\square$

$\{a_n\}$ を数列，$\{n_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ を自然数からなる強義単調増加数列とするとき，$\{a_{n_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ を $\{a_n\}$ の**部分列**と呼ぶ．

命題 1.1.16 収束する数列の部分列は，同じ極限に収束する．

証明はやさしいので，読者に任す．

次は，ボルツァーノ・ワイェルシュトラースの定理等とする文献もある．

定理 1.1.17 (ワイェルシュトラース) 有界な数列は，収束する部分列を持つ．

証明　$\{a_n\}$ を有界な数列とする．ある $M > 0$ があって

$$-M \le a_n \le M, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

閉区間 $I_0 = [-M, M]$ を考えて，以下いわゆる**区間二分割法**を用いる．I_0 の中点 $\frac{-M+M}{2} = 0$ で I_0 を二つの区間に分ける：

$$I_0' = [-M, 0], \quad I_0'' = [0, M], \quad I_0 = I_0' \cup I_0''.$$

I_0', I_0'' のどちらか一方には無限個の a_n $(n \in \mathbf{N})$ が含まれている．その無限個の a_n を含む区間を I_1 として $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ と書き，I_1 に含まれる $\{a_n\}$ の部分列を $\{a_{1n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ とする．同様に，I_1 の中点 $\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$ によって I_1 を二分割し，$\{a_{1n}\}$ の部分列 $\{a_{2n}\}$ を含む区間を $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$ とする．これを繰り返す事により，$I_\nu = [\alpha_\nu, \beta_\nu]$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ とそれに含まれる部分列 $\{a_{\nu n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ を得る．したがって，$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{\nu\nu}\}_{\nu\in\mathbf{N}}$ がとれて

$$\alpha_\nu \le a_{\nu\nu} \le \beta_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots.$$

$\{\alpha_\nu\}$ は単調増加で，$\{\beta_\nu\}$ は単調減少であり共に有界であるから定理 1.1.15 によりそれぞれ収束し極限 α, β をもつ．構成法より

$$0 \le \beta - \alpha < \beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{M}{2^{\nu-1}}.$$

命題 1.1.12 (iv) により，$\left\{\frac{M}{2^{\nu-1}}\right\}_{\nu=1}^\infty$ は零列である．よって，$\alpha = \beta$．命題 1.1.12 (ii) により $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{\nu\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ は，α に収束することがわかる．$\square$

定義 1.1.18 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が**コーシー列**である，または**コーシー条件**を満たすとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して

(1.1.19) $$|a_n - a_m| < \varepsilon, \qquad m, n \ge N$$

が満たされることである．

定理 1.1.20 (実数の完備性，コーシー判定法) 数列が収束することとコーシー列であることは，同値である．

証明　$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を任意の数列とする．これが，収束するならば，コーシー列であることを示すのは，やさしい．

逆を示そう．まず，コーシー列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は有界であることを見よう．$\varepsilon = 1$ として (1.1.19) での N をとれば

$$|a_n - a_m| < 1 \qquad (m, n \geq N)$$

であるから

$$|a_n| < |a_N| + 1 \qquad (n \geq N).$$

よって $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ とおけば，全ての n に対して $|a_n| \leq M$ が成立する．

したがって定理 1.1.17 より $\{a_n\}$ は収束する部分列 $\{a_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ をもつ．その極限を α とする．$\{a_n\}$ は，α に収束することを示そう．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 N' があって

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \qquad m, n \geq N'.$$

また $N'' \in \mathbf{N}$ があって

$$|a_{n_\nu} - \alpha| < \varepsilon, \qquad \nu \geq N''.$$

ここで $n_{N''} \geq N'$ としてよい．上記二不等式より $\nu \geq N''$ として

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{n_\nu}| + |a_{n_\nu} - \alpha| < 2\varepsilon, \qquad n \geq N'.$$

$\varepsilon > 0$ は任意であるから，これは $\lim a_n = \alpha$ を意味する．　□

注意 1.1.21　(i) コーシー判定法の良いところは，極限がわからなくても収束の判定ができることにある．

(ii) 定理 1.1.20 の性質を実数の完備性という．有理数体 $\mathbf{Q}$ は完備でないことに注意されたい．

(iii) ここで，数列の収束概念を少し拡張しておく．数列 $\{a_n\}$ に対し，$\lim a_n = \infty$ (または，$\lim a_n = -\infty$) とは，任意の正数 $M > 0$ に対し，

$$a_n > M \ \ (\text{または，} a_n < -M), \quad n \geq N$$

が成立することとする．したがって，$\{a_n\}$ が単調ならば常に $\lim a_n$ が存在して

$$-\infty \leq \lim a_n \leq \infty.$$

次に上極限，下極限の定義を与える．数列 $\{a_n\}$ に対して集合 $\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$ の上限および下限を

$$\sup_{n \geq k} a_n, \qquad \inf_{n \geq k} a_n$$

と書くことにする．これらはそれぞれ k に関する単調減少数列および単調増加数列である．

定義 1.1.22 数列 $\{a_n\}$ に対して**上極限**，**下極限**を

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varlimsup a_n = \inf_k \sup_{n \geq k} a_n,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \varliminf a_n = \sup_k \inf_{n \geq k} a_n$$

で定義する．

上極限，下極限は必ず存在して

$$-\infty \leq \varliminf a_n \leq \varlimsup a_n \leq \infty, \quad -\infty \leq \varliminf a_n \leq \varlimsup a_n \leq \infty,$$

$$\varlimsup a_n = -\varliminf\ - a_n.$$

また，$\varliminf a_n = \infty$ のとき $\lim a_n = \infty$ と書き，$\varlimsup a_n = -\infty$ のとき $\lim a_n = -\infty$ と書く．

命題 1.1.23 数列 $\{a_n\}$ が収束することと $\varlimsup a_n = \varliminf a_n \in \mathbf{R}$ であることは同値である．

証明　$\{a_n\}$ が収束するならば，定理 1.1.20 より任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbf{N}$ があって

$$-\varepsilon < a_n - a_m < \varepsilon, \quad n, m \geq N.$$

したがって

$$-\varepsilon \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n - a_m \leq \varepsilon, \quad m \geq N.$$

特に，$\overline{\lim}\, a_n \in \mathbf{R}$ である．a_m について下極限をとると

$$-\varepsilon \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n - \underline{\lim_{m\to\infty}}\, a_m \leq \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意であったから，$\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n \in \mathbf{R}$ を得る．

逆を示すため，$\alpha = \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n \in \mathbf{R}$ とおく．定義に従い，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N' \in \mathbf{N}$ があって

$$\sup_{n\geq N'} a_n < \alpha + \varepsilon, \quad \inf_{n\geq N'} a_n > \alpha - \varepsilon.$$

したがって

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon, \qquad n \geq N'.$$

これは，$\lim a_n = \alpha$ を意味する． □

1.1.3　級数

本節では級数の収束について基本的な事項を述べる．実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対して形式的な和

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

を**級数**という．部分和を $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ とおくと数列 $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を得る．極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在するとき級数 S は**収束**するといい，極限を級数の**極限**あるいは**和**と呼び，同じ S で表す.

命題 1.1.24 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\{a_n\}$ は零列である．

証明　$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とおけば

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0 \quad (n \to \infty).$$ □

命題 1.1.14 より，次が成立する．

命題 1.1.25 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ を収束する級数とし，α, β を実定数とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta b_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の**コーシー条件**は，部分和の列 $\{S_n\}$ のそれとして次の様に述べられる：

条件 1.1.26　任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbf{N}$ があって

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon, \quad n \geq m \geq N.$$

定理 1.1.20 より次がわかる．

命題 1.1.27 級数が収束することとコーシー条件 1.1.26 を満たすこととは，同値である．

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の**並べ替え級数**とは，全単射写像 $\varphi : n \in \mathbf{N} \to \varphi(n) \in \mathbf{N}$，すなわち $n \neq n'$ ならば $\varphi(n) \neq \varphi(n')$ かつ像 $\varphi(\mathbf{N}) = \mathbf{N}$ を満たす写像 φ をもって

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

と書かれる級数のことである．

全ての $a_n \geq 0$ であるとき $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を**正項級数**と呼ぶ．

補題 1.1.28 収束正項級数の並べ替え級数は収束し，和は同じである．

証明　$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を収束正項級数とし，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ をその並べ替え級数とする．$a_j \geq 0$ であるから明らかに，

$$S'_n = \sum_{j=1}^{n} a_{\varphi(j)} \leq \sum_{j=1}^{\max\{\varphi(j):1\leq j\leq n\}} a_j \leq S. \tag{1.1.29}$$

$\{S'_n\}$ は有界単調増加列であるから定理 1.1.15 により収束する．$S' = \sum_{j=1}^{\infty} a_{\varphi(j)}$ とおけば $S' \leq S$．

一方，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ の並べ替え級数でもあるから，$S \leq S'$．したがって，$S' = S$． □

定義 1.1.30 (絶対収束) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が**絶対収束**するとは，正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束することである．

実数 $x \in \mathbf{R}$ に対し，

$$x^+ = \max\{x, 0\} \geq 0, \quad x^- = \max\{-x, 0\} \geq 0$$

とおく．

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-$$

である．

定理 1.1.31 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を絶対収束する級数とすると，次が成立する．

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ は収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-. \tag{1.1.32}$$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和は，級数の並び替えで変わらない．

証明　(i) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ のコーシー条件より，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ および $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ のコーシー条件が従うので，それぞれ収束する．(1.1.32) は命題 1.1.25 より従う．

(ii) これは，(1.1.32) と補題 1.1.28 より従う．　□

1.1.4　無限乗積

ここでは，有限項を除いて零でない数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．つまり，ある $N_0 \in \mathbf{N}$ があって，$n \geq N_0$ ならば $a_n \neq 0$ である．このとき，形式的乗積

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

を**無限乗積**または**無限積**と呼ぶ．その部分積を $P_n = \prod_{j=N_0}^{n} a_j$ $(n \geq N_0)$ とおく．

定義 1.1.33 (無限乗積の収束)　無限乗積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは，数列 $\{P_n\}_{n=N_0}^{\infty}$ $(= \{P_{N_0+n-1}\}_{n=1}^{\infty})$ が零でない実数 α に収束することである．

$$\alpha = \prod_{n=N_0}^{\infty} a_n \tag{1.1.34}$$

と書き，

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \left(\prod_{n=1}^{N_0-1} a_n\right) \cdot \left(\prod_{n=N_0}^{\infty} a_n\right)$$

で無限乗積の**極限**を表す．極限は，N_0 のとり方に依らない．

命題 1.1.35 無限乗積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束していれば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ である．

証明　(1.1.34) より，$n \geq N_0$ として

$$a_n = \frac{\prod_{j=N_0}^{n} a_j}{\prod_{j=N_0}^{n-1} a_j} \longrightarrow \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \quad (n \to \infty). \qquad \square$$

無限乗積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ についての**コーシー条件**は，次の様に述べられる：

