値分布と有理点分布 III

野口　潤次郎　(東京大学/東京工業大学（名誉教授）)*

2025 年 9 月 16 日

概　　要

I gave the first talk under this title in the fall of 1997, and the second one in the spring of 2013, coinciding with my retirement. In this third one I would like to talk about some results and findings during the one round of Eto since then. For example, I will discuss an application of a Big Picard Theorem generalized for semi-abelian varieties to the proof of the Manin-Mumford Conjecture (Raynaud's Theorem) on the distribution of torsion points on an abelian variety, combined with the o-minimal theory (2018); here *it is interesting to see the analogy relation between Nevanlinna theory and Diophantine geometry not only at the statement level, but at the proof level.* Applying the value distribution theory, we discuss analytic and rational sections of abelian varieties over function fields and Legendre's elliptic curves (Corvaja-N.-Zannier, 2022), and also the analytic Ax-Schanuel theorem from the view point of Nevanlinna theory (2024). If time allows, I would like to discuss some late result due to Xie-Yuan on the finiteness of rational sections in finite ramified covers of abelian varieties over function fields from the view point of Kobayashi hyperbolic geometry.

1 序

本講演では次の話題に関わる話しをしたい.

(1) 小林双曲的多様体の理論.
(2) Nevanlinna 理論（位数関数評価）.
(3) 有理点の有限性・幾何学的状況（Diophantine geometry）.
(4) 有理点の高さ関数評価 (Roth, Schmidt, および関数体上).

基調となるのは次の予想である：

- Lang 予想 ([La60], [La74]): (1)$\longleftrightarrow$(3). X を代数体 k 上定義された代数多様体とする. $\mathbf{C}$ 上でみて $X_{\mathbf{C}}$ が小林双曲的ならば，その k 有理点集合 $X(k)$ は有限であろう.

---

* 東京大学：〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: noguchi@g.ecc.u-tokyo.ac.jp
web: https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~noguchi/
本研究は科研費 (課題番号:25K07025) の助成を受けたものである。
キーワード：高次元値分布理論，小林双曲性，Nevanlinna 理論，Diophantine 幾何

- Vojta 予想 (Dictionary, [Vo87])：(2)$\longleftrightarrow$(4).
- 関数体上のアナロジー (Manin–Grauert, [Ma63], [Gr65], ...)：(1)+(2) と (3)+(4) の中間的位置にある.

例 1.1（Unit equation） (a) 整関数 $f_j \in \mathscr{O}^*(\mathbf{C})$ $(1 \le j \le n)$ (units) に対し次の恒等式を考える (Borel 恒等式)

$$f_1 + \cdots + f_n = 1.$$

このとき，ある $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I| \ge 2$ が存在して，$\sum_{j \in I} f_j = 0$.

(b) $x_j \in k$ $(1 \le j \le n)$, S-unit (例えば $k = \mathbf{Q}$, $S = \{p_1, \ldots, p_L\}$ (有限個の素数) とすると $p_1^{l_1} \cdots p_L^{l_L}$ $(l_h \in \mathbf{Z})$ が S-unit) に対し次の方程式を考える.

$$x_1 + \cdots + x_n = 1.$$

ある $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I| \ge 2$ が存在して，有限個の解を除いて，$\sum_{j \in I} x_j = 0$.

証明：

(a) $\cdots$ Nevanlinna の位数関数評価.

(b) $\cdots$ Schmidt の高さ関数評価.

このようなアナロジーがある (cf., e.g., [N03], [NW14]).

