岡論文の引用記録と連接性定理について

野口潤次郎

東京大学

多変数関数論冬セミナー 於広島

平成 23（2011）年 12 月 17 日

Part I: 岡潔博士出版論文の文献記録について。

Part II: Oka [VII], [VIII], [IX] について。

Part III: 岡の連接定理を学部 4 回生に教えたい。

Part I
§1 岡潔博士出版論文の文献記録について。

なかなか、完全なものがない。

§1. Published Papers of Kiyoshi Oka

Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables:

I Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles,
J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 6 (1936), 245-255 [**Rec. 1 mai 1936**].

II Domaines d'holomorphie,
J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 7 (1937), 115-130 [**Rec. 10 déc 1936**].

III Deuxieme problème de Cousin,
J. Sci. Hiroshima Univ. 9 (1939), 7-19 [**Rec. 20 jan 1938**].

IV Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes,
Jpn. J. Math. 17 (1941), 517-521 [**Rec. 27 mar 1940**].

V L'intégrale de Cauchy,
Jpn. J. Math. 17 (1941), 523-531 [**Rec. 27 mar 1940**].

VI Domaines pseudoconvexes.
Tôhoku Math. J. 49 (1942(+43)), 15-52 [**Rec. 25 oct 1941**].

VII Sur quelques notions arithmétiques,
Bull. Soc. Math. France 78 (1950), 1-27 [**Rec. 15 oct 1948**].

VIII Lemme fondamental,
J. Math. Soc. Japan 3 (1951) No. 1, 204-214; No. 2, 259-278 [**Rec. 15 mar 1951**].

IX Domaines finis sans point critique intérieur,
Jpn. J. Math. 23 (1953), 97-155 [**Rec. 20 oct 1953**].

X Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudoconvexes,
Jpn. J. Math. 32 (1962), 1-12 [**Rec. 20 sep 1962**].

[34] Note sur les familles de fonctions multiformes etc.,
J. Sci. Hiroshima Univ. 4 (1934), p.93-98 [**Rec. 20 jan 1934**].

[41] Sur les domaines pseudoconvexes,
Proc. of the Imperial Academy, Tokyo (1941), 7-10 [**Comm. 13 jan 1941**].

[49] Note sur les fonctions analytiques de plusieurs variables,
Kōdai Math. Sem. Rep. (1949). no. 5-6, 15–18 [**Rec. 19 déc 1949**].

多変数解析函数論

立教大学教授 理学博士
一 松 信 著

東京 培 風 館 発行

(1960)

一松

[10c] H. Grauert-R. Remmert, Komplexer Räume, Math. Annalen, 136, 1958, p. 245-318.

[11] T. H. Gronwall, On the expressibility of a uniform function of several complex variables as the quotient of two functions of entire character, Trans. Amer. Math. Soc., 18, 1917, p. 50-64.

[12] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbres homologiques, Tôhoku Math., J., (2), 9, 1957, p. 119-221.

[13] F. Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten, Math. Annalen, 62, 1906, p. 1-88.

[14] 一松　信 (位田正邦筆記), 多変数函数論 (京大基研での講義), 素粒子論研究, 1960, 2月, p. 130-149.

[15a] P. Lelong, Les fonctions plurisousharmoniques, Ann. Ecole Norm. Sup., (3), 62, 1945, p. 301-338.

[15b] P. Lelong, Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques, J. d'analyse Math., 2, 1952, p. 178-208.

[16a] E. E. Levi, Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche de due o più variabili complesse, Annali di Mat. pura appl., (3), 17, 1910, p. 61-87.

[16b] E. E. Levi, Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse, ibid., (3), 18, 1911, p. 69-79.

[17] F. Norguet, Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (passage du local au global), Bull. Soc. Math. France, 82, 1954, p. 137-159.

[18] K. Oka (岡潔), Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables:

I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles, J. Sci. Hiroshima Univ., (A) 6, Nr. 3, 1936, p. 245-255.

II. Domaines d'holomorphie, ibid., 7, Nr. 2, 1937, p. 115-130.

III. Deuxième preblème de Cousin, ibid., 9, Nr. 1, 1939, p. 7-19.

IV. Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, Jap. J. of Math., 17, 1941, p. 517-531. 2

V. L'intégral de Cauchy, ibid., p. 523-531.

VI. Domaines pseudoconvexes, Tôhoku Math. J., 49, 1942, p. 15-52.

VII. Sur quelques notions arithmétiques, Bull. Soc. Math. France, 78, 1950, p. 1-27.

VIII. Lemme fondamentale, J. Math. Soc. Japan, 3, 1951, p. 204-214, p. 259-279. 8

IX. Domaines finis sans point critique intérieur, Jap. J. of Math., 23,

1953, p. 97-155.

[19] H. Poincaré, Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme, Rendiconti Cir. Mat. Palermo, 23, 1907, p. 185-220.

[20a] R. Remmert, Projektionen analytischer Mengen, Math. Annalen, 130, 1956, p. 410-441.

ANALYTIC FUNCTIONS
of
SEVERAL COMPLEX VARIABLES

ROBERT C. GUNNING
Department of Mathematics
Princeton University

HUGO ROSSI
Department of Mathematics
Brandeis University

PRENTICE-HALL, INC.
Englewood Cliffs, N.J.