条件 1.1.36　任意の正数 $\varepsilon < 1$ に対しある $N \in \mathbf{N}$ $(N \geq N_0)$ があって

$$\left| \prod_{j=m}^{n} a_j - 1 \right| < \varepsilon, \quad n > m \geq N.$$

定理 1.1.37 無限乗積が，収束することとコーシー条件を満たすことは，同値である．

証明　$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ を無限乗積とする．まず，それが収束するとする．(1.1.34) よりある $\delta > 0$ と $N_0 \in \mathbf{N}$ があって

$$\left| \prod_{j=N_0}^{n} a_j \right| > \delta, \quad n \geq N_0.$$

また部分積の列 $\{\prod_{j=N_0}^{n} a_j\}_{n=N_0}^{\infty}$ はコーシー条件を満たすので，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 $N \geq N_0$ があって

$$\left| \prod_{j=N_0}^{n} a_j - \prod_{j=N_0}^{m} a_j \right| < \varepsilon, \quad n > m \geq N.$$

これより，

$$\left| \prod_{j=m+1}^{n} a_j - 1 \right| = \frac{\left| \prod_{j=N_0}^{n} a_j - \prod_{j=N_0}^{m} a_j \right|}{\left| \prod_{j=N_0}^{m} a_j \right|} < \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad n > m \geq N.$$

$\varepsilon > 0$ は任意であるから，コーシー条件が満たされることが示された．

次に，$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ がコーシー条件を満たしているとする．条件 1.1.36 で $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ととると，ある $N_1 \geq N_0$ があって

$$\frac{1}{2} < \left| \prod_{j=m}^{n} a_j \right| < \frac{3}{2}, \quad n > m \geq N_1. \tag{1.1.38}$$

部分積の列 $\{\prod_{j=N_0}^{n} a_j\}_{n=N_0}^{\infty}$ が数列のコーシー条件を満たすことを示そう．仮定より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $N' \geq N_1$ があって

$$\left|\prod_{j=m}^{n} a_j - 1\right| < \varepsilon, \quad n > m \geq N'.$$

これより，$n > m \geq N'$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\prod_{j=N_0}^{n} a_j - \prod_{j=N_0}^{m} a_j\right| &= \left|\prod_{j=N_0}^{m} a_j\right| \cdot \left|\prod_{j=m+1}^{n} a_j - 1\right| \\ &\leq \left|\prod_{j=N_0}^{N_1-1} a_j\right| \cdot \left|\prod_{j=N_1}^{m} a_j\right| \cdot \varepsilon \leq \frac{3}{2}\left|\prod_{j=N_0}^{N_1-1} a_j\right| \cdot \varepsilon.\end{aligned}$$

N_1 は固定されていて，$\varepsilon > 0$ は任意であるから，$\{\prod_{j=N_0}^{n} a_j\}_{n=N_0}^{\infty}$ はコーシー列であり，収束する．したがって，$\prod_{j=N}^{\infty} a_j$ は収束して (1.1.38) より

$$\frac{1}{2} \leq \left|\prod_{j=N}^{\infty} a_j\right| \leq \frac{3}{2}.$$

これより

$$\prod_{j=N_0}^{\infty} a_j = \left(\prod_{j=N_0}^{N-1} a_j\right) \cdot \left(\prod_{j=N}^{\infty} a_j\right) \neq 0. \qquad \square$$

無限乗積の絶対収束については，指数関数や対数関数を定義した後に論ずる (§2.5.1 を参照).

1.2　n 次元ユークリッド空間

$n \in \mathbf{N}$ として，n 個の実数の組

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

の成す集合を $\mathbf{R}^n$ で表す．$x = (x_j)_{1 \leq j \leq n} = (x_j)$ と略記することがしばしばある．$x = (x_j)$ を $\mathbf{R}^n$ の点とも呼ぶ．各 x_j を x の (j 番目の) **座標成分**と呼ぶ.

$\mathbf{R}^n$ は次の代数演算により $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間の構造を持つ：$x=(x_j), y=(y_j) \in \mathbf{R}^n$，$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に対し

$$\alpha x + \beta y = \alpha(x_j) + \beta(y_j) = (\alpha x_j + \beta y_j) \in \mathbf{R}^n.$$

特に，$0=(0,\dots,0) \in \mathbf{R}^n$ を零ベクトルと呼ぶ．

二元 $x=(x_j), y=(y_j) \in \mathbf{R}^n$ に対し**内積**と**ノルム**が

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0 \tag{1.2.1}$$

で定義される．このノルムを特に**ユークリッドノルム**と呼ぶことがある．二点 $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対し定義される $d(x,y) := \|x-y\|$ は，**ユークリッド距離**と呼ばれる．$\mathbf{R}^n$ をノルム $\|x\|$ (または，内積 $\langle x, y\rangle$) 付きで考えたものを n 次元**ユークリッド空間**という．

$x, x' \in \mathbf{R}^n$，$\alpha, \alpha' \in \mathbf{R}$ として次が成立する．

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,$$

$$\langle \alpha x + \alpha' x', y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \alpha'\langle x', y\rangle,$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$$

$$\max\{|x_j| : 1 \leq j \leq n\} \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\max\{|x_j| : 1 \leq j \leq n\}, \tag{1.2.2}$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{1.2.3}$$

最後の不等式で，$x \neq 0,\ y \neq 0$ ならば等号は $x = \beta y$ となる $\beta > 0$ が存在する場合に限る．

点 $a=(a_j) \in \mathbf{R}^n, r>0$ に対して

$$B(a; r) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x-a\| < r\}$$

を中心 a，半径 r の**開球**という．特に，$a=0$ のとき

$$B(r) = B(0; r)$$

と書く．

部分集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ を考える．E が**有界**とは，ある $r>0$ があって，$B(r) \supset E$ となることである．

定義 1.2.4 $\mathbf{R}^n$ の**点列** $x_\nu = (x_{\nu j})$, $\nu = 1, 2, \ldots$ を $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty = \{x_\nu\}$ と表す．これが，$a \in \mathbf{R}^n$ に**収束**するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 $N \in \mathbf{N}$ があって

$$\|x_\nu - a\| < \varepsilon, \qquad \nu \geq N \tag{1.2.5}$$

が成立することと定義する．このとき，a を $\{x_\nu\}$ の**極限**と呼び，

$$\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \lim x_\nu = a$$

と書く．

点列 $\{x_\nu\}_\nu = \{(x_{\nu j})\}_\nu$ が**有界**とは，集合 $\{x_\nu : \nu \in \mathbf{N}\}$ $(\subset \mathbf{R}^n)$ として有界であることとする．

定理 1.2.6　(i) 収束する点列は，有界である．

(ii) $\mathbf{R}^n$ の点列 $\{(x_{\nu j})\}_{\nu=1}^\infty$ が $a = (a_j)$ に収束するすることと各成分について $\lim_{\nu\to\infty} x_{\nu j} = a_j$ が成り立つことは，同値である．

(iii) 有界な点列は，収束する部分列をもつ．

証明　(i) 数列の場合 (命題 1.1.13) と同様に示される．

(ii) これは，(1.2.2) より直ちに従う．

(iii) 与えられた有界点列の成分について順次定理 1.1.17 を適用する．　□

定義 1.2.7 ($\mathbf{R}^n$ の**位相**)　部分集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ に対し次の概念を定義する．

(i) $a \in \mathbf{R}^n$ が，E の**内点**とは，ある $r > 0$ があって $B(a; r) \subset E$．

(ii) $a \in \mathbf{R}^n$ が，E の**外点**とは，ある $r > 0$ があって $B(a; r) \cap E = \emptyset$．

(iii) $a \in \mathbf{R}^n$ が E の内点でも外点でもないとき，E の**境界点**と呼ぶ．その全体を ∂E と書き，E の**境界**と呼ぶ．

(iv) $a \in \mathbf{R}^n$ が E の**集積点**とは，任意の $r > 0$ に対して $B(a; r) \cap E \setminus \{a\} \neq \emptyset$．

(v) $a \in E$ が E の**孤立点**とは，ある $r > 0$ があって $B(a; r) \cap E \setminus \{a\} = \emptyset$．
E が孤立点のみから成るとき，**離散集合**，あるいは**離散的**であるという．

(vi) E と E の集積点の全体を合わせた集合を $\bar{E}$ と書き，E の**閉包**と呼ぶ．$\bar{E} = E \cup \partial E$ が成立する．

(vii) E が内点のみから成るとき，E を**開集合**と呼ぶ．

(viii) 点 $a \in \mathbf{R}^n$ (または，部分集合 $E \subset \mathbf{R}^n$) を含む開集合を a (または，E) の**近傍**と呼ぶ．特に，$B(a; r)$ を a の**球近傍**と呼ぶ (下述注意 1.2.9 を参照)．

(ix) $E = \bar{E}$ が成立するとき E を**閉集合**と呼ぶ.

(x) 部分集合 $F \subset E$ に対して $\bar{F} \cap E = E$ が成立するとき，F は E で**稠密**であるという.

注意 1.2.8 $\mathbf{R}^n$ の点列の収束と極限概念と共に上述の諸性質にもとづいて述べられる性質・概念を**位相的**性質・概念という．後に定義する関数の連続性もこれらの概念にもとづいて定義される性質ということで，位相的性質の一つである.

ある集合に点列の収束・極限の概念，あるいは開集合の概念を定めることを**位相**を定義するという．一つの集合 E ($\subset \mathbf{R}^n$) に二つの方法で点列の収束と極限の概念が，または開集合の概念が定義され，実はそれらが同値である (一方の概念で，ある極限に収束している点列は，他方の概念についても同じ極限に収束している．あるいは，一方の概念で開部分集合であれば，他方の概念に関しても開部分集合であるという意味）場合，それら二つは**同相**であるという.

注意 1.2.9 開球 $B(a;r)$ ($\subset \mathbf{R}^n$) は，開集合である．その閉包は，$\overline{B(a;r)} = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x-a\| \leq r\}$ となり**閉球**と呼ばれる.

集合 E ($\subset \mathbf{R}^n$) があり，E の点に関するある性質が，その点の近傍上で満たされる性質として述べられるとき，それを**局所的性質**と呼ぶ．例えば，集合 $E(\subset \mathbf{R}^n)$ が開集合であるという性質は，局所的性質である．しかし，閉集合であるという性質は，局所的性質ではない.

定理 1.2.10　(i) 部分集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ に対して，$\overline{\overline{E}} = E$.

(ii) 任意の開集合族 $\{U_\nu\}_{\nu\in\Gamma}$ に対し，合併集合 $\bigcup_{\nu\in\Gamma} U_\nu$ は開集合である．Γ が有限集合ならば共通集合 $\bigcap_{\nu\in\Gamma} U_\nu$ も開集合である.

(iii) 任意の閉集合族 $\{F_\nu\}_{\nu\in\Gamma}$ に対し，共通集合 $\bigcap_{\nu\in\Gamma} F_\nu$ は閉集合である．Γ が有限集合ならば合併集合 $\bigcup_{\nu\in\Gamma} U_\nu$ も閉集合である.

(iv) 部分集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ が開集合ならば補集合 $E^c = \mathbf{R}^n \setminus E$ は閉集合であり，逆も成立する.

証明　(i), (ii) 定義に戻れば，やさしい.

(iii) 補集合を考えれば，(ii) と次の (iv) より従う.