2 Manin–Mumford–Raynaud (アナロジーを超えて)

定理 2.1（[N18], Manin–Mumford 予想） A, $X \subset A$ を k 上の準アーベル多様体とその部分多様体とする．X のトージョン点全体 X_{tor} のザリスキー閉包を $\bar{X}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{Zar}}$ とする．このとき，有限個の (代数的) 部分群 $B_j \subset A$ $(1 \le j \le N)$ と $a_j \in X_{\mathrm{tor}}$ があって

$$\bar{X}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{Zar}} = \bigcup_{j=1}^{N} (a_j + B_j), \quad X_{\mathrm{tor}} = \bigcup_{j=1}^{N} (a_j + B_{j\mathrm{tor}}).$$

A は次のような完全列をもつ：

$$0 \to (\mathbf{C}^*)^t \to A \to A_0 \text{ (アーベル多様体)} \to 0.$$

$A = (\mathbf{C}^*)^t$, $\dim X = 1$ の場合の Y. Ihara, J.-P. Serre , J. Tate 等の先駆的な仕事の後，$A = A_0$ 場合に Raynaud [Ra83] がこの予想を証明した．その後多くの別証：M. Hindry ’88, E. Hrushovski ’95, ..., Pila–Zannier [PZ08]. 川口周 [Ka21] に，より広い見地からの詳しいサーベイがある.

高次元 Picard の大定理 ([N81a]) を使う別証明 ([N18])：

$\exp : \mathbf{C}^n \to A$ を指数写像とする.

$\dim X$ についての帰納法．$\mathrm{St}^0(X) = \{0\}$ と仮定してよい．次のようにおく.

$$\Lambda := \exp^{-1} 0 \subset \mathbf{C}^n \text{ (semi-lattice)}, \quad Z := \exp^{-1} X.$$

$Q \subset \mathbf{C}^n$ を Λ 基本閉領域とする．実解析的に $Q \cong [0,1]^d$ $(d := 2n-t)$. 次のようにおく．

$$Z_{\mathrm{tor}} = \exp^{-1} X_{\mathrm{tor}} = Z \cap (\mathbf{Q}\Lambda), \quad Z_{\mathrm{tor}0} = Z_{\mathrm{tor}} \cap Q.$$

Pila–Wilkie [PW06] (**"o-minimal" 理論**) により次の分解がある：

$$Z_{\mathrm{tor}0} = Z_{\mathrm{tor}0}^{\mathrm{alg}} \sqcup Z_{\mathrm{tor}0}^{\mathrm{tr}},$$

(1) $Z_{\mathrm{tor}0}^{\mathrm{alg}} = \displaystyle\bigcup_{V \subset Z \subset \mathbf{C}^n, \mathrm{alg.}\ \dim V > 0} (V \cap Q \cap (\mathbf{Q}\Lambda)),$

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある定数 $C_1 > 0$ があって，分母が T 以下の $Z_{\mathrm{tor}0}^{\mathrm{tr}}$ の元の個数 $N_{Z_{\mathrm{tor}0}^{\mathrm{tr}}}(T) \leq C_1 T^{\varepsilon}$ $(T \to \infty)$.

(a) $Z_{\mathrm{tor}0}^{\mathrm{tr}}$： D. Masser [Ms84] の下からの評価:

$$N_{Z_{\mathrm{tor}0}^{\mathrm{tr}}}(T) \geq C_2 T^{\rho}, \qquad \exists \rho > 0, \ \exists C_2 > 0.$$

これと (2) をあわせると，T は有界．したがって，$Z_{\mathrm{tor}0}^{\mathrm{tr}}$ は有限.

(b) $Z_{\mathrm{tor}0}^{\mathrm{alg}}$：

補題 2.2 $\overline{\exp V}^{\mathrm{Zar}} = a + B$, 部分群 B の平行移動.

証明． $V \subset \mathbf{C}^n \subset \mathbf{P}^n$ の境界 ∂V は，局所的には次に帰着できる：

$$\Delta^* \times \Delta^h \supset \Delta^* \times \{w\} \cong \Delta^*, \quad \text{穴あき円板.} \tag{2.3}$$

定理 2.4（[N81a]） $f : \Delta^* \to A$ を 0 で真性特異点をもつ正則写像とし，$Y = \overline{f(\Delta^*)}^{\mathrm{Zar}} \subset A$ とおく．すると，$\dim \mathrm{St}(Y) > 0$ で，$q : A \to A/\mathrm{St}^0(Y)$ を商写像とすると，$q \circ f : \Delta^* \to A/\mathrm{St}^0(Y) \subset \overline{A/\mathrm{St}^0(Y)}$ は，0 を除ける特異点とする．