Gun - Ros

181. Narasimhan, R., "Levi Problem for Complex Spaces II," *Math. Ann.* **146**(1962), 195–216.

182. Nickerson, H. K., "On the complex form of the Poincaré lemma," *Proc. Amer. Math. Soc.* **9**(1958), 183–188.

183. Nickerson, H. K., Spencer, D. C., and Steenrod, N., *Advanced Calculus* (D. Van Nostrand and Co., 1959).

184. Nishino, T., "Sur les familles de surfaces analytiques," *J. Math. Kyoto Univ.* **1**(1961/62), 357–377.

185. Norguet, F., "Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (passage du local au global)," *Bull. Soc. Math. France* **82**(1954), 137–159.

186. Oka, K., *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables* (Tokyo, Iwanami Shoten, 1961). [This is a collection of reprints of nine articles under the same general title, which have appeared in the following journals:

I "Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles," *J. Sci. Hiroshima Univ.*, ser. A **6**(1936), 245–255.

II "Domaines d'holomorphie," *J. Sci. Hiroshima Univ.*, ser. A **7**(1937), 115–130.

III "Deuxième problème de Cousin," *J. Sci. Hiroshima Univ.*, ser. A **9**(1939), 7–19.

IV "Domaines d'holomorphie et domaines rationellement convexes," *Jap. J. Math.* **17**(1941), 517–521.

V "L'intégrale de Cauchy," *Jap. J. Math.* **17**(1941), 523–531.

VI "Domaines pseudoconvexes," *Tohoku Math. J.* **49**(1942), 15–52.

VII "Sur quelques notions arithmétiques," *Bull. Soc. Math. France* **78**(1950), 1–27.

VIII "Lemme fondamental," *J. Math. Soc. Japan* **3**(1951), 204–214 and 259–278.

IX "Domaines finis sans point critique intérieur," *Jap. J. Math.* **23**(1953), 97–155.

Since then, the following paper in the series has also appeared:

X "Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudoconvexes," *Jap. J. Math.* **32**(1962), 1–12.]

完全

187. Osgood, W. F., *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 2d ed., vol. 2, part 1 (Leipzig, Teubner, 1929).

188. Ramspott, R. J., and Stein, K., "Über Rungesche Paare komplexer Mannigfaltigkeit," *Math. Ann.* **145**(1962), 444–463.

189. Remmert, R., "Projektionen analytischer Mengen," *Math. Ann.* **130**(1956), 410–441.

4

多変数函数論

西野利雄

東京大学出版会

1996年

5

西野

[41] K.Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, I Domaine convexes par rapport aux fonctions rationnelles, *J. of Sci. Hiroshima Univ.*, **6**, 1936.

[42] K.Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, II Domaines d'holomorphie, *J. of Sci. Hiroshima Univ.*, **7**, 1937.

[43] K.Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, III Deuxième problème de Cousin, *J. of Sci. Hiroshima Univ.*, **9**, 1939.

[44] K.Oka, Sur les Domaines pseudoconvexes, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17**, 1941.

[45] K.Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IV Domaines d'holomorphie et Domaines rationnellement convexes, *Japanese J. of Math.*, **17**, 1941.

[46] K.Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, V *L'intégrale de Cauchy*, *Japanese J. of Math.*, **17**, 1941.

[47] K.Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VI Domaines pseudoconvexes, *Tôhoku Math. J.*, **49**, 1942.

[48] K.Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VII Sur quelques notions arithmétiques, *Bull. de la Soc. Math. de France*, **78**, 1950.

[49] K.Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VIII Lemme fondamental, *J. of Math. Soc. of Japan*, **3**, 1951.

[50] K.Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IX Domaines finis sans point critique intérieur, *J. J. of Math.*, **27**, 1953.

[51] K.Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables*, Iwanami Shoten, Tokyo Japan, 1961.

[52] K.Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, X une mode nouvelle engendrant les Domaines pseudoconvexes, *J. J. of Math.*, **32**, 1962.

[53] 岡潔, 岡潔先生遺稿集第1集, 岡潔先生遺稿集刊行会, 1980.

[54] W.F.Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie, Zweiter Band.* Chelsea publishing company, 1929.

[55] E.Picard, Sur certaines équations fonctionnelles et sur une classe de surfaces algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **139**, 1904.

[56] H.Poincaré, Sur les fonctions de deux variables, *Acta Math.*, **2**, 1883.

[57] H.Poincaré, Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **23**, 1907.

[58] F.Riesz, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport avec la théorie du potentiel, I II, *Acta Math.*, 1926, 1923.

[59] C.L.Siegel, *Topics in complex function theory*, Wiley-Interscience, 1969.

[60] K.Stein, Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen, *Math. Annalen*, **117**, 1949.

[61] K.Stein, Analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätmoduln und das zweite Cousinsche Problem, *Math. Annalen*, **123**, 1951.