(iv) E を開集合とする．$a \in \mathbf{R}^n$ を E^c の集積点とする．$a \in E^c$ または $a \in E$ であるから，今仮に $a \in E$ であるとする．開集合の定義よりある $r > 0$ があって $B(a,r) \subset E$．したがって，$B(a;r) \cap E^c = \emptyset$．これは，$a$ が E^c の集積点であることに反する．よって，$a \in E^c$．E^c は閉である.

逆に，E^c が閉集合であるとする．任意の点 $a \in E$ は，E^c の点でもなく，集積点でもない．よって，ある $r > 0$ があって，$B(a;r) \cap E^c = \emptyset$．これより，$B(a;r) \subset E$．よって，$a$ は E の内点である．よって，E は開である． □

定義 1.2.11 一般に，部分集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ の開集合，閉集合を次の様に定義する．$A \subset E$ が**開集合** (または，**閉集合**) であるとは，$\mathbf{R}^n$ の開部分集合 (または，閉部分集合) B が存在して $A = E \cap B$ と書かれることとする．

定理 1.2.12 (ワイエルシュトラース) 集合 K $(\subset \mathbf{R}^n)$ について次の二条件は同値である．

(i) K は，有界閉集合である．

(ii) K の任意の点列は収束する部分列を含み，その極限は K の点である．

証明 (i)⇒(ii)．K の任意の点列 a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ をとる．$\{a_\nu\}_\nu$ は有界なので定理 1.2.6 (iii) より $\{a_\nu\}$ は収束する部分列 $\{a_{\nu_\mu}\}_{\mu=1}^\infty$ をもつ．K は閉集合であるので，$\lim_{\mu\to\infty} a_{\nu_\mu} \in K$．

(ii)⇒(i)．もし，K が非有界であるとすると，K の点列 b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ で $\|b_\nu\| > \nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ を満たすものがとれる．$\{b_\nu\}_\nu$ は，収束する部分列を含み得ないので，矛盾である．よって，K は有界である．$c \in \mathbf{R}^n$ を K の集積点とすれば，K の点列 c_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ で c に収束するものがとれる．条件より $c \in K$．よって K は閉集合である． □

定義 1.2.13 (開被覆) $E \subset \mathbf{R}^n$ に対してその部分集合の族 $\mathscr{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が E の**開被覆**であるとは，各 U_λ が E の開集合であり，

$$E = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

が満たされることである．このことを E は $U_\lambda, \lambda \in \Lambda$ で覆われるともいう．

定理 1.2.14 (ハイネ・ボレル) 集合 K $(\subset \mathbf{R}^n)$ について，次の二条件は同値である．

(i) K の任意の開被覆 $\mathscr{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，有限個の $U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_l} \in \mathscr{U}$ が存在して

$$K = \bigcup_{j=1}^{l} U_{\lambda_j}.$$

(ii) K は，有界閉集合である．

証明　(i)⇒(ii)．まず有界性を示そう．K の開被覆として $\{K \cap B(N)\}_{N \in \mathbf{N}}$ を考える．仮定より有限個の $B(N)$ $(N = 1, 2, \ldots, N_0)$ で覆える．$K = K \cap B(N_0) \subset B(N_0)$．よって K は有界である．

K が閉集合でないとすると，K の集積点で $a \notin K$ である点が存在する．開集合 $U_\nu = \mathbf{R}^n \setminus \overline{B(a; 1/\nu)}$, $\nu \in \mathbf{N}$ を考える．$\{K \cap U_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}}$ は，K の開被覆であるが有限個の $K \cap U_\nu$ では K を覆えない．これは矛盾である．ゆえに，K は閉である．

(ii)⇒(i)．証明は，背理法による．K のある開被覆 $\mathscr{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ があって，K はその有限個の U_λ では覆えないとする．

$$
\begin{aligned}
a_{0j} &= \inf\{x_j : (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \in K\}, \quad 1 \le j \le n, \\
b_{0j} &= \sup\{x_j : (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \in K\}, \quad 1 \le j \le n,
\end{aligned}
$$

とおく．K は有界であるから，$-\infty < a_{0j} \le b_{0j} < \infty$．

閉直方体

$$
Q_0 = [a_{01}, b_{01}] \times \cdots \times [a_{0n}, b_{0n}]
$$

を考える．$K \subset Q_0$ である．Q_0 の各 j 座標成分 $[a_j, b_j]$ について 2 分割法を適用し，Q_0 を 2^n 個の閉直方体 $Q_{0\nu}$, $1 \le \nu \le 2^n$ に分ける．

$$
K \cap Q_0 = \bigcup_{\nu=1}^{2^n} K \cap Q_{0\nu}
$$

であるから，ある $Q_{0\nu}$ があって $K \cap Q_{0\nu}$ は，有限個の $U_\lambda \in \mathscr{U}$ では覆えない．それを，

$$
Q_1 = [a_{11}, b_{11}] \times \cdots \times [a_{1n}, b_{1n}]
$$

とする．これを繰り返して

$$
\begin{aligned}
&Q_\mu = [a_{\mu 1}, b_{\mu 1}] \times \cdots \times [a_{\mu n}, b_{\mu n}], \quad && \mu = 0, 1, 2, \ldots, \\
&Q_\mu \supset Q_{\mu+1}, && \mu = 0, 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
$$

で，$K \cap Q_\mu$ が有限個の $U_\lambda \in \mathscr{U}$ では覆えないものが得られる．$M = \max\{b_{0j} - a_{0j} : 1 \le j \le n\}$ と置けば，

$$
b_{\mu j} - a_{\mu j} \le \frac{M}{2^\mu}, \qquad 1 \le j \le n, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots.
$$

したがって，$a_{\mu j}, b_{\mu j}$, $\mu = 0, 1, 2, \dots$ は，同じ極限 $c_j \in \mathbf{R}$ に収束する．K は閉集合であるから，$P := (c_1, \dots, c_n) \in K$．したがって，ある $U_0 \in \mathscr{U}$ があって，$U_0 \ni P$．定義より，$\mathbf{R}^n$ の開部分集合 $\tilde{U}_0$ があって $U_0 = K \cap \tilde{U}_0$ となる．ある $N \in \mathbf{N}$ があって，

$$Q_\mu \subset \tilde{U}_0, \quad \mu \geq N.$$

したがって，$Q_\mu \cap K \subset \tilde{U}_0 \cap K = U_0$ となり，$Q_\mu \cap K$ は有限個の $U_\lambda \in \mathscr{U}$ で覆えないということに反する．□

定義 1.2.15 集合 K ($\subset \mathbf{R}^n$) が定理 1.2.12 および定理 1.2.14 にある同値な三条件のどれかを満たすとき，K は**コンパクト**であるという．

二つの部分集合 $E, F \subset \mathbf{R}^n$ に対し，

$$E \Subset F$$

とは，閉包 $\bar{E}$ がコンパクトでありかつ $\bar{E} \subset F$ となっていることとする．このとき，E は F で**相対コンパクト**であるという．

定義 1.2.16 (連結性) 部分集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ が**非連結**であるとは，次の性質を満たす E の開部分集合 $U_j \subset E$, $j = 1, 2$ が存在することである：

$$U_j \neq \emptyset \ (j = 1, 2), \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad E = U_1 \cup U_2. \tag{1.2.17}$$

非連結でないとき，E は**連結**であるという．集合の包含関係に関して極大な E の連結部分集合を E の**連結成分**と呼ぶ．$a \in E$ に対し，a を含む E の連結成分が唯一つ定まる．

定理 1.2.18　(i) $\mathbf{R}$ の閉区間 $[a, b] \subset \mathbf{R}$ は，連結である．
(ii) 開区間 $(a, b) \subset \mathbf{R}$ は，連結である．

証明　(i) 結論を否定すると，ある非空開集合 $U_j \subset [a, b]$ $(j = 1, 2)$ があって

$$[a, b] = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

$a \in U_1$ として一般性を失わない．U_1 は開集合であるから，十分小さな $\delta > 0$ をとれば，$[a, a + \delta] \subset U_1$．公理 1.1.2 により

$$c_0 = \sup\{c \in [a, b] : [a, c] \subset U_1\}$$

が存在する．$a < c_0 \leq b$ である．$c_0 \notin U_1$ である．したがって，$c_0 \in U_2$ である．U_2 は開集合であるから，十分小さな $\rho > 0$ に対し $(c_0 - \rho, c_0 + \rho) \subset U_2$．$c_0$ の定義より，ある $\gamma \in U_1$ で $c_0 - \rho < \gamma < c_0$ である元が存在する．すると，$\gamma \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となり，矛盾である．

(ii) 結論を否定すると，ある非空開集合 $U_j \subset (a, b)$ $(j = 1)$ があって

$$(a, b) = U_1 \cup U_2, \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

$c \in U_1,\ d \in U_2$ をとる．$c \neq d$ である．$c < d$ として一般性を失わない．すると，$[c, d] \subset U_1 \cup U_2$ となり，(i) で示した閉区間 $[c, d]$ の連結性に反する． □

定理 1.2.19 $E \subset \mathbf{R}^n$ を連結とする．非空部分集合 $U \subset E$ が E の開かつ閉集合ならば，$U = E$ である．

証明　U は閉集合なので，$V = E \cap U^c$ は E の開集合である．$E = U \cup V$ なので，もし $V \neq \emptyset$ ならば E は非連結となり，矛盾である． □

定義 1.2.20 $\mathbf{R}^n$ の連結開集合を**領域**という．

補題 1.2.21 $U, V \subset \mathbf{R}^n$ を二つの領域とする．$U \cap V \neq \emptyset$ ならば $U \cup V$ も領域である．

証明　$W := U \cup V$ が非連結であったとする．$U \neq V$ であり，二つの非空開集合 $W_j \subset W$, $j = 1, 2$ があって，

$$W = W_1 \cup W_2, \quad W_1 \cap W_2 = \emptyset,$$

と表される．仮定より，$U = (W_1 \cap U) \cup (W_2 \cap U)$．$W_1 \cap U \neq \emptyset$ として一般性を失わない．U は連結であるから，$W_2 \cap U = \emptyset$．よって，$U \subset W_1$．また，$W_2 \cap V \neq \emptyset$ となる．同様にして，$V \subset W_2$．ゆえに $W_1 \cap W_2 \supset U \cap V \neq \emptyset$ となり，矛盾をきたす． □

補題 1.2.22 開集合 U の二点 $a, b \in U$ に対し $\{a, b\} \subset D \subset U$ となる領域 $D \subset U$ があるとき，$a \sim b$ と書くと，これは同値条件である．

証明は，補題 1.2.21 より直ちに従う (詳しくは，読者に任す)．

定理 1.2.23 任意の非空開集合 $U \subset \mathbf{R}^n$ は，高々可算個の互いに共通部分を持たない連結開集合 $D_\nu(\subset U)$, $\nu \in \Gamma$ ($\Gamma \subset \mathbf{N}$ は有限，または $\Gamma = \mathbf{N}$) に分解され

$$U = \bigcup_{\nu \in \Gamma} D_\nu$$

と表される．D_ν, $\nu \in \Gamma$ は順序を除いて一意的に定まる．

証明　補題 1.2.22 の同値関係で，U を分解し，商集合 $\Gamma = U/\sim$ とおく．各 $\nu \in \Gamma$ に対し代表元 $a_\nu \in U$ として座標成分が有理数 ($a_\nu \in \mathbf{Q}^n$) であるものがとれる．$\mathbf{Q}^n$ は，可算集合であるから，Γ は，高々可算である．a_ν と同値な U の元全体を D_ν とする．D_ν は a を含む開連結成分であり互いに素で，$U = \bigcup_\nu D_\nu$.