定義 2.5 一般に，$f : \Delta^* \to A$ が 0 を**狭義真性特異点**とする，あるいは**狭義超越的**であるとは，任意の連結部分群 $B \subset A$ に対して，商写像を $q_B : A \to A/B$ とするとき，$q_B \circ f : \Delta^* \to A/B$ は，0 を真性特異点とするか定写像になる．

定理 2.6（[N81a], [N18]） $f : \Delta^* \to A$ を 0 で狭義真性特異点をもつ正則写像とすると，部分群 B（準アーベル多様体）があって $\overline{f(\Delta^*)}^{\mathrm{Zar}} = a + B$.

補題 2.7 Δ^* を (2.3) のものとすると，$\exp|_{\Delta^*} : \Delta^* \to A$ は 0 を狭義真性特異点とする．

したがって，$\bar{X}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{Zar}}$ は有限個を除いて次の形になる：

$$\bar{X}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{Zar}} = \bigcup_{\alpha} (a_\alpha + B_\alpha), \quad \dim B_\alpha > 0.$$

ただし，B_α は連結部分群である．ここで，B_α として極大な連結部分群だけをとってくれば，それらは有限個で (Kawamata),

$$\bar{X}_{\mathrm{tor}}^{\mathrm{Zar}} = \bigcup_{\alpha, \mathrm{finite}} (a_\alpha + B_\alpha).$$

ここで，有限個は $B_\alpha = \{0\}$ に繰り込んだ．

$\square$

注意 2.8　楕円曲線族 $\mathscr{E} \to R$ を考える．一般には，R を適当にとれば $\Gamma(R, \mathscr{E})$ は大きくなる．一方，普遍族を与える Legendre 標準形を考える：

$$E_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda), \quad \lambda \in R := \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}.$$

ただし，E_λ は，無限遠点を加えてコンパクト化したものを表すとする．$\mathscr{E} = \bigsqcup_{\lambda \in R} E_\lambda$ とおく．すると, $\Gamma(R, \mathscr{E})$ は次の 4 つの 2 トージョン切断しかないことが分かる ([CNZ22])：

$$R \times \{(\infty, \infty)\},\ R \times \{(0,0)\},\ R \times \{(1,0)\},\ \{(\lambda, (\lambda, 0)) \in E_\lambda : \lambda \in R\}.$$

さらに，有理切断だけでなく，解析的切断を考えても，Yamanoi の第 2 主要定理 [Ya06] を用いて同じことが示される ([CNZ22]).

3 解析的 Ax–Schanuel

3.1 Ax–Schanuel

Schanuel 予想． $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ は $\mathbf{Q}$ 上線形独立とすると，

$$\mathrm{tr.deg}_{\mathbf{Q}}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}\} \geq n.$$

非退化性． $\{\ \}$ 内の前半分を $\alpha \in \mathbf{C}^n = \mathrm{Lie}((\mathbf{C}^*)^n)$，後ろ半分を $\exp \alpha \in (\mathbf{C}^*)^n$ とみると，$\mathbf{Q}$ 上線形独立の条件は，$\exp \alpha \in B$ となる部分群 $B \subset (\mathbf{C}^*)^n$ は，$B = (\mathbf{C}^*)^n$ 以外にないことと同値である．

予想の系． e, π は代数的に独立である $(/\mathbf{Q})$.