6

Sur Les Fonctions Analytiques de Plusieurs Variables

par

Kiyoshi Oka

IWANAMI SHOTEN
Tokyo Japan
1961

7

TABLE DES MATIÈRES

KIYOSHI OKA

COLLECTED PAPERS

Translated from the French by R. Narasimhan

With Commentaries by H. Cartan

Edited by R. Remmert

SPRINGER-VERLAG
BERLIN HEIDELBERG NEW YORK TOKYO
1984

論文リスト　Springer 後ろから52頁目

Bibliography

I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles
Journal of Science of the Hiroshima University **6** (1936), p. 245–255.

II. Domaines d'holomorphie
Journal of Science of the Hiroshima University **7** (1937), p. 115–130.

III. Deuxième problème de COUSIN
Journal of Science of the Hiroshima University **9** (1939), p. 7–19.

IV. Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes
Japanese Journal of Mathematics **17** (1941), p. 517–521.

V. L'intégrale de Cauchy
Japanese Journal of Mathematics **17** (1941), p. 523–531.

VI. Domaines pseudoconvexes
Tôhoku Mathematical Journal **49** (1942), p. 15–52.

VII. Sur quelques notions arithmétiques
Bulletin de la Société Mathématique de France **78** (1950), p. 1–27.

VIII. Lemme fondamental
Journal of the Mathematical Society of Japan **3** (1951), p. 204–214; 259–278.

IX. Domaines finis sans point critique intérieur 23
Japanese Journal of Mathematics ~~**27**~~ (1953), p. 97–155.

X. Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudoconvexes
Japanese Journal of Mathematics **32** (1962), p. 1–12.

Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc.
Journal of Science of the Hiroshima University **4** (1934), p. 93–98.

Sur les domaines pseudoconvexes
Proceedings of the Imperial Academy, Tokyo 17 (1941), p. 7–10.

10

Springer
最後の頁

Added in Print

In 1980 Toshio NISHINO from Kyushu University, Japan, started editing *Posthumous Papers of Kiyoshi Oka* with the help of Akira TAKEUCHI, Kyoto University. To date seven volumes have appeared. Most of these papers were written in Japanese, however there are also some papers in French which we would like to list here:

1. Fonctions algébriques permutables avec une fonction rationnelle nonlinéaire (vol. **6**; 87 pages; written about 1930)
2. Sur les ensembles de points à 4 dimensions engendrés analytiquement (vol. **7**; 146 pages; written about 1934)
3. Note sur les fonctions analytiques de plusieurs variables (vol. **3**; 7 pages; written about 1949)

11

Springer

Table of Contents

12

Remmert Springer

Vorwort

„Wenn die Könige baun, haben die Kärrner zu tun." Kiyoshi Oka war ein König. Sein Reich war die Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen. Er löste Probleme, die als unangreifbar galten; er entwickelte Methoden, deren Kühnheit die Mitwelt bewunderte. Oka gab der komplexen Analysis neues Leben. Seine Ideen wirken fort, weiterentwickelt von Mathematikern, die selbst Könige sind.

Oka hat sein Werk in französischer Sprache in zehn Mémoires niedergelegt. Das Studium der Originaltexte ist schwer. Die Mathematik Okas ist nicht, wie Jacobi einmal formulierte, eine Wissenschaft, bei der sich alles von selbst versteht. Oka war, um mit Kronecker zu sprechen, „König und Kärrner zugleich"; sein diesem Band vorangestellter Spruch war sein Motto. Okas Mathematik bedarf der Interpretation. Goethe spricht einmal von der Dumpfheit des Genies, das Dinge schaut, ohne dem Geschauten sofort den klaren Ausdruck geben zu können. Klarheit wird erst allmählich durch spätere Arbeit gewonnen.

Bereits 1960 edierte Y. Akizuki einen Band *Sur les Fonctions Analytiques de Plusieurs Variables* mit den ersten neun Okaschen Arbeiten in ihrer Originalfassung (Iwanami Shoten, Tokyo); er schreibt in seiner Einleitung: „Je suis heureux d'avoir pu ainsi participer à la réédition de ces travaux qui représentent une si importante contribution au développement de notre Science." Ich schätze mich ebenso glücklich, vom Springer-Verlag mit der Herausgabe des hier vorgelegten Bandes betraut worden zu sein. Aufgenommen sind die zehn bekannten Artikel sowie zwei weitere kurze Noten von Oka. Bis auf die Note *Sur les Fonctions Analytiques de Plusieurs Variables*, Kōdai Math. Sem. Rep. Nos. 5–6, Dec., 1949, dürfte es sich um alle gegenwärtig zugänglichen mathematischen Arbeiten Okas handeln.

R. Narasimhan hat sich der großen Mühe unterzogen, die Übersetzung ins Englische zu besorgen. H. Cartan, der wie kein anderer das Okasche Œuvre kennt, hat das Gesamtwerk und jede einzelne Arbeit kritisch kommentiert. Beiden Kollegen gebührt Dank für ihre selbstlose Bereitschaft. Wir hoffen, der mathematischen Welt das Werk eines Mannes näherzubringen, der einen so großen Einfluß auf unsere und die jüngere Generation gehabt hat.