分解の一意性は，やさしいので読者に任す．□

1.3　複素数と複素平面

任意の実数 $x \in \mathbf{R}$ は，$x^2 \geq 0$ を満たす．したがって二次方程式

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1.3.1}$$

は，実数の中に根 (解) を持ち得ない．一般の二次方程式

$$aX^2 + bX + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0 \tag{1.3.2}$$

は，その判別式 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ の場合には，実数の中に根を持ち得ないことを読者は知っていることと思う．

そこで仮想的に (1.3.1) の根として i を $i^2 + 1 = 0$ を満たすものとして，新たに導入する．これに (右) 実係数 y を付けた iy と実数 x をもって

$$z = x + iy$$

と和の形で表したものを**複素数**と呼ぶ．

$$x + iy = x + yi = yi + x = iy + x,\ x = x + i0,\ 0 + iy = iy$$

と同一視する．このとき，x，y をそれぞれ z の**実部**，**虚部**といい

$$x = \Re z, \quad y = \Im z$$

で表す．$z = 0$ とは，$x = y = 0$ のことである．

実数でない複素数を**虚数**と呼び，$z = iy$ $(y \neq 0)$ を**純虚数**，i を**虚数単位**と呼ぶ．複素数全体の集合を $\mathbf{C}$ で表す．$\mathbf{R} = \{z \in \mathbf{C} : \Im z = 0\} \subset \mathbf{C}$ とみなす．$-i = i(-1)$ と同一視する．$z = x + iy$ に対し

$$\bar{z} = x + i(-y) = x - iy \in \mathbf{C}$$

を z の**共役**と呼ぶ．

$z = x + iy,\ w = u + iv \in \mathbf{C}$ に対し，

$$\begin{aligned} z + w &= (x+u) + i(y+v), \\ -z &= -x - iy, \quad z + (-z) = z - z = 0, \\ zw &= xu - yv + i(yu + xv) \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

によって，加減乗が定義される．これにより，

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0.$$

$w \neq 0$ ならば，

$$w\left(\frac{u}{w\bar{w}} - \frac{v}{w\bar{w}}i\right) = 1$$

が容易に確かめられる．

$$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{u}{w\bar{w}} - \frac{v}{w\bar{w}}i = \frac{1}{w\bar{w}}\bar{w}$$

とおく．割り算は，

(v) $\frac{z}{w} = zw^{-1} = z\frac{1}{w}$ と定義される．$\frac{z}{w} = z/w$ とも書く．

以上により，$\mathbf{C}$ に四則演算が入り，$\mathbf{C}$ は体となる．

このように複素数を導入すると (1.3.2) の根は

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

と常に求まることになる．

注意　歴史的には，二次方程式よりむしろ三次方程式が常に持つ実根を表示するためにどうしても虚数が必要になったという経緯がある．複素数には，大小関係がなくなったことに注意しよう．しかしながら，本質的なことは，数の体系を実数か

ら虚数単位 i を導入し複素数に拡張することで，単に二次方程式や三次方程式が解けるようになるということだけでなく，後の章で証明するように，複素数を係数とする任意の代数方程式は，複素数の範囲で解けるようになることがある．このような性質をもつ数の体系が有限的に構成されるのは，複素数以外では知られていない．

それのみならず，複素数の世界で考えることにより，解析関数の深い性質が展開可能になる．それを述べるのが本書の目的である．

複素数 $z = x + iy$ の**絶対値**を $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ と定める．このとき

(i) $|z| \geq 0$，等号は $z = 0$ に限る．
(ii) $|zw| = |z| \cdot |w|$ $(w \in \mathbf{C})$．
(iii) (三角不等式) $|z + w| \leq |z| + |w|$．$zw \neq 0$ ならば，等号は $z = cw$ となる $c > 0$ があるときに限る．
(iv) $\big||z| - |w|\big| \leq |z| + |w|$．

複素数 $z = x + iy \in \mathbf{C}$ に 2 次元ユークリッド平面 $\mathbf{R}^2$ の点 (x, y) を対応させ，$\mathbf{C}$ と平面 $\mathbf{R}^2$ を同一視できる．そのように考えた $\mathbf{C}$ を**複素平面**または**ガウス平面**と呼ぶ (図 1.2 参照)．そのノルムを用いれば，

$$|z| = \|(x, y)\|. \tag{1.3.4}$$

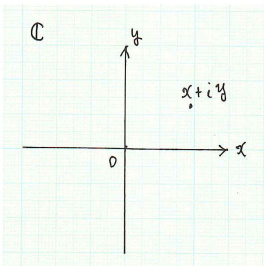

図 1.2: 複素平面

注意 前節で $\mathbf{R}^n$ について述べた事は，$n = 2$ の特別な場合として全て $\mathbf{C}$ に対して成立する．

開球 $B(a; r)$ は，$\mathbf{C}$ は平面であるので，**開円板**と呼ぶことにし，

$$\Delta(a; r) = B(a; r) = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| < r\}, \quad \Delta(r) = \Delta(0; r)$$

と書くことにする．$\Delta(a;r)$ を a の近傍と考えるときは，これを**円板近傍**と呼ぶ．$\overline{\Delta(a;r)} = \{z \in \mathbf{C}; |z-a| \leq r\}$ を**閉円板**と呼ぶ．

$C(a;r) = \partial\Delta(a;r) = \{z \in \mathbf{C} : |z-a| = r\}$ を中心 a，半径 r の**円** (または，円周) と呼び，$\Delta(1)$ を**単位円板**，$C(1) = \partial\Delta(1)$ を**単位円**と呼ぶ．

1.4　複素数列・複素級数

複素数の実部・虚部による $\mathbf{C}$ と $\mathbf{R}^2$ の間の自然な全単射

$$\mathbf{C} \ni z \mapsto (\Re z, \Im z) \in \mathbf{R}^2$$

により，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ と $\mathbf{C}$ を同一視する (これを $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ と書く)．

複素数の列 $z_\nu \in \mathbf{C}$，$\nu = 1, 2, \ldots$, を $\{z_\nu\}_{\nu=1}^\infty = \{z_\nu\}_\nu$ と書き**複素数列**と呼ぶ．複素数列の収束は，$\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ の点列としての収束として定義する (定義 1.2.4)．これを複素数の絶対値を用いて表せば，ある $\alpha \in \mathbf{C}$ が存在して任意の $\varepsilon > 0$ に対しある番号 $N \in \mathbf{N}$ があって

$$|z_\nu - \alpha| < \varepsilon, \qquad \forall \nu \geq N.$$

このとき，

$$\lim_{\nu \to \infty} z_\nu = \alpha$$

と書く．これは，$\lim_{\nu\to\infty} \Re z_\nu = \Re \alpha$ かつ $\lim_{\nu\to\infty} \Im z_\nu = \Im \alpha$ と同値である．

実数列の場合と同様に四則演算について次が成立する．

命題 1.4.1　二つの複素数列 $\{z_\nu\}_{\nu=1}^\infty, \{w_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ がそれぞれ α, β に収束するとする．このとき次が成立する．

(i) $\lim_{\nu\to\infty}(z_\nu + w_\nu) = \alpha + \beta$.

(ii) $\lim_{\nu\to\infty}(z_\nu w_\nu) = \alpha\beta$.

(iii) $w_\nu \neq 0$ $(\forall \nu \in \mathbf{N})$ かつ $\beta \neq 0$ ならば，$\lim_{\nu\to\infty}\left(\dfrac{z_\nu}{w_\nu}\right) = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

複素数列 $\{z_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が**コーシー列**であることも，実数列の場合と同様に定義される．すなわち，

1.4.2 (コーシー条件)　任意の $\varepsilon > 0$ に対しある番号 $N \in \mathbf{N}$ があって

$$|z_\nu - z_\mu| < \varepsilon, \qquad \forall \nu, \mu \geq N.$$

定理 1.1.20 より次が成立する．

定理 1.4.3 複素数列が収束するためには，コーシー列であることが必要十分条件である．

$\{z_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ を複素数列として形式和

$$\sum_{\nu=0}^\infty z_\nu$$

を**複素級数**と呼ぶ．ここでは便宜上，番号付けを $\nu=0$ から始めることとする．その N **部分和**を $s_N=\sum_{\nu=0}^N z_\nu$ $(\in \mathbf{C},\ N=0,1,2,\ldots)$ と定義する．複素数列 $\{s_N\}_{N=0}^\infty$ が収束するとき複素級数 $\sum_{\nu=0}^\infty z_\nu$ は収束するといい，

$$\alpha := \lim_{N\to\infty} s_N = \sum_{\nu=0}^\infty z_\nu$$

と書く．α をこの級数の**極限**あるいは**和**と呼ぶ．このとき，複素級数 $\sum_{\nu=0}^\infty z_\nu$ に対するコーシー条件は次のように述べられる：

1.4.4 (コーシー条件 (複素級数)) 任意の $\varepsilon>0$ に対しある番号 $N\in\mathbf{N}$ があって

$$|z_\mu+z_{\mu+1}+\cdots+z_\nu|<\varepsilon, \qquad \text{(共に任意の) } \nu\ge\mu\ge N.$$

定理 1.4.3 より次が成立する．

定理 1.4.5 複素級数が収束するためには，コーシー条件が満たされることが必要十分条件である．

二つの複素級数 $\sum_{\nu=0}^\infty z_\nu$, $\sum_{\nu=0}^\infty w_\nu$ がそれぞれ α,β に収束するとき次が成立する．

$$\sum_{\nu=0}^\infty (az_\nu+bw_\nu)=a\alpha+b\beta \qquad (a,b\in\mathbf{C}).$$

二つの級数の積については注意を要する．それは，級数はその並べ方を指定して定義され，積 $\sum_{\nu,\mu\ge0} z_\nu w_\mu$ もその並べ方を指定しないと意味を成さないからである．実数の級数に対しては絶対収束すれば，極限はその並べ方に依らないことを定理 1.1.31 で示した．それを複素級数に拡張しよう．

定義 1.4.6 複素級数 $\sum_{\nu=0}^\infty z_\nu$ が**絶対収束**するとは，正項級数 $\sum_{\nu=0}^\infty |z_\nu|$ が収束することである．これは，その実部および虚部からなる級数が絶対収束することと同値である．

定理 1.1.31 より次が成立する．

定理 1.4.7 絶対収束する複素級数は，収束しその和は並べ方に依らない．

二つの複素級数 $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$, $\sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu$ に対し

$$v_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\lambda} z_\nu w_{\lambda-\nu}, \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots$$

とおいた級数 $\sum_{\lambda=0}^{\infty} v_\lambda$ を $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ と $\sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu$ の**コーシー積**と呼ぶ．

定理 1.4.8 $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$，$\sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu$ を絶対収束する複素級数とすると，そのコーシー積 $\sum_{\lambda=0}^{\infty} v_\lambda$ も絶対収束し

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} v_\lambda = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu\right)\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu\right). \tag{1.4.9}$$