$\because)\quad \mathrm{tr.deg}_{\mathbf{Q}}\{1, \pi i, e^1, e^{\pi i}\} \geq 2.$

注意 3.1　π, e^π の代数的独立性が Yu V. Nesterenko [Ne96] により示されている．j 関数を使う．

定理 3.2（[Ax71]）　$f_j(t) \in t\mathbf{C}[[t]],\ 1 \leq j \leq n,\ \mathbf{Q}$ 上線形独立とすると，

$$\mathrm{tr.deg}_{\mathbf{C}}\{f_1(t), \dots, f_n(t), e^{f_1(t)}, \dots, e^{f_n(t)}\} \geq n+1.$$

証明は Kolchin の微分代数の理論を用いる．

・$(\mathbf{C}^*)^t \times A_0$ (A_0 はアーベル多様体) の場合：Brownawell–Kubota [BK77] による．方法は，Ax の方法 (Kolchin) を拡張使用.

定義 3.3　A を準アーベル多様体，Lie$A$ をその Lie 代数，$\exp : \mathrm{Lie}A \to A$ を指数写像とする．正則写像 $f : \mathbf{C} \to \mathrm{Lie}A$ が**退化**とは，部分群 $B \subsetneq A$ で $\exp f(\mathbf{C}) \subset f(0) + B$ となること．

定理 3.4（解析的 Ax–Schanuel, N. '24） A を準アーベル多様体，$f:\mathbf{C}\to \mathrm{Lie}(A)$ を非退化整曲線とする．$\widehat{\exp}f=(f,\exp f):\mathbf{C}\to(\mathrm{Lie}A)\times A$ とすると，

$$\mathrm{tr.deg}_{\mathbf{C}}\widehat{\exp}f=\dim_{\mathbf{C}}\overline{\widehat{\exp}f(\mathbf{C})}^{\mathrm{Zar}}\geq n+1.$$

補題 3.5（鍵） $\mathrm{tr.deg}_{\mathbf{C}(f)}\mathbf{C}(f,(\exp f)^*\mathbf{C}(A))\geq 1.$

証明．$\phi_j\in\mathbf{C}(A)$ $(1\leq j\leq n)$ を超越基底とする．$\phi_j^*=f^*\phi_j$ とおく．
仮に，$\mathrm{tr.deg}_{\mathbf{C}(f)}\mathbf{C}(f,(\exp f)^*\mathbf{C}(A))=0$ とすると，

$$T_{\phi_j^*}(r)=O(T_f(r)),\quad 1\leq j\leq n.$$

これより，

$$T_{\exp f}(r)=O(T_f(r)).$$

一方，対数微分の補題 ([N77])“+“α” より

$$T_f(r)=O(\log T_{\exp f}(r))||.$$

ここで，“$||$” とは，$(0,\infty)$ の測度有限な Borel 集合の外の $r>0$ に対し評価式が成立することを意味する．結局，

$$T_{\exp f}(r)=O(\log T_{\exp f}(r))||$$

となり矛盾． □

定理 3.4 の証明． 上の記号で，$\phi^*=(\phi_1^*,\ldots,\phi_n^*)$ とおく．結論を否定すると

$$\mathrm{tr.deg}_{\mathbf{C}}(f,\phi^*)=n.$$

各 f_j に対し代数関係がある：

$$P_j(f_j,\phi^*)=0.$$

仮定と，補題 3.5 より $\mathrm{tr.deg}_{\mathbf{C}}f<n$. 従って，代数関係

$$Q(f_1,\ldots,f_n)=0.$$

順に f_j を消去することにより

$$\tilde{Q}(\phi_1^*,\ldots,\phi_n^*)=0.$$

Log Bloch–Ochiai ([N81a]) より，$\overline{\exp f(\mathbf{C})}^{\mathrm{Zar}}$ は真部分群の平行移動になる．これは，f の非退化条件に反する． □

注意 3.6 型式的巾級数としては，$e^{\log(1+t)}=1+t$ なので，

$$\mathrm{tr.deg}_{\mathbf{C}}(t,\log(1+t),e^t,e^{\log(1+t)})=\mathrm{tr.deg}_{\mathbf{C}}(t,\log(1+t),e^t)=3$$

だが，これには定理 3.4 は使えない．

例 3.7 (1) $\wp(z)$ を Weierstrass のペー関数とすると，e^{z^2}, $\wp(z)$ は共に位数 2 の超越関数で，代数的に独立 $(/\mathbf{C})$.