Münster (Westfalen), 18. September 1983 — R. Remmert

13

H. Cartan 序

Springer

Sur l'Œuvre de Kiyoshi Oka

L'œuvre mathématique de Kiyoshi OKA (1901–1978) s'échelonne sur presque trente ans, de 1934 à 1962. Elle est tout entière consacrée aux fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. L'intérêt d'Oka pour ce sujet remonte peut-être au séjour qu'il fit à Paris en 1929, séjour qui lui donna l'occasion de rencontrer Gaston JULIA. Est-ce pour cette raison qu'Oka écrivit tous ses mémoires en français, à vrai dire dans une langue française un peu particulière qui lui est bien personnelle, mais à laquelle avec un peu d'exercice on finit par s'habituer? Cette coutume de publier en français, il l'a léguée à ses élèves et aux élèves de ses élèves.

La publication, en 1934, de la monographie de BEHNKE-THULLEN faisant le point sur l'état de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes à un moment crucial de son développement, et mettant en évidence les principaux problèmes ouverts à cette époque, semble avoir joué un rôle déterminant dans l'orientation des recherches d'Oka: il se fixa pour tâche de résoudre ces problèmes difficiles, tâche quasi-surhumaine. On peut dire qu'il y réussit, surmontant l'un après l'autre les obstacles redoutables qui se trouvaient sur sa route.

Mais il faut avouer que les aspects techniques de ses démonstrations et le mode de présentation de ses résultats rendent difficile la tâche du lecteur, et que ce n'est qu'au prix d'un réel effort que l'on parvient à saisir la portée de ses résultats, qui est considérable. C'est pourquoi il est peut-être encore utile aujourd'hui, en hommage au grand créateur que fut Kiyoshi OKA, de présenter l'ensemble de son œuvre.

En 1961, la maison d'édition japonaise Iwanami Shoten avait édité un volume publié par les soins du professeur Yasuo AKIZUKI, sous le titre: «Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables par Kiyoshi OKA». Ce volume réunissait, sans commentaires, les neuf mémoires, numérotés de I à IX par l'auteur lui-même, parus entre 1936 et 1953. On en trouvera la liste ci-dessous. Curieusement, ce volume publié du vivant d'Oka et visiblement avec son consentement, ne contenait pas un article publié dès 1934 dans le Journal of Science of Hiroshima University (4, 1934, p. 93–98) sous le titre:

«Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes, etc.».

Il semble que cet article était une première ébauche d'un sujet qu'Oka devait reprendre plus tard dans une publication postérieure au volume de 1961, sous le titre:

«Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables

X – Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudoconvexes» (Japanese Journal of Mathematics, XXXII, 1962, p. 1–12).

Le volume de 1961 ne contenait pas non plus une Note parue en 1941 aux

Springer

Proceedings Imperial Academy Tokyo (vol. 17, p. 7–10), qui en fait annonçait les résultats du mémoire VI.

Enfin, je possède un bref manuscrit de la main d'Oka, remplissant deux pages grand format, sous les numéros XI et XII, mais ne comportant aucun titre.

Comme les titres des articles d'Oka ne permettent pas toujours d'avoir une idée de leur contenu véritable, je tenterai d'exposer, pour chacun d'eux, un résumé des principaux résultats, en utilisant la terminologie en usage aujourd'hui, ce qui, je l'espère, facilitera la tâche du lecteur.

Henri CARTAN (août 1982)

Springer 版の最大の問題点

- 論文の受理日が、全て削除されている。

Springer

I. Rationally Convex Domains

Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles

Journal of Science of the Hiroshima University **6** (1936), p. 245–255
(Received 1 May 1936)

Introduction. Despite recent progress in the theory of analytic functions of several variables, several important matters remain more or less obscure, most notably: the kind of domains for which the theorem of Runge or those of Mr. P. Cousin remain valid, the relationship between the convexity of Mr. F. Hartogs and that of Messrs. H. Cartan and P. Thullen[1]; and there are intimate relations between these matters. The present memoir and those which will follow are meant to treat these problems.

Now, I have noticed that one can sometimes reduce the difficulty of these problems by raising suitably the dimension of the spaces in which one works. In the present memoir, realising this general idea in a special case, I shall establish a principle which, so to speak, reduces the study of the domains of the title to cylindrical domains of higher dimension. (For the concrete form of this principle, see Problem I of No. 1.)

Once the principle is established, one can deduce that the theorem of Mr. P. Cousin concerning prescribed poles remains valid for the domains of the title. (For the exact form of this result, see Theorem I of No. 5.) The converse is also true. I shall actually prove these theorems simultaneously by a process of induction. Using the above principle, one also recovers immediately the Runge theorem for these domains, which was expounded by Mr. A. Weil[2].

Thus, I shall be concerned, in the present memoir, with the interior of domains which are convex with respect to rational functions; this will enable me at the same time to investigate, under less restrictive hypotheses than hitherto, some lemmas which are indispensable to me.[3]

1. Definitions. In the space $((x))$ of n complex variables $x_1, \dots, x_n$, let us consider the region[4] Δ defined by

$$(\Delta) \qquad x_i \in X_i, \quad R_j((x)) \in Y_j \quad (i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,\nu),$$

where X_i, Y_j are univalent (schlicht) bounded domains[5] in the plane, and $R_j((x))$ are rational functions. For simplicity, we shall say that any region which can be described in such a way *belongs to the class* (Ω_0). Given a region

[1]) See the book of Messrs. H. Behnke and P. Thullen: *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*, in particular on pages 54, 68, 79.