証明　$N \in \mathbf{Z}_+$ とする．絶対収束については，次より明らかであろう．

$$\sum_{\lambda=0}^{N} |v_\lambda| \leq \left(\sum_{\nu=0}^{N} |z_\nu|\right)\left(\sum_{\mu=0}^{N} |w_\mu|\right) \leq \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu|\right)\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} |w_\mu|\right).$$

(1.4.9) は次より従う．

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{\lambda=0}^{2N} v_\lambda - \left(\sum_{\nu=0}^{N} z_\nu\right)\left(\sum_{\mu=0}^{N} w_\mu\right)\right| = \left|\sum_{\substack{\nu+\mu\leq 2N \\ \nu>N}} z_\nu w_\mu + \sum_{\substack{\nu+\mu\leq 2N \\ \mu>N}} z_\nu w_\mu\right| \\
&\leq \sum_{\substack{\nu+\mu\leq 2N \\ \nu>N}} |z_\nu|\cdot|w_\mu| + \sum_{\substack{\nu+\mu\leq 2N \\ \mu>N}} |z_\nu|\cdot|w_\mu| \\
&= \left(\sum_{\nu=0}^{2N} |z_\nu|\right)\left(\sum_{\mu=0}^{2N} |w_\mu|\right) - \left(\sum_{\nu=0}^{N} |z_\nu|\right)\left(\sum_{\mu=0}^{N} |w_\mu|\right) \longrightarrow 0 \quad (N \to \infty). \qquad \square
\end{aligned}$$

1.5　関数

1.5.1　複素関数

$E \subset \mathbf{R}^n$ から $\mathbf{C}$ への写像

$$f : x \in E \longrightarrow f(x) \in \mathbf{C}$$

を E 上の**複素関数**または**複素数値関数**と呼ぶ．特に，$f(x) \in \mathbf{R}$ $(\forall x \in E)$ であるとき $f : E \to \mathbf{R}$ を**実関数**または**実数値関数**と呼ぶ．

本書では，もっぱら複素数値関数を考えるので，これを単に**関数**と呼ぶ．$f(x) = u(x) + iv(x)$ と実関数 $u(x), v(x)$ をもって表すとき，$\Re f := u$，$\Im f := v$ を f の**実部**，**虚部**という．

$p \in \mathbf{R}^n$ を E の集積点とするとき，ある $\alpha \in \mathbf{C}$ があって，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon, \quad \forall x \in E \cap B(p; \delta) \setminus \{p\} \tag{1.5.1}$$

が成立するとき，$f(x)$ は a で**極限値**または単に**極限** α をもつといい，

$$\alpha = \lim_{x \to p} f(x)$$

と書く．特に，x が E の元であることを明示するときは，

$$\alpha = \lim_{E \ni x \to p} f(x)$$

と書く．$\alpha \neq 0$ ならば

$$\lim_{x \to p} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha}$$

が成立する．

$g : E \to \mathbf{C}$ も関数で $p \in E$ で極限をもつとき，$a, b \in \mathbf{C}$ を定数として

$$\lim_{x \to p} (af(x) + bg(x)) = a \lim_{x \to p} f(x) + b \lim_{x \to p} g(x)$$

が成立する．

定義 1.5.2　(i) 関数 $f : E \to \mathbf{C}$ が，$p \in E$ で**連続**であるとは，p が E の孤立点であるか，もしくは集積点である場合には

$$f(p) = \lim_{x \to p} f(x)$$

が成立することである．

(ii) f が，全ての点 $p \in E$ で連続であるとき，f を E 上の**連続関数**と呼ぶ．

(iii) f が，E 上**一様連続**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in E,\ \|x - y\| < \delta$$

が成立することである．

$f(x)$ が $p \in E$ で連続ならば，その実部，虚部も p で連続である．また，$f(p) \neq 0$ ならば，$\frac{1}{f(x)}$ は，p で連続である．

上述の連続性は，関数 $f(x), g(x)$ と定数 $a, b \in \mathbf{C}$ による線形和

$$af(x) + bg(x)$$

について保たれる．

もちろん，E 上一様連続ならば E 上連続である．しかし，一般に逆は成り立たない．例えば，$f(x) = 1/x,\ x \in E = (0, \infty)$ とすると，これは連続であるが一様連続ではない．連続性は，局所的性質であるが，一様連続性は，局所的性質ではない．しかし E によってはそれが成立する場合がある：

定理 1.5.3　(i) $\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合 E 上の実数値連続関数 f は，そこで最大値 (および，最小値) を持つ．つまり，ある $x_0 \in E$ があって，$f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in E\}$ (および，$f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in E\}$) が成立する．

(ii) $\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合上の連続関数は，一様連続である．

証明　(i) $E \subset \mathbf{R}^n$ をコンパクト集合 (定理 1.2.12 (ii))，$f : E \to \mathbf{R}$ を連続関数とする．定義より，E に点列 $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ がとれて，

$$\alpha := \sup\{f(x) : x \in E\} = \lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu).$$

定理 1.2.12 (ii) より，$\{x_\nu\}$ は収束する部分列を持つので，$\{x_\nu\}$ は収束するとしてしてよい．$x_0 = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu$ とおく．E は閉集合であるから，$x_0 \in E$．$f(x)$ は x_0 で連続であるから

$$\alpha = \lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu) = f(x_0).$$

最小値については，$-f(x)$ の最大値を考えればよい．

(ii) $E \subset \mathbf{R}^n$ をコンパクト集合 (定理 1.2.12 (ii))，$f : E \to \mathbf{C}$ を連続関数とする．今，f は一様連続でないとする．すると，ある $\varepsilon_0 > 0$ があって，任意の $\nu \in \mathbf{N}$ に対し，$x_\nu, y_\nu \in E$ があって

$$\|x_\nu - y_\nu\| < \frac{1}{\nu}, \quad |f(x_\nu) - f(y_\nu)| \geq \varepsilon_0$$

となる．$\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}, \{y_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ はとり方から同じ極限 $p \in E$ をもつ．

$$|f(x_{\nu_j}) - f(y_{\nu_j})| \geq \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

であるから $j \to \infty$ として極限をとると

$$|f(p) - f(p)| = 0 \geq \varepsilon_0 > 0$$

と矛盾を得る． □

部分集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ と点 $x \in \mathbf{R}^n$ の距離を

$$d(x, E) = \inf\{\|x - y\| : y \in E\} \tag{1.5.4}$$

と定義する．$E = \emptyset$ ならば，$d(x, E) = \infty$ である ((1.1.4) より)．E が非空閉集合ならば，$d(x, E) = d(x, y_0)$ となる $y_0 \in E$ が存在する．したがってこの場合，

$$d(x, E) > 0, \qquad x \notin E. \tag{1.5.5}$$

補題 1.5.6 $E \neq \emptyset$ ならば，

$$|d(x, E) - d(x', E)| \leq \|x - x'\|, \quad x, x' \in \mathbf{R}^n.$$

特に，$d(x, E)$ は連続である．

証明　定義より

$$d(x', E) \leq d(x, E) + \|x - x'\|.$$

よって，$d(x', E) - d(x, E) \leq \|x - x'\|$．$x$ と x' を入れ替えれば，$d(x, E) - d(x', E) \leq \|x - x'\|$．したがって，求める式がでる． □

定理 1.5.7 (ウリゾーン**)** $U \subset \mathbf{R}^n$ を開集合とする．

(i) $E \subset U$ を U 内の閉集合，$V \supset E$ を U 内の開集合とすると，U 上の連続関数 $\chi(x)$ で

$$0 \leq \chi(x) \leq 1 \ (x \in U), \quad \chi|_E = 0, \quad \chi|_{U \setminus V} = 1$$

となるものがある．

(ii) U 内の二つの閉集合 $E, F \subset U$ があり，$E \cap F = \emptyset$ を満たすものとする．このとき，U 上の連続関数 $\chi(x)$ で

$$0 \leq \chi(x) \leq 1 \ (x \in U), \quad \chi|_E = 0, \quad \chi|_F = 1$$

を満たすものがある．

証明　$F = U \setminus V$ または $V = U \setminus F$ とおけば，(i) と (ii) は同値であることが容易にわかる．(ii) を示そう．E, F を空でないとする．

$$\chi(x) = \frac{d(x,E)}{d(x,E)+d(x,F)}, \quad x \in U$$

とおく ((1.5.5) 参照)．補題 1.5.6 よりこれは連続関数であり，求められている式を満たすことは容易にわかる．□

$U \subset \mathbf{R}^n$ を開集合とする．

$$d(x, \partial U) = \inf\{\|x-y\| : y \in \partial U\}, \quad x \in U \tag{1.5.8}$$

は，U の**境界距離関数**と呼ばれる．$\partial U \neq \emptyset$ ならば，それは非負値連続関数である．任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$U_\varepsilon = \{x \in U : d(x, \partial U) > \varepsilon\}$$

とおくと，これは開集合であり

$$U_\varepsilon \cap B(R) \Subset U, \quad \forall\, R > 0. \tag{1.5.9}$$

特に，

$$U = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_{1/\nu} \cap B(\nu) \tag{1.5.10}$$

は，相対コンパクトな開集合による開被覆である．したがって，次の命題が示された．

命題 1.5.11　任意の開集合 $U \subset \mathbf{R}^n$ に対し，単調増大な U の開部分集合の列 U_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) が存在して次を満たす．

$$U_\nu \Subset U_{\nu+1}, \qquad U = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu.$$

1.5.2　連続写像

$X \subset \mathbf{R}^n$，$Y \subset \mathbf{R}^m$ をそれぞれ部分集合とする．

定義 1.5.12　写像 $\varphi : X \to Y$ が**連続写像**であるとは，ベクトル値関数として $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ $(x \in X)$ と表すとき各 $\varphi_j(x)$ が X 上の連続関数であることとする．

命題 1.5.13 $\varphi : X \to Y$ が連続写像であることと，任意の開集合 $V \subset \mathbf{R}^m$ に対し，逆像 $\varphi^{-1}(V \cap Y)$ が X の開集合となることは，同値である．

証明は，$Y = \mathbf{R}^m$ の場合に示せば十分であり，定義に戻ればやさしいので，読者に任す (章末問題 15).