(2) $\wp(z), \wp(z^2)$ は代数的に独立 $(/\mathbf{C})$.

(3) E_j $(j = 1, 2)$ を同種でない楕円曲線とし，そのペー関数を $\wp_j(z)$ とすると，$\wp_1(z), \wp_2(z)$ は代数的に独立 $(/\mathbf{C})$.（多分これは古典的．コンパクトリーマン面の一意化からも従う．）

(4) (Brownawell–Kubota [BK77]) $y_j \in t\mathbf{C}[[t]]$ $(1 \le j \le n)$ を $\mathbf{C}$ 上線形独立，$\wp_j(z)$ をペー関数とすると

$$\mathrm{tr.\,deg}_{\mathbf{C}}(y_1, \ldots, y_n, \wp_1(y_1), \ldots, \wp_n(f_n)) \ge n + 1.$$

ここで，$y_j \in \mathscr{O}(\mathbf{C})$ を仮定すれば，$\wp_j$ に対応する楕円曲線 E_j の直積 $A = \prod E_j = \mathbf{C}^n/\Lambda$ をとり，$\exp : \mathbf{C}^n \to A$ として $y = (y_1, \ldots, y_n)$ が非退化ならば十分 (定理 3.4)．例えば，E_j $(j = 1, 2)$ を前項 (3) の楕円曲線とすると，$y_1 = t, y_2 = t$ は線形従属であるが，$f : t \in \mathbf{C} \to (t, t) \in \mathrm{Lie}(E_1 \times E_2)$ は非退化である．

3.2 $(\mathrm{Lie}A) \times A$ に対する Nevanlinna 理論

A を準アーベル多様体とする．$T_{\mathrm{Lie}A} = T_A = J_1 A$ (1 ジェット空間)．これより，$\widehat{\exp} A = A \times \mathrm{Lie}A$ への $\widehat{\exp} f$ の形の正則写像のジェット空間は，特別な型になる：

$$J_k(A \times \mathrm{Lie}A) \cong A \times \mathrm{Lie}A \times J_{k,A}.$$

$J_{k,A}$ は $J_k(A)$ のジェット成分である．

定理 3.8（[N24]） 上の記号で，$f : \mathbf{C} \to \mathrm{Lie}A$ は非退化整曲線とする．その k ジェットリフト $J_k\widehat{\exp} f : \mathbf{C} \to J_k(A \times \mathrm{Lie}A)$ の像のザリスキー閉包を $X_k(\widehat{\exp} f)$ とする．

代数的な部分集合 $Z \subset X_k(\widehat{\exp} f)$ に対して，適当なコンパクト化 $\bar{Z} \subset \bar{X}_k(\widehat{\exp} f) \subset \overline{A \times \mathrm{Lie}A \times J_{k,A}}$ が存在して，

$$T_{J_k(\widehat{\exp} f)}(r, \omega_{\bar{Z}}) = N_1(r, J_k(\widehat{\exp} f)^* Z) + S_{\varepsilon, \exp f}(r).$$

ここで，$S_{\varepsilon, \exp f}(r)$ は小さな項で，$\bar{A}$ 上のある豊富な直線束 L を固定すれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$S_{\varepsilon, \exp f}(r) = \varepsilon T_{\exp f}(r, L)||.$$

もし $\mathrm{codim} Z \ge 2$ ならば，$T_{J_k(\widehat{\exp} f)}(r, \omega_{\bar{Z}}) = S_{\varepsilon, \exp f}(r)$.

?： ＋ “o-minimal” $\Longrightarrow$?