[2]) *Sur les séries de polynomes de deux variables complexes*. C.R. Acad. Sci., Paris 1932. *L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables*. Math. Annalen, 1935.

[3]) As for the generalisation of the theorem of Mr. P. Cousin, I think that one can do this using the integral of Mr. A. Weil cited above.

[4]),[5]) In what follows, an open set will be called domain or region to distinguish between when it is known to be connected and when it is not; it is understood that the regions (domains) of this memoir are, without exception, univalent.

Springer [I] の最後の頁

is a holomorphic function on Δ_n for every n. We can therefore expand $\Omega_n((x))$ on Δ_n in a series of functions holomorphic on the given domain D in view of the preceding proposition.

After what we have seen so far, we can complete the proof exactly as for cylindrical domains[14]. We shall not repeat this. Q.E.D.

Theorem II. *Under the conditions of Problem I formulated in No. 1, we can find a holomorphic function of the $n+\nu$ variables x_i, y_j on the cylindrical domain (C) having the value $f(M)$ for any point M on the variety Σ.*

We shall say, in fact, that Problem I or II given in No. 1 is *completely* solvable if it is solvable for $(C')=(C)$ or $\Delta'=\Delta$ respectively.

Consider Problem II. It is checked immediately that all the connected components of the region Δ satisfy the conditions imposed on the domain D in Theorem I. Problem II is therefore completely solvable for any connected component, and consequently for Δ itself, by definition.

As for Problem I, the reasoning given in No. 2 remains applicable to the present situation without modification. From this, in veiw of the preceding, it follows that if Problem I of any order smaller than ν is completely solvable, so is any Problem I of order ν for any $\nu>1$, and, for $\nu=1$, it is always solvable. One can therefore solve Problem I completely. Q.E.D.

Commentaire de H. Cartan

Une des idées d'Oka consiste à réaliser certains domaines de $\mathbb{C}^n$ comme sous-variétés analytiques dans des polydisques de dimension plus grande. Il le fait ici pour les domaines définis, pour $x=(x_i)\in\mathbb{C}^n$, par

$$(\Delta) \qquad x_i\in X_i, \quad R_j(x)\in Y_j \quad (1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq \nu),$$

où les X_i et les Y_j sont des domaines de $\mathbb{C}$, et où les R_j sont des fonctions *rationnelles*. Un tel domaine Δ est isomorphe à la sous-variété Σ du produit

$$C=(\prod_i X_i)\times(\prod_j Y_j)$$

définie par les équations $y_j=R_j(x)$.

L'auteur prouve les deux théorèmes suivants:

Théorème I. Le premier problème de Cousin est résoluble dans un tel domaine Δ.

Théorème II. Toute fonction holomorphe sur Σ est induite par une fonction holomorphe dans C.

---

[14]) Osgood, § 24 of Chap. III.

Springer

La méthode de démonstration est la suivante. On appelle *problème I d'ordre* ν le problème qui consiste à trouver, pour tout ouvert C' relativement compact de C, une fonction holomorphe dans C' qui induise, en tout point de $\Sigma \cap C'$, une fonction f donnée, holomorphe dans Σ. On appelle *problème II d'ordre* ν le problème qui consiste à trouver, pour tout ouvert C' relativement compact de C, une fonction méromorphe dans $\Sigma \cap C'$ qui admette des parties principales données dans Σ. (Dans ces formulations, ν désigne le nombre des fonctions R_j.) Alors OKA prouve:

(i) si les problèmes I et II ont une solution pour tout entier $\nu < k$, le problème I a une solution pour $\nu = k$.

(ii) si le problème I a une solution pour tout entier $\nu \leqq k$, il en est de même du problème II.

La conclusion est évidemment que les problèmes I et II ont toujours une solution.

Pour prouver (ii), OKA se sert de la méthode de COUSIN, qui utilise l'intégrale de CAUCHY.

Il reste ensuite à faire un passage à la limite pour obtenir les théorèmes I et II (le lecteur notera que c'est la solution du problème II qui conduit au théorème I, et vice-versa).

Le théorème I avait été annoncé sans démonstration, au moins pour $n=2$, par H. CARTAN dès 1934 (Comptes Rendus Ac. Sciences Paris, 199, p. 925-927).

Le théorème II entraîne aussitôt que toute fonction holomorphe dans Δ est développable en série de fractions rationnelles qui converge uniformément sur tout compact de Δ; plus précisément, ces fractions rationnelles sont des polynômes en les x_i et les $R_j(x)$. On en déduit: dans tout domaine convexe par rapport à une classe K de fractions rationnelles, toute fonction holomorphe est développable en série de polynômes en les coordonnées et les fonctions de K.