連続写像 $\varphi : X \to Y$ が**固有な写像** (proper map) であるとは，任意のコンパクト部分集合 $K \Subset Y$ に対し逆像 $\varphi^{-1}K$ が X のコンパクト部分集合であることとする．

命題 1.5.14 $\varphi : X \to Y$ を固有な写像とすると，像 $\varphi(X)$ は Y の閉部分集合である．

証明 点列 $x_\nu \in X$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ をとり $\{\varphi(x_\nu)\}_\nu$ が $y \in Y$ に収束しているとき，ある $y \in \varphi(X)$ を示せばよい．$K := \{y, \varphi(x_\nu) : \nu = 1, 2, \ldots\}$ とおくと K は Y のコンパクト部分集合である．仮定より $\varphi^{-1}K \Subset X$ はコンパクトであるから，$\{x_\nu\}_\nu$ は，$\varphi^{-1}K$ の点に収束する部分列 $\{x_{\nu_\mu}\}_{\mu=1}^\infty$ を含む，$x = \lim_\mu x_{\nu_\mu}$ とおくと $x \in \varphi^{-1}K \Subset X$ で，φ は連続であることと $\{x_\nu\}$ のとり方から，$\varphi(x) = y$ $(\in \varphi(X))$.
□

1.5.3 関数列

数列と同様に，関数の列を考える．$f_\nu, \nu = 1, 2, \ldots,$ を $E \subset \mathbf{R}^n$ 上の関数の列とし，

$$f_\nu(x),\ x \in E, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$
$$\{f_\nu(x)\}_{\nu=1}^\infty = \{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty = \{f_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}} = \{f_\nu\}_\nu = \{f_\nu\}$$

等と書く．

定義 1.5.15 (i) E 上の関数列 $\{f_\nu\}$ が，$x \in E$ で**収束**するとは，数列 $\{f_\nu(x)\}$ が収束することである．

(ii) (各点収束) $\{f_\nu\}$ が，E 上**収束**するとは，任意の点 $x \in E$ で $\{f_\nu\}$ が収束することである．これを，特に**各点収束**という．

$$f(x) = \lim_{\nu \to \infty} f_\nu(x), \quad x \in E$$

と書き，$f : E \to \mathbf{C}$ を $\{f_\nu\}$ の**極限関数**と呼ぶ．

(iii) (一様収束) $\{f_\nu\}$ が，E 上**一様収束**するとは，$\{f_\nu\}$ が E 上収束し，その極限関数を f とするとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbf{N}$ があって

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in E,\ \nu \geq N$$

が成立することである．

(iv) (一様コーシー条件) $\{f_\nu\}$ が E 上で**一様コーシー条件**を満たすとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbf{N}$ があって

$$|f_\nu(x) - f_\mu(x)| < \varepsilon, \quad \text{(それぞれ任意の)}\ \nu, \mu \geq N,\ x \in E,$$

が成立することである．

(v) (局所一様収束) E 上の関数列 $\{f_\nu\}$ が**局所一様収束**するとは，任意の点 $p \in E$ に近傍 $V(\subset E)$ があって V へ関数を制限した関数列 $\{f_\nu|_V\}$ が一様収束することである．

(vi) (広義一様収束) E を開集合とする．$\{f_\nu\}$ が，E 上**広義一様収束**するとは，任意のコンパクト部分集合 $K \Subset E$ に制限した関数列 $\{f_\nu|_K\}$ が K 上一様収束することである．

定理 1.5.16 E 上の関数列 $\{f_\nu\}$ について次が成立する．

(i) $\{f_\nu\}$ が E 上一様収束するために，一様コーシー条件は必要十分である．

(ii) 各 f_ν が E 上連続で $\{f_\nu\}$ が一様収束すれば，極限関数も連続である．

(iii) E を開集合とする．$\{f_\nu\}$ が広義一様収束することと，局所一様収束することは同値である．この場合，全ての f_ν が連続ならば極限関数も連続である．

証明　(i) $\{f_\nu\}$ が f に一様収束しているとする．定義より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し在る番号 $N \in \mathbf{N}$ があって

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall\, \nu \geq N,\ \forall\, x \in E.$$

したがって，任意の $\nu, \mu \geq N$ に対し

$$|f_\nu(x) - f_\mu(x)| \leq |f_\nu(x) - f(x)| + |f_\mu(x) - f(x)| < 2\varepsilon, \quad \forall\, x \in E.$$

よって，一様コーシー条件は満たされる．

十分性を示そう．$\{f_\nu\}$ は一様コーシー条件を満たしているとする．$\{f_\nu\}$ が各点収束することは，定理 1.1.20 より従う．極限関数を $f(x) = \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x)$ とする．任

意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbf{N}$ があって

$$|f_\nu(x) - f_\mu(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E,\ \nu > \mu \geq N.$$

ここで，$\nu \to \infty$ とすると

$$|f(x) - f_\mu(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in E,\ \mu \geq N.$$

したがって，一様収束性が従う．

(ii) 条件より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbf{N}$ があって

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E,\ \nu \geq N.$$

$\nu \geq N$ を一つ固定する．f_ν は連続であるから任意の $x_0 \in E$ に対しある $\delta > 0$ が存在して

$$|f_\nu(x) - f_\nu(x_0)| < \varepsilon, \quad x \in E \cap B(x_0; \delta).$$

以上より，$x \in E \cap B(x_0; \delta)$ に対し

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_\nu(x)| + |f_\nu(x) - f_\nu(x_0)| + |f_\nu(x_0) - f_\nu(x_0)| < 3\varepsilon.$$

よって，$f(x)$ は x_0 で連続である．

(iii) $\{f_\nu\}$ が広義一様収束するとする．$p \in E$ に対し，十分小さな $r > 0$ をとれば $\overline{B(p; r/2)} \Subset B(p; r) \subset E$ となる．$\overline{B(p; r/2)}$ はコンパクトであるから $V = B(p; r/2)$ととれば，$\{f_\nu|_V\}$ は一様収束する．

逆に，任意のコンパクト部分集合 $K \Subset E$ をとる．各点 $p \in K$ に対し，近傍 $V_p \subset E$ があって $\{f_\nu|_{V_p}\}$ が一様収束する．$K \subset \bigcup_{p \in K} V_p$ であるからハイネ・ボレルの定理 1.2.14 により，有限個の点 $p_1, \ldots, p_l \in K$ があって

$$K \subset V_{p_1} \cup \cdots \cup V_{p_l}.$$

よって，$\{f_\nu|_K\}$ は一様収束する．　□

1.5.4　関数項級数

$E \subset \mathbf{R}^n$ 上の関数列 $\{f_\nu\}$ が与えられたとき，その形式和

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x), \quad x \in E, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \tag{1.5.17}$$

を**関数項級数**と呼ぶ．その部分和を

$$s_l(x) = \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu(x), \quad x \in E, \quad l = 1, 2, \ldots,$$
$$s_l = \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu, \quad l = 1, 2, \ldots$$

と書き，部分和の関数列 $\{s_l\}$ が収束するとき関数項級数 (1.5.17) は**収束**するという．**一様収束**についても同様である．収束するとき，その極限関数を (1.5.17) と同じ記法で

$$(1.5.18) \qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) = \sum\nolimits_\nu f_\nu(x), \quad x \in E; \qquad f = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu = \sum\nolimits_\nu f_\nu$$

と書く．

関数項級数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ の**一様コーシー条件**は，次の様に述べられる：任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbf{N}$ があって

$$|f_\mu(x) + \cdots + f_\nu(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in E,\ \nu > \mu \geq N.$$

定義 1.5.19　(i) 関数項級数 $\sum_\nu f_\nu$ が**絶対収束**とは，$\sum_\nu |f_\nu(x)|$ が各点収束することと定義する．

(ii) $\sum_\nu |f_\nu(x)|$ の収束が定義されているところで一様であるとき，$\sum_\nu f_\nu$ は**一様絶対収束**であるという．

(iii) 開集合 U $(\subset \mathbf{R}^n)$ で定義された関数項級数 $\sum_\nu f_\nu$ が**広義一様収束**，または**広義一様絶対収束**するとは，任意のコンパクト部分集合 $K \Subset U$ 上で $\sum_\nu f_\nu$ が一様収束または一様絶対収束することとする．

級数の場合と同様に，関数項級数 $\sum_\nu f_\nu(x)$ が絶対 (または，一様絶対) 収束すれば，$\sum_\nu f_\nu(x)$ は各点 (または，一様) 収束し，極限関数は項を並べ替えても変わらない．

注意 1.5.20 局所一様絶対収束についても同様に定義される (定義 1.5.15 (v) を参照)．開集合上の関数項級数について，広義一様絶対収束と局所一様絶対収束は同値である (定理 1.5.16 (iii) 参照)．

正項級数 $\sum_\nu M_\nu$ が与えられ，

$$|f_\nu(x)| \leq M_\nu, \qquad x \in E, \quad \nu \in \mathbf{N}$$

が満たされているとき，$\sum_\nu M_\nu$ は，$\sum_\nu f_\nu$ の**優級数**であるという．

定理 1.5.21 (優級数判定法) E 上の関数項級数 $\sum_\nu f_\nu$ は，収束する優級数をもてば一様絶対収束する．

証明　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbf{N}$ があって

$$\sum_{j=\mu}^{\nu} M_j < \varepsilon, \quad \nu > \mu \geq N.$$

任意の $x \in E$ と $\nu > \mu \geq N$ に対し

$$\left| \sum_{j=\mu}^{\nu} f_j(x) \right| \leq \sum_{j=\mu}^{\nu} |f_j(x)| \leq \sum_{j=\mu}^{\nu} M_j < \varepsilon.$$

したがって，$\sum_\nu f_\nu$ は一様絶対収束する． □

1.5.5 偏導関数

開集合 $U \subset \mathbf{R}^n$ 上の関数 $f : U \to \mathbf{C}$ を考える．$x = (x_j) \in U$ で次の極限を考える：

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots x_j, \ldots, x_n)}{h} \tag{1.5.22}$$

これが存在するとき，その極限を $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ と書き，f の x での (変数 x_j に関する) **偏微分係数**と呼ぶ．これが，全ての点 $x \in E$ で存在するとき，

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : x \in U \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathbf{C}$$

を f の (変数 x_j に関する) **偏導関数**と呼ぶ．

$n = 1$ のときは，$x = x_1$ として $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$ と表し，単に微分係数，導関数と呼ぶ．

$f(x)$ が実関数で偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ が存在するとき，任意の $x \in U$ と $\delta \in \mathbf{R}$ に対し次の形の平均値定理が成立する (変数が f の定義域に入っていると仮定して)：

$$f(x_1, \ldots, x_j + \delta, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \tag{1.5.23}$$

$$= \delta \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_j + \theta\delta, \dots, x_n), \quad 0 < \exists \theta < 1.$$

証明は，読者に任す．

さらに偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ の変数 x_h に関する偏微分係数，偏導関数が考えられる．それが存在するとき

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_j}(x)$$

と表す．これを 2 階偏導関数と呼ぶ．これを繰り返して，k 階偏導関数を考えることができる．

f が連続であるとき，C^0 級であるという．f の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}, 1 \leq j \leq n$ が存在して，それ等が全て連続であるとき f は C^1 級であるという．$k \geq 0$ に対し，U 上 k 階までの全ての偏導関数が存在して連続であるとき，f は C^k **級**といい，そのような関数の全体を $C^k(U)$ と表す．$C^k(U)$ は，体 $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間になる．$C^\infty(U) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(U)$ に属する関数を無限回偏微分可能関数と呼び C^∞ 級であるという．

命題 1.5.24 (i) (ライプニッツの公式) C^k 級の関数 $f(x), g(x)$ があるとき，積 $f(x) \cdot g(x)$ も C^k 級で，$k \geq 1$ ならば次が成立する:

$$\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) \tag{1.5.25}$$

(ii) (合成関数の偏微分の公式) 次に，C^k 級の関数

$$\begin{aligned} f_l(x) &= f_l(x_1, \dots, x_n), \quad l = 1, 2, \dots, m, \\ u_l &= \Re f_l(x_1, \dots, x_n), \quad l = 1, 2, \dots, m, \\ v_l &= \Im f_l(x_1, \dots, x_n), \quad l = 1, 2, \dots, m, \\ h((u_l, v_l)) &= h(u_1, v_1, \dots, u_m, v_m), \end{aligned}$$