4 アーベル多様体の分岐被覆族

R を代数的リーマン面，$\bar{R}$ をそのコンパクト化とする．

設定 4.1　$\eta : A \to R$ をアーベル多様体の非退化ファイバー空間として，$\lambda : X \to A$ を有限分岐被覆空間，$\pi = \eta \circ \lambda : X \to R$ は連結ファイバー空間であるとする．

$\Gamma(R, X)$ でその有理切断空間を表す．問題は

問題 4.2　(Lang 予想) 適当な双曲性条件で，$|\Gamma(R, X)| < \infty$ となるか？

一般に，$\pi : X \to R$ を固有連結ファイバー空間であるとする．以前の結果により次の状況になっていることが分かっている．

(1) **【$\Gamma(R, X)$ のコンパクト性】**([**N85**]) 任意の $t \in R$ に対し $X_t = \pi^{-1}t$ は双曲的であるとする．一般には，この双曲条件だけでは難しく，次の境界双曲条件を考える：
境界条件：適当なコンパクト化 $\bar{X} \to \bar{R}$ があって，$X \to R$ は，∂R 上双曲的に埋め込まれている．
　これらの条件の下で，$\Gamma(R, X)$ はコンパクト複素空間の構造を持つ．

(2) 各既約成分 $\Gamma_0 \subset \Gamma(R, X)$ に対し部分ファイバー空間 $X' \subset X(/R)$ があって，その正規化を $\tilde{X}'$ とすると，$\tilde{X}' \cong \tilde{X}'_0 \times R \cong \Gamma_0 \times R$，かつ Γ_0 の元はこの自明化での定切断になっている．
これを示すために，次の有限性（剛性）を使う．

定理 4.3（[N92]）　一般に Y, Z をコンパクト複素空間，Z は双曲的であるとする．Y から Z への全射有理型写像の全体 $\mathrm{Mer}_{\mathrm{surj}}(Y, Z)$ は有限である．

注意 4.4　境界条件が不要である場合がある．例えば，次の場合が知られている．

(1) $\dim_R X = 1$ ならば境界条件は自動的に満たされる（[N85]; Manin–Grauert の別証）．
(2) $X \to R$ はスムースと仮定して，相対余接束 $T^*_{X/R}$ がアンプルである ([N81b])．

境界条件を外すのはなかなか難しいのであるが，設定 4.1 のアーベル多様体族が関わる場合は，Mordell–Weil (Lang–Neron) の有限 (生成) 性が使えるメリットがある．Xie-Yuan は最近のプレプリントで次を得た．

定理 4.5（[XY23]）　設定 4.1 の状況を考える．次の 2 条件を仮定する．

(1) $A \to R$ の $\mathbf{C}(R)/\mathbf{C}$ 上のトレース $A_{\mathbf{C}(R)/\mathbf{C}} = 0$.
(2) ある点 $t_0 \in R$ があって，X_{t_0} は小林双曲的である．

このとき，$|\Gamma(R, X)| < \infty$.

証明．(a)【有限生成】トレースに関する仮定の下で，$\Gamma(R, A)$ は有限生成である (Lang–Neron)．$\Gamma(R, A) = \Gamma(R, A)_{\mathrm{tor}} \sqcup \Gamma(R, X)_{\mathrm{free}}$ とトージョン部分と自由部分に分け

ると，$\Gamma(R,A)_{\mathrm{tor}}$ は有限である．以下，$\Gamma(R,X)_{\mathrm{free}}$ について考える．$\mathbf{R}$ 上でみれば，

$$V := \Gamma(R,X)\otimes\mathbf{R} \cong \Gamma(R,X)_{\mathrm{free}}\otimes\mathbf{R}$$

は有限次元実線形空間である．

(b)【局所化】$A\,(\to R)$ 上に半正値でファイバー方向へ正値な Betti 型式と呼ばれる $(1,1)$ 型式 ω_{B} があって，$s\in\Gamma(R,A)$ の Tate ハイトを $\mathrm{h_T}(s)$ とすると

$$\mathrm{h_T}(s) = \int_R s^*\omega_{\mathrm{B}} =: \|s\|^2_{\omega_{\mathrm{B}}}.$$