東北數學雜誌

第四拾九卷

THE
TÔHOKU MATHEMATICAL JOURNAL

Founded by
T. Hayashi

Edited by
M. Fujiwara T. Kubota Y. Okada
T. Takasu S. Izumi T. Tannaka

Vol. 49

1942 — ← Published year

February, 1943

THE TÔHOKU IMPERIAL UNIVERSITY
SENDAI, JAPAN.

19

Vol. 49 1942

この年号の記録がない

Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VI—Domaines pseudoconvexes,

par

Kiyosi OKA à Kimimura, Kisyû.

Introduction.—En 1906, F. Hartogs a découvert une restriction très curieuse, à laquelle sont soumis les domaines d'holomorphie[1], et par cette découverte même, je pense, a commencé le développement récent de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables.

La même restriction a été successivement trouvée aux fonds des différentes branches de la théorie, par E. E. Levi, G. Julia, W. Saxer et l'auteur[2]. Nous appelons tout domaine restreint de ce mode d'être *pseudoconvexe*[3].

La convexité de cette sorte admet d'être critiquée d'une manière locale. Or, en 1932, H. Cartan et P. Thullen on trouvé que les domaines d'holomorphie sont encore, en un certain sens, globalement convexes[4]. Et grâce à cette propriété, nous venons d'établir plusieurs théorèmes globaux par rapport aux domaines d'holomorphie[5].

---

(1) F. Hartogs, Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen, 1906. (Münch. Berichte.)

(2) E. E. Levi, Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse, 1910. (Annali di Matematica.)

G. Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables, 1926. (Acta mathematica.)

W. Saxer, Sur les familles de fonctions méromorphes de plusieurs variables, 1931. (Comptes rendus, Paris.)

K. Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc., 1934. (Journal of Science of the Hiroshima University.)

(3) Pour les domains univalents et finis, nous l'avons défini à Mémoire IV; voir: No. 10, Mémoire actuel.

(4) Et la réciproque. Voir:

H. Cartan-P. Thullen, Regularitäts- und Konvergenzbereiche, 1932. (Mathematische Annalen.) Pour l'idée, voir:

H. Cartan, Sur les domaines d'existence de fonctions de plusieurs variables complexes, 1931. (Bull. Société mathématique, France.)

(5) Mémoires précédents des présentes recherches: I—Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936; II—Domaines d'holomorphie, 1937; III—Deuxième problème de Cousin, 1939; (Journal of Science of the Hiroshima University.) IV—Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, 1941; V—L'intégrale de Cauchy, 1941; (Japanese Journal of Mathematics.)

L'auteur pense que cette conclusion sera aussi indépendante des nombres de variables complexes.

FIN.

L'Institut Mathématique,
L'Université Imperiale de Kyôto.

(Reçu le 25, Oct. 1941.)

With the Author's Compliments

謹呈 岡村博様

K. OKA.

Sur les fonctions analytiques de pleusieurs variables

Extracted from
THE TÔHOKU MATHEMATICAL JOURNAL, Vol. 49, Part 1,
founded by T. HAYASHI, edited by M. FUJIWARA, T. KUBOTA,
Y. OKADA, T. TAKASU, S. IZUMI, and T. TANNAKA, College
of Science, Tôhoku Imperial University, Sendai, Japan.

May, 1942

岡潔

TOHOKU MATHEMATICAL JOURNAL

Tohoku Mathematical Journal
First Series, Second Series

Volume Index and General Index

The Tohoku Mathematical Journal was started in 1911, as the first international M research journal in Japan. Due to the Second World War, publication of the journa suspended, and Volume 49 in 1943 was the last issue in the First Series. After the publication was resumed, and Volume 1 of the Second Series was published in 19

To mark the occasion of the total volume number exceeding *one hundred*, we hav database of all articles in the First and Second Series. We present below the Volur tables of contents of all the volumes) and the General Index (the list of all articles alphabetical order of the authors) of the First and Second Series.

Tohoku Mathematical Journal,Special Issue

Volume Index and General Index of the First Series,
1911-1943

First Series Vol. 1 - Vol. 49 (1911/12 - 1943)
Volume Index, p.1-67 Download [PDF]
General Index, p.69-137 Download [PDF]

Special Issue was published

Tohoku Mathematical Journal

Volume Index and General Index of the Second Seires,
1949-1999

Second Series Vol. 1 - Vol. 51 (1949/50 - 1999)
Volume Index, p.1-92 Download [PDF]
General Index, p.1-117 Download [PDF]

Index of the Second Series is available or

Tohoku Math. J.
Web-page

Vol. 49, 1943

Journal of the Mathematical Society of Japan

ONLINE ISSN: 1881-1167
PRINT ISSN: 0025-5645

Journal of the Mathematical Society of Japan
Vol.3 , No.2(1951)