があって合成 $h \circ f(x) = h(f(x)) := h((\Re f_j(x), \Im f_j))$ が可能であるとする．このとき $h \circ f$ も C^k 級で，$k \geq 1$ ならば

$$\frac{\partial (h \circ f)}{\partial x_j}(x) = \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial h}{\partial u_l}(f(x)) \cdot \frac{\partial \Re f_l}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial h}{\partial v_l}(f(x)) \cdot \frac{\partial \Im f_l}{\partial x_j}(x) \right) \tag{1.5.26}$$

が成立する．

(iii) (一次近似) $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ を C^1 級関数とする．(ノルムが) 十分小さな $h=(h_1,\ldots,h_n)$ に対して

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_j+o(\|h\|). \tag{1.5.27}$$

ここで，$o(\|h\|)$ は**ランダウの記号**と呼ばれるもので，

$$\lim_{h\to 0}\frac{o(\|h\|)}{\|h\|}=0$$

を満たす項を表す．

証明　全て，実関数の場合に帰着できる．(iii) では $f(x+th)$ $(t\in[0,1])$ を考え，一変数 t に関する平均値定理と (1.5.25) を用いる．詳細は，読者に任す．　□

1.6　曲線とホモトピー

1.6.1　曲線

$U\subset\mathbf{R}^n$ を開集合，$I=[a,b]\subset\mathbf{R}$ を有界閉区間とする．連続写像

$$\varphi: t\in I\longrightarrow\varphi(t)\in U \tag{1.6.1}$$

を U 内の**曲線**と呼ぶ．像 $\varphi(I)$ を C と書き，$t\in I$ を C の**パラメーター**と呼ぶ．$\varphi(a)$ を C の**始点**，$\varphi(b)$ を C の**終点**と呼ぶ．厳密には，曲線はパラメーター付きで考えなければならない．そのときは，

$$C:\ \varphi: I=[a,b]\longrightarrow U,\qquad C(\varphi:[a,b]\to U) \tag{1.6.2}$$

と書くことにする．曲線は，パラメーター t が a から b へ向かって動くとき，$\varphi(t)$ は始点 $\varphi(a)$ から終点 $\varphi(b)$ へ向かって動く．この向きを曲線 C の**向き**と呼び，C を**向き付けられた曲線**という．このいい方は直感的であるが，パラメーターを用いる限り自然に決まるので，数学的厳密性は失われない．

注意 1.6.3 本書では，曲線と言えば，明示されていなくともパラメーター付けられていて，向き付けられているものとする．

像が同じでも曲線としては異なる場合がある．例えば，

$$\begin{aligned} C:&\ \varphi : t \in [0,1] \longrightarrow (t,t) \in \mathbf{R}^2, \\ \tilde{C}:&\ \tilde{\varphi} : t \in [0,1] \longrightarrow (1-|2t-1|, 1-|2t-1|) \in \mathbf{R}^2, \end{aligned}$$

とすると，像についいては $\varphi([0,1]) = \tilde{\varphi}([0,1])$ であるが，C の始点は 0，終点は $(1,1)$ であり，$\tilde{C}$ の始点および終点は共に 0 である．

パラメーター t の正定数倍と平行移動

$$t' \longmapsto t = ct' + d$$

により変換したものは，同じ曲線として同一視する．

一般に曲線の始点と終点が一致するとき，それを**閉曲線**と呼ぶ．(1.6.2) の φ が始点と終点を除いて単射であるとき，C を**ジョルダン曲線**または**単純曲線**と呼ぶ．

二つの曲線

$$C_j:\ \phi_j : [a_j, b_j] \longrightarrow U, \quad j = 1, 2,$$

があり，$\phi_1(b_1) = \phi_2(a_2)$ とする．パラメータの平行移動で，$b_1 = a_2$ と仮定できる．このとき，C_1 と C_2 の**曲線の和** $C_1 + C_2$ が次で定義される：

$$\varphi : t \in [a_1, b_2] \longrightarrow \begin{cases} \phi_1(t), & a_1 \le t \le b_1, \\ \phi_2(t), & a_2 \le t \le b_2. \end{cases}$$

仮に，$\phi_2(b_2) = \phi_1(a_1)$ であっても $C_1 + C_2 = C_2 + C_1$ とは限らないが，習慣的に "+" の記号を用いる．

曲線 C(1.6.2) に対し

$$-C:\ \psi : t \in [a,b] \longrightarrow \varphi(b + (a-t)) \in U \tag{1.6.4}$$

と定義する．$C_1 + (-C_2)$ が定義されるとき

$$C_1 - C_2 = C_1 + (-C_2)$$

と書く．

曲線 C(1.6.2) が**線分**とは，ある方向ベクトル $v \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ と $p_0 \in \mathbf{R}^n$ があって

$$\varphi(t) = t \cdot v + p_0$$

と表されることとする．有限個の線分 $C_j, 1 \le j \le l$ があって曲線の和 $C_1 + \cdots + C_l$ が定義されているとき，

$$C_1 + \cdots + C_l$$

を**折線曲線**と呼ぶ．

曲線 C(1.6.2) で

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

と書くとき，C が C^1 **級**とは，φ_j $(1 \le j \le n)$ が I を含むある開区間上の C^1 級関数の I への制限になっていることとする．$t \in I$ での微分係数のベクトル

$$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \ldots, \varphi_n'(t))$$

を C の $\varphi(t)$ での**接ベクトル**または**速度ベクトル**と呼ぶ．

C^1 級曲線 $\varphi(t) = (\varphi_j(t)), t \in [a, b]$ の**パラメーター変換**とは，ある閉区間 $[c, d]$ の近傍上で定義された C^1 級関数 $\tau(s)$ で $\varphi \circ \tau : [c, d] \to U$ と表される曲線を意味する．ここで，$\tau(s)$ は

$$\begin{aligned} &a = \tau(c), \quad b = \tau(d), \\ &\frac{d\tau}{ds}(s) > 0, \quad c \le s \le d, \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

を満たすものとする，パラメーター変換で得られた曲線は，もとの C^1 級曲線と同一視する．

有限個の C^1 級曲線 $C_j, 1 \le j \le l$ があって曲線の和 $C_1 + \cdots + C_l$ が定義されているとき，

$$C_1 + \cdots + C_l$$

を**区分的 C^1 級曲線**と呼ぶ．

U が**弧状連結**とは，任意の二点 $P, Q \in U$ に対し，P を始点，Q を終点とする U 内の曲線が存在することとする．このとき，P と Q は，曲線で結べるという．

命題 1.6.6 開集合 U が連結であるために弧状連結であることが必要十分条件である．実際には，U が連結ならばその任意の二点は U 内の区分的折れ線曲線で結べる．

証明　定理 1.2.18 で示した閉区間 $[a, b] \subset \mathbf{R}$ の連結性と，曲線

$$C: \ \varphi : [a, b] \to U$$

と開集合 $V \subset U$ をとると逆像 $\varphi^{-1}V$ は $[a,b]$ の開集合であることに注意する．これより，十分性が従う．

必要性は，一点 $P_0 \in U$ をとり P_0 と U 内の折れ線曲線で結べる点 $Q \in U$ の全体を U_0 とすると，容易に U_0 は開かつ閉であることがわかる．連結性の定義より，$U = U_0$ となる． □

曲線 $C(\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n)$ が区分的 C^1 級であるとする．定義により

$$a = t_0 < \cdots < t_j < \cdots < t_l = b \tag{1.6.7}$$

と並ぶ分点 t_j があって制限 $\varphi|_{[t_{j-1},t_j]}$ は C^1 級である．$t \in [t_{j-1}, t_j]$ での微分のノルム

$$\|\varphi'(t)\| = \|(\varphi_1'(t), \ldots \varphi_n'(t))\|$$

は $[t_{j-1}, t_j]$ 上連続関数であるからリーマン積分可能となる．**曲線 C の長さ**を

$$L(C) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt = \sum_{j=1}^{l} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\varphi'(t)\| dt \tag{1.6.8}$$

と定める．二つの区分的 C^1 曲線の和 $C_1 + C_2$ に対して

$$L(C_1 + C_2) = L(C_1) + L(C_2).$$

$n = 2$, $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{C}$ では，$(x,y) \in \mathbf{R}^2$ に $z = x + iy$ が対応し $|z| = \|(x,y)\|$ である．$\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ と書くと，$\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t)$ であり，

$$L(C) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt. \tag{1.6.9}$$

1.6.2　ホモトピー

開集合 $D \subset \mathbf{R}^n$ と D 内の曲線を考える時，定理 1.2.23 と命題 1.6.6 より，D を領域として一般性を失わない．以下，D は，領域とする．

D 内の二つの曲線

$$C_j : \ \phi_j : I_j \longrightarrow D, \quad j = 0, 1$$

を考える．

定義 1.6.10 C_0 と C_1 が D 内で**ホモトープ**とは，パラメーターの正定数倍と平行移動で $I_0 = I_1 = [0,1]$ と揃えるとき，次が成立することである．

(i) $P := \phi_0(0) = \phi_1(0)$，$Q := \phi_0(1) = \phi_1(1)$.
(ii) 連続写像

$$\Phi : (t,s) \in [0,1] \times [c,d] \longrightarrow D \tag{1.6.11}$$

が存在して次の性質を満たす.

$$\begin{aligned} &\Phi(t,c) = \phi_0(t), \quad &&\Phi(t,d) = \phi_1(t), \quad &&0 \le t \le 1, \\ &\Phi(0,s) \equiv P, &&\Phi(1,s) \equiv Q, &&c \le s \le d. \end{aligned}$$

C_1 と C_2 が D 内でホモトープであるとき，

$$C_1 \simeq C_2$$

と書き，上記 Φ を D 内で C_0 と C_1 を結ぶ**ホモトピー**と呼ぶ．始点と終点を指定された D 内の曲線全体の集合の中で，$C_1 \simeq C_2$ は，同値関係となる．

$C_1 \simeq C_1'$，$C_2 \simeq C_2'$ で $C_1 + C_2$ が定義されるとき，$C_1' + C_2'$ も定義され

$$C_1 + C_2 \simeq C_1' + C_2'.$$

(1.6.11) で $P = Q$ かつ $\phi_1(t) \equiv P$ (定曲線) が成立するとき，C_0 は，D 内で**ホモトープ** 0 (ゼロ) であるといい，$C_0 \simeq 0$ と書く．

定義 1.6.12 D が**単連結**とは，D 内の任意の閉曲線が D 内でホモトープ 0 であることをいう．単連結でないとき，**多重連結**であるという．

$E \subset \mathbf{R}^n$ の任意の二点が E 内の線分で結べるとき，E は**凸**であるという．

例 1.6.13 $\mathbf{R}^n$ の凸開集合 E は単連結である．実際 $C(\varphi : I = [a,b] \to E)$ を E 内の任意の連続閉曲線，$P = \varphi(0)$ として，

$$\Phi(t,s) = (1-s)\varphi(t) + sP, \quad (t,s) \in [a,b] \times [0,1]$$

とおけば，これは連続写像であり，E が凸であることから，各 $s \in [0,1]$ に対して $\Phi(t,s)$ $(t \in I)$ は E 内の曲線であり，C は P にホモトープである．