$\|s\|_{\mathrm{B}}$ は $\mathbf{R}$ 線形空間 V 上のノルムを与える．

$U\subset R$ を任意の非空開集合とし，

$$\|s\|^2_{(\omega_{\mathrm{B}},U)} = \int_U s^*\omega_{\mathrm{B}}$$

とおく (partial height)．$\|s\|^2_{(\omega_{\mathrm{B}},U)}$ も V のノルムを定義する．V は有限次元であるから，一般論により：

命題 4.6 V 上の二つのノルム $\|s\|_{\mathrm{B}}$，$\|s\|_{(\omega_{\mathrm{B}},U)}$ は同値である．すなわち，ある $C_1>0$ があって，

$$\frac{1}{C_1}\|s\|_{(\omega_{\mathrm{B}},U)} \le \|s\|_{\mathrm{B}} \le C_1\|s\|_{(\omega_{\mathrm{B}},U)}, \quad \forall\, s\in V.$$

(c)【コンパクト性】$\lambda : X\to A$ は有限射であるから，$\sigma\in\Gamma(R,X)$ に対し，Tate ハイト $\mathrm{h_T}(\lambda\circ\sigma)$ が有界ならば，$\Gamma(R,X)$ はコンパクト複素空間の構造をもつ．

X_{t_0} は双曲的であるから，小さな円板近傍 $\Delta\ni t_0$ をとれば制限 $X|_\Delta$ は双曲的である．$F_{X|_\Delta}$ を Kobayashi–Royden フィンスラー計量とし，F_Δ を円板のポアンカレ計量で決まるフィンスラー計量とする．円板 $\Delta'\Subset\Delta$ を一つとり固定する．定数 $C_2>0$ があって

$$\lambda^*\omega_{\mathrm{B}}|_{X|_{\Delta'}} \le C_2 F^2_{X|_\Delta}|_{X|_{\Delta'}}.$$

小林双曲計量の短縮原理により

$$\sigma^* F_{X|_\Delta} \le F_\Delta.$$

(b) のステップで $U=\Delta'$ とすると，

$$\|\lambda\circ\sigma\|^2_{\mathrm{B}} \le C_1^2 C_2\int_{\Delta'} F^2_\Delta = C_1^2C_2C_3 < \infty, \quad C_3 := \int_{\Delta'} F^2_\Delta.$$

以上より，$\mathrm{h_T}(\lambda\circ\sigma)$ $(\sigma\in\Gamma(R,X))$ は有界になり，$\Gamma(R,X))$ はコンパクト複素空間になる．

(d)【有限性】$\Gamma(R,X)$ が無限集合であったとする．すると $\dim_{\mathbf{C}}\Gamma(R,X)>0$. $\Gamma(R,X)$ は連続体の濃度をもつ．$\lambda : X\to A$ は有限射であるから $\lambda(\Gamma(R,X))$ $(\subset\Gamma(R,A))$ も連続体濃度である．一方，$\Gamma(R,A)$ は $\mathbf{Z}$ 上有限生成であるから高々可算濃度であり，矛盾． $\square$

注意 4.7　(1) 上の証明で局所化 (partial height) のアイデアがポイントで，これは Xie–Yuan [XY23] による．テクニカルなところでは Xie–Yuan の証明からだいぶ簡略化した．

(2) Bartsch–Javanpeykar [BJ24] には A.N. Parshin のアイデアに基づく位相的剛性を用いる別証明がある．

参考文献

[Ax71] J. Ax, On Schanuel's conjecture, Ann. Math. 2nd Ser. **93** (2) (1971), 252–268.

[Ax72] J. Ax, topics in differential algebraic geometry I: analytic subgroups of algebraic groups, Amer. J. Math. **94** (1972), 1195–1204.

[BJ24] F. Bartsch and A. Javanpeykar, Parshin's method and the geometric Bombieri–Lang conjecture, Indag. Math., in press, 2024.

[BK77] W.D. Brownawell and K.K. Kubota, The algebraic independence of Weierstrass functions and some related numbers, Acta Arith. **33** (1977), 111–149.