奈良女子大学

図書館
画像DB

岡潔文庫

遺稿目録

博士のこと

公表論文

未公表論文
など

岡潔先生
遺稿集

各種作品

公 表 論 文

岡潔先生の数学--原論文の紹介（PDF TeX）

Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables 多変数解析函数について

I.	Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles Journal of Science of the Hiroshima University 6 (1936), p.245-255	ダウンロード用 PDF TeX
	有理函数に関する凸状域（日本語訳）	PDF TeX
	解 題	PDF TeX
内容:	上空移行により、有理函数による多面体における問題を筒状域における問題に帰着させる原理を確立し、それによって有理函数に関する凸状域におけるクーザン第1問題と展開の問題を解決している。	
II.	Domaines d'holomorphie Journal of Science of the Hiroshima University 7 (1937), p.115-130	PDF TeX
	正則域（日本語訳）	PDF TeX
	解 題	PDF TeX
内容:	上空移行により、一般な解析多面体における問題を多項式による解析多面体における問題に帰着させる原理を確立し、それによって正則凸状域におけるクーザン第1問題と展開の問題を解決している。	
III.	Deuxième problème de Cousin Journal of Science of the Hiroshima University 9 (1939), p.7-19	PDF TeX
	Cousin の第2問題（日本語訳）	PDF TeX
	解 題	PDF TeX
内容:	正則域におけるクーザン第2問題にたいする障碍が位相的もなのであることを示し、連続解があれば解析解もあることを示している。	
IV.	Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes Japanese Journal of Mathematics 17 (1941), p.517-521	PDF TeX
	正則域と有理凸状域（日本語訳）付：解題	PDF TeX
内容:	正則域が必ずしも有理凸状域ではないことを示す例が挙げられている。	
V.	L'intégrale de Cauchy Japanese Journal of Mathematics 17 (1941), p.523-531	PDF TeX
	Cauchyの積分（日本語訳）	PDF TeX
	解 題	PDF TeX
内容:	正則函数が代数函数の単葉な分枝で近似できることを示し、それを使ってベーユの積分公式を改良している。	

Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.

II—Domaines d'holomorphie.

Par

Kiyoshi Oka

3

(Reçu Décembre 10, 1986.)

Introduction. — J'ai traité dans le mémoire précédent[1] le sujet de domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles. J'examinerai maintenant la même question concernant les fonctions holomorphes; et ceci sera fait en appliquant la même idée, c'est-à-dire, en passant aux espaces supérieurs.

Dans l'espace de plusieurs variables complexes, étant donnée une région univalente bornée et convexe par rapport à un nombre fini de fonctions holomorphes, on en construit la multiplicité Σ dans un espace supérieur, d'après le procédé adopté précédemment. C'est pour cette multiplicité Σ que nous observerons précisément le mode de convexité.

A l'aide des théorèmes établis dans le mémoire précédent, nous trouverons comme conséquence que la multiplicité Σ est en quelque sorte convexe par rapport aux polynômes. (Voir le théorème I du No. 4). A notre avis, ceci est un fait fondamental en ce qui concerne les domaines d'holomorphie.

D'où, en vertu d'un théorème bien connu de MM. H. Cartan et P. Thullen,[2] on pourra facilement donner à un des problèmes non résolus[3] de la théorie du titre la solution affirmative; à savoir que le théorème de M. P. Cousin concernant les pôles donnés reste valable pour les domaines d'holomorphie, univalents et bornés.

1. Généralités.[4] — Considérons l'espace $((x))$ engendré par n

[1] Ce journal, 6 (1936).

[2] Mémoire cité précédemment.

[3] Voir l'Ouvrage de MM. H. Behnke et P. Thullen, 68, cité précédemment.

[4] Dans la suite, un ensemble ouvert sera appelé domaine ou région distinctivement, suivant qu'il est certainement connexe ou non; pour simplifier le langage on sous-entendra que les régions (domaines) sont toujours univalentes et bornées, sauf dans le cas ou la réciproque sera énoncée.

VI.	Domaines pseudoconvexes Tôhoku Mathematical Journal 49 (1942), p.15-52	PDF TeX
	擬凸状領域(日本語訳)	PDF TeX
	解　題	PDF TeX
内容:	擬凸状領域は正則域かという多変数函数論における最大の間題にたいし、有限単葉な領域の場合に肯定的な解決をなし遂げている。複素2次元の場合にしか書かれていないが、一般次元でも成り立つと信じると書かれている。	
VII.	Sur quelques notions arithmétiques (Bulletin版) Bulletin de la Société Mathématique de France 78 (1950), p.1-27	PDF TeX
	Sur quelques notions arithmétiques (岩波版)	PDF TeX
	或る算術的概念について(日本語訳)	PDF TeX
	解　題	PDF TeX
内容:	解析的シーフ理論の骨格となった不定域イデアル論の確立である。目標は一般な領域にたいする上空移行にあった。	
VIII.	Lemme fondamental Journal of Mathematical Society of Japan 3 (1951), p.204-214;259-278	PDF TeX
	基本補題(日本語訳)	PDF TeX
	解　題	PDF TeX
内容:	分岐面を内点とするような解析多面体にたいする上空移行の原理が完成されている。	
IX.	Domaines finis sans point critique intérieur Japanese Journal of Mathematics 27 (1953), p.97-155	PDF TeX
	内分岐点を持たない有限領域(日本語訳)	PDF TeX
	解　題	PDF TeX
内容:	一般次元の数空間上の、分岐面は含まない、無限多葉な擬凸状領域が正則域であることが示され、クーザンの問題や展開の問題等がその領域で解決されている。	
X.	Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudoconvexes Japanese Journal of Mathematics 32 (1962), p.1-12	PDF TeX
	擬凸状領域を生成する新しい仕方(日本語訳)付:解題	PDF TeX
内容:	自然に擬凸状領域が生成される例を、解析面の列から作っている。複素2次元の場合しか書かれていない。	
11	Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc. Journal of Science of the Hiroshima University Ser.A 4 (1934), p.93-98	PDF TeX
	多価解析関数等の族についてのノート(日本語訳)	PDF TeX
12	Sur les domaines pseudoconvexes Proc. Imp. Acad. Tokyo Vol.17 (1941), p.7-10	PDF TeX