最後に，$\mathbf{C}$ では，これを複素平面 $\mathbf{C}\cong\mathbf{R}^2$ とみて $\mathbf{R}^n$ について定義した諸概念を用いる．次の定理はよく知られている．

定理 1.6.14 (ジョルダン) $\mathbf{C}$ 内のジョルダン閉曲線は $\mathbf{C}$ を二つの領域に分け，どちらか一つは有界で単連結である．

つまり，$\mathbf{C}\setminus C = D_1 \cup D_2$ $(D_1 \cap D_2 = \emptyset)$ となる二つの領域 D_1, D_2 があり，どちらか一方，例えば D_1 は有界で単連結である．

このジョルダンの定理は，命題文の簡潔なことに比してその証明は，たいへん難しい．この定理を使うと，一変数関数論におけるいくつかの定理の表現が簡潔になるが，本書では，それに依らない表現を採用するので，証明は略す．[3)]

1.7　リーマン球面

本節では拡張された複素平面とリーマン球面の定義を与える．さらに関数論において基本的な一次変換について述べる．

実 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ にその直交座標系 (t_1, t_2, t_3) をとる．原点 O を中心とする半径 1 の球面 $\mathbf{S}$ を考える．式で書けば

$$\mathbf{S} = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbf{R}^3 : t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1\} \tag{1.7.1}$$

となる．$t_3 = 0$ で定義される $\mathbf{R}^3$ の超平面を

$$t_1 = x, \quad t_2 = y, \quad z = x + iy \in \mathbf{C}$$

として $\mathbf{C}$ と同一視する．$\mathbf{S}$ の北極 $\mathrm{N} = (0,0,1)$ とそれ以外の点 $\mathrm{P} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbf{S}\setminus\{\mathrm{N}\}$ を通る直線は $\{t_3 = 0\}\cong\mathbf{C}$ と一点で交わる．その点を $z = z(\mathrm{P})$ とする．対応

$$\mathrm{P} \in \mathbf{S}\setminus\{\mathrm{N}\} \longrightarrow z = z(\mathrm{P}) \in \mathbf{C} \tag{1.7.2}$$

を**立体射影**と呼ぶ (図 1.3 を参照)．計算により次の関係がわかる．

$$\begin{aligned} &t_1 = \frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \quad t_2 = \frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}, \quad t_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}, \\ &x = \frac{t_1}{1-t_3}, \qquad y = \frac{t_2}{1-t_3}, \qquad |z| = \sqrt{\frac{1+t_3}{1-t_3}}. \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

[3)] 例えば一楽重雄，位相幾何学，朝倉書店，§22 を見よ．

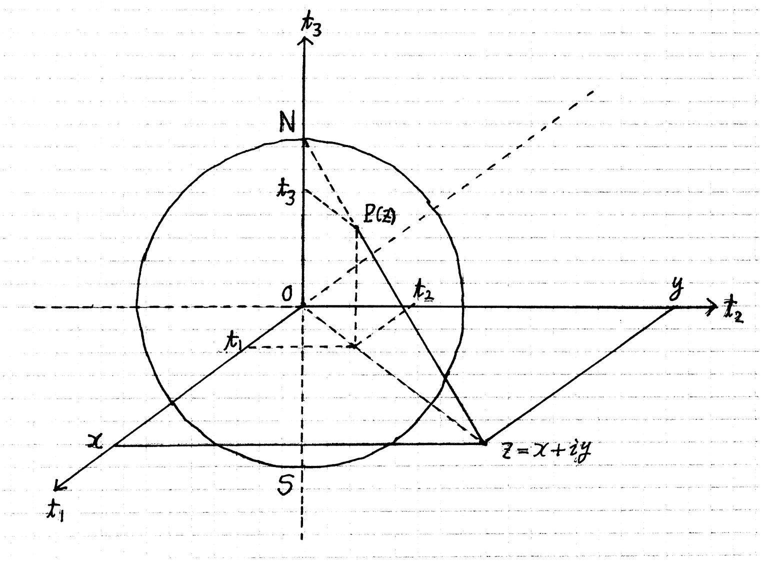

図 1.3: 立体射影

したがって，それぞれ連続関数の関係にある．

S の南極 $\mathrm{S} = (0,0,-1)$ と P を結ぶ線分が $\{t_3 = 0\} \cong \mathbf{C}$ と交わる点を $\hat{z}$ とすると

$$\hat{z} = \frac{1}{\bar{z}}$$

の関係がある．

関係式 (1.7.3) より，“$\mathrm{P} \to \mathrm{N}$” と近づくことと “$|z| \to \infty$” となることは同値になる．そこで，$\mathbf{S} \setminus \{\mathrm{N}\} \cong \mathbf{C}$ と同一視し，N に相当する点を右辺側では ∞ と書くことにする：

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\} \tag{1.7.4}$$

と書く．∞ を ($\mathbf{C}$ の) **無限遠点**と呼ぶ．次の写像が定義される．

$$\pi : \mathrm{P} \in \mathbf{S} \longrightarrow z(\mathrm{P}) \in \hat{\mathbf{C}}, \quad z(\mathrm{N}) = \infty. \tag{1.7.5}$$

この写像は，全単射である．この π により $\hat{\mathbf{C}}$ を **S** と同一視したものを**リーマン球面** (Riemann sphere) と呼び，π を (1.7.2) と同様に**立体射影** (stereographic projection) と呼ぶ．(1.7.4) において $\hat{\mathbf{C}}$ の領域である **C** を**有限平面**と呼ぶことがある．

$\hat{\mathbf{C}}$ の点列の収束，集積点の概念，部分集合が開集合，閉集合であること，また連続関数の概念は，$\mathbf{S} \cong \hat{\mathbf{C}}$ を $\mathbf{R}^3$ の部分集合として定義する．

注意 1.7.6　(i) $\mathbf{C} \cong \mathbf{S} \setminus \{N\}$ においては，両者の上述の概念は一致する．

(ii) $\mathbf{S}$ は $\mathbf{R}^3$ 内の有界閉集合であるからコンパクトである．定義 1.2.15 を $\hat{\mathbf{C}}$ に拡張しておけば，$\hat{\mathbf{C}}$ はコンパクトである．したがって，$\hat{\mathbf{C}}$ の任意の点列は収束する部分列を含み，極限は $\hat{\mathbf{C}}$ の点である．

$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ とおく．$\mathbf{C}$ での代数演算 (可換) を形式的に $\hat{\mathbf{C}}$ へ次の様に拡張する：$\alpha \in \mathbf{C}, \beta \in \mathbf{C}^*$ として，

$$\alpha \pm \infty = \infty, \quad \beta \cdot \infty = \infty, \quad \frac{\beta}{0} = \infty, \quad \frac{\alpha}{\infty} = 0. \quad \frac{\infty}{0} = \infty. \tag{1.7.7}$$

問　題

1. 実数列 $\{a_\nu\}$, $\{b_\nu\}$ について次を示せ．

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} (a_\nu + b_\nu) \leq \varlimsup_{\nu\to\infty} a_\nu + \varlimsup_{\nu\to\infty} b_\nu, \quad \varliminf_{\nu\to\infty} (a_\nu + b_\nu) \geq \varliminf_{\nu\to\infty} a_\nu + \varliminf_{\nu\to\infty} b_\nu.$$

ただし，共に右辺において "$\infty + (-\infty)$" あるいは "$-\infty + \infty$" という型にならないことを仮定する．

2. $k \in \mathbf{N}$ として数列を $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\nu^k}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ とおく．$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = 1$ を §1.1 で述べられた内容にもとづき証明せよ．

3. (a) 複素数 z が実数であるために $\bar{z} = z$ は，必要十分である．
(b) 複素数 z が純虚数であるために $\bar{z} = -z$ は，必要十分である．

4. 実係数の代数方程式が虚根 α をもてば，$\bar{\alpha}$ もその根であることを示せ．

5. 2 次方程式 $x^2 + 2ix - 2 = 0$ は，判別式は正であるが，根は実数でないことと示せ．

6. 複素平面の 3 点 z_1, z_2, z_3 が，$z_1 + z_2 + z_3 = 0$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| > 0$ を満たすならば，それらは正三角形の頂点をなすことを示せ．

7. (a) $\mathbf{C}$ の集合 $\{i^\nu + \frac{1}{\nu}; \nu \in \mathbf{N}\}$ の集積点を求めよ．
(b) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 $E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbf{Q}, 0 < x_j < 1, 1 \leq j \leq n\}$ の閉包 $\bar{E}$ を求めよ．

8. $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ (実無理数) とし，$G = \{p + q\alpha : p, q \in \mathbf{Z}\}$ とおく．次を示せ．
(a) G は加法に関して閉じている：つまり，$\alpha, \beta \in G \implies \alpha \pm \beta \in G$.
(b) G は $\mathbf{R}$ で稠密である：つまり，閉包 $\bar{G} = \mathbf{R}$.

9. 数列 $\{a_\nu\}_\nu$ が α に収束しているとき，次を示せ．

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu}{N} = \alpha.$$

10. $w = z^2$ $(z \in \mathbf{C})$ による，$\Re z = a$ $(\neq 0)$ および $\Im z = b$ $(\neq 0)$ の像はいずれも放物線であって，互いに直交する (つまり，両者の交点において接線が互いに直交する) ことを示せ．

11. $c_0 > c_1 > \cdots > c_d > 0$ ならば，$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_d z^d$ $(z \in \mathbf{C})$ は，$|z| \leq 1$ で零点をもたないことを示せ．(掛谷の定理)

12. (a) $p, q \in \mathbf{N}$ として，$\lim_{z \to 1} \frac{z^p - 1}{z^q - 1}$ を求めよ．

(b) $\lim_{z \to i} \frac{z^4 - 1}{z - i}$ を求めよ．

13. $f(z) = \frac{z^3 - 1}{z - 1}$ のとき $|f(z)|$ の $\Delta(1)$ における上限・下限を求めよ．

14. 関数列 $f_\nu(z) = z^\nu$，$\nu = 1, 2, \ldots$ $(z \in \mathbf{C})$ は，単位円板 $\Delta(1)$ において 0 に広義一様収束するが，一様収束はしないことを示せ．

15. 命題 1.5.13 を証明せよ．

16. 命題 1.5.24 (iii) を証明せよ．

17. 領域 $U \subset \mathbf{R}^n$ 内の任意の曲線 C に対し閉曲線 $C - C$ は U 内でホモトープ 0，$C - C \simeq 0$ であることを示せ．

18. 2 点 $a, b \in \hat{\mathbf{C}}$ のリーマン球面 $\mathbf{S}$ 上での，$\mathbf{R}^3$ のユークリッド距離は

$$d(a, b) = \begin{cases} \frac{2|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}}, & a, b \in \mathbf{C}, \\ \frac{2}{\sqrt{1+|a|^2}}, & a \in \mathbf{C}, b = \infty. \end{cases}$$

で与えられることを示せ．これをリーマン球面の**弦距離**と呼ぶ．

19. $K_\alpha (\alpha \in A)$ を $\hat{\mathbf{C}}$ のコンパクト集合とする．もし任意の有限個の $K_{\alpha_1}, \ldots, K_{\alpha_l}$ に対して $K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_l} \neq \emptyset$ であれば $\cap_{\alpha \in A} K_\alpha \neq \emptyset$ であることを示せ．