[CNZ22] P. Corvaja , J. Noguchi, and U. Zannier, Analytic and rational sections of relative semi-abelian varieties, Pure Appl. Math. Quat. **18** (1) (2022), 177–209.

[Gr65] H. Grauert, Mordells Vermutung über rationale Punkte auf Algebraischen Kurven und Funktionenköper, Publ. Math. I.H.E.S. **25** (1965), 131–149.

[Ka21] 川口周, André–Oort 予想の最近の進展（企画サーベイ），城崎シンポジウム，2021.

[Ko98] S. Kobayashi, Hyperbolic Complex Spaces, Grundl. der Math. Wissen. vol. 318, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1998.

[La60] S. Lang, Integral points on curves, Publ. Math. I.H.E.S. No. **6** (1960), 27–43.

[La71] ——, Transcendental numbers and Diophantine approximation, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (5) (1971), 635-677.

[La74] ——, Higher dimensional Diophantine problems, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 779–787.

[Ma63] Yu. Manin, Rational points of algebraic curves over function fields, Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. **27** (1963), 1395-1440.

[Ms84] D. Masser, Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height on an abelian variety, Compos. Math. **53** (1984), 153–170.

[Ne96] Yu V. Nesterenko, Modular functions and transcendence questions, Sb. Math. **187** (1996), 1319–1348.

[N77] J. Noguchi, Holomorphic curves in algebraic varieties, Hiroshima Math. J. **7** (1977), 833-853.

[N81a] J. Noguchi, Lemma on logarithmic derivatives and holomorphic curves in algebraic varieties, Nagoya Math. J. **83** (1981), 213-233.

[N81b] J. Noguchi, A higher dimensional analogue of Mordell's conjecture over function fields, Math. Ann. **258** (1981), 207-212.

[N85] J. Noguchi, Hyperbolic fibre spaces and Mordell's conjecture over function fields, Publ. RIMS, Kyoto University **21** (1985), 27-46.

[N92] J. Noguchi, Meromorphic mappings into compact hyperbolic complex spaces and geometric Diophantine problems, International J. Math. **3** (1992), 277-289.

[N03] 野口潤次郎, 多変数ネヴァンリンナ理論とディオファントス近似, 共立出版社, 2003.

[N18] J. Noguchi, An application of the value distribution theory for semi-abelian varieties to problems of Ax-Lindemann and Manin-Mumford types, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. **29** (2018), 401–411.

[N24] J. Noguchi, Analytic Ax-Schanuel for semi-abelian varieties and Nevanlinna theory, J. Math. Soc. Japan **76** (1) (2024), 1–22.

[NW14] Noguchi, J. and Winkelmann, J., Nevanlinna Theory in Several Complex Variables and Diophantine Approximation, Grundl. der Math. Wiss. Vol. 350, pp. xiv+416, Springer, Tokyo-Heidelberg-New York-Dordrecht-London, 2014.

[PW06] J. Pila and A.J. Wilkie, The rational points of a definable set, Duke Math. J. **133** (2006), 591–616.

[PZ08] J. Pila and U. Zannier, *Rational points in periodic analytic sets and the Manin-Mumford conjecture*, Rend. Lincei Math. Appl. **19** (2008), 149–162.

[Ra83] M. Raynaud, *Sous-variété d'une variété abélienne et points de torsion*, In: "Arithmetic and Geometry, Vol. I", M. Artin and J. Tate (eds.), Birkhäuser, Boston, 1983, 327–352.

[vD98] L. van den Dries, Tame Topology and O-minimal Structures, London Math. Soc. Lect. Notes 248, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[Vo87] P. Vojta, Diophantine Approximations and Value Distribution Theory, Lect. Notes Math. 1239, Springer-Verlag, Berlin-Tokyo, 1987.

[XY23] J. Xie and X. Yuan, Partial heights, entire curves, and the geometric Bombieri–Lang conjecture, preprint, arXiv 2023 Aug.

[Ya06] K. Yamanoi, On the truncated small function theorem in Nevanlinna theory, Internat. J. Math. **17** (4) (2006), 417–440.