	擬凸状領域について(日本語訳)	PDF TeX
13	Note sur les fonctions analytiques de plusieurs variables Kodai Math. Sem. Rep. Nos.5-6 (1949), p.15-18	PDF TeX
	多変数解析函数についてのノート(日本語訳)	PDF TeX

§2 Levi 問題（Hartogs の逆問題）の解決についての認識 — の問題

順序が混乱している。

一松(1960)

第12章　レヴィの問題

第4章で少しくふれたレヴィの問題は，層の手法を用いて，スタイン多様体の上で完全に解決された．この章ではその概略を紹介する．

§1.　レヴィの問題の定式化

レヴィの問題とは一口にいえば，擬凸領域が正則領域かということである．E. E. レヴィが1911年にこの問題を提出した直後，ブルメンタル† が'反例'を示して，問題は否定的に解決されたかにみえた．しかし後にベーンケの研究†† により，ブルメンタルの論証が正しくないことがわかり，問題はふりだしにかえった．その後主としてミュンスタ学派によって多くの研究が行なわれ，多変数解析函数論の発展の原動力の一つとなった．そしてついに岡潔氏(第VI論文，1942年)により，まず $\boldsymbol{C}^2$ 内の単葉領域に対して肯定的な解決をみた．ついで $\boldsymbol{C}^n$ への拡張がブレメルマン，ノルゲらによってなされたが(1953年，論文[D5b]，[D17]参照)，岡潔氏自身も($\boxed{1953}$年，第IX論文) $\boldsymbol{C}^n$ 上の，必ずしも単葉でない被拡領域をもこめて，新しい証明法による肯定的解決を与えた．なおスタイン，エーレンプライスらも別証を与えたと伝えられる．

4

一方，H. カルタンは，この問題をスタイン多様体に拡張することを提出した．この問題もブレメルマンによって(1957年9月，プリンストンでの学会の報告，参考書[B12])肯定的に解決されたが，彼の方法は十分高い次元の $\boldsymbol{C}^m$ に埋蔵して，岡の結果に帰着させるものである．同じころグラウエルト(論文[D 9e])は，さらに一般の結果(定理12·1)を，独立に直接の証明を与えた．この章ではグラウエルトの方法を紹介する．なおレヴィの問題に関する詳細は酒井栄一氏による総合報告[D 24]参照．

第4章に論じた多重劣調和函数の概念は解析的写像で不変だから，解析的多様体 X の上でも定義される．たとえば C^∞ 級の強多重劣調和函数(定義4·2) v は，任意の局所座標 $(z_1, \cdots, z_n)$ について，

$$\text{エルミート行列 } L(v)=(\partial^2 v/\partial z_j \partial \bar{z}_k) \text{ が正値} \qquad (12\cdot1)$$

ということで定義される．X 内の領域 D に対して，$\overline{D}$ を含む領域 B で定義される C^∞ 級の強多重劣調和函数 v があり，$D=\{v<0\}$ と表示されるとき，D を X 上の**強擬凸領域**とよぶ(第4章 §4，定義4·10参照)．

定理 12·1 (グラウエルトの定理)　解析的多様体 X (必ずしもスタイン多様体でなくてもよい)上の，$\overline{D}$ がコンパクトな領域 D が X 上の強擬凸領域

---

† O. Blumenthal, H. Weber Festschr. (記念論文集), 1912, p. 11–22.

†† H. Behnke, Natürliche Grentzen, Abh. Hamburg Univ., 5, 1927, p. 290–312.

一松

[4] L. Bieberbach, Neue Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen, Enzyklopädie der Math. Wiss., II C 4, Abt. II. 3. 1, Kap. 11 (多変数解析函数), 1922, p. 517-532.

[5a] H. J. Bremermann, Die Charakterisierung von Regularitätsgebieten durch pseudokonvexe Funktionen, Dissertation Münster, 1951 (Schriftenreihe des Math. Inst. Univ. Münster, 5), p. 1-92.

[5b] H. J. Bremermann, Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen, Math. Annalen, **128**, 1954, p. 63-91.

[5c] H. J. Bremermann, Construction of the envelopes of holomorphy of arbitrary domains, Revista Mat. Hispano Amer., (4), **17**, No. 4/5, 1957, p. 1-26.

[6a] H. Cartan, Les fonctions des deux variables complexes et le problème de la représentation analytique, J. de Math., (9), **10**, 1931, p. 1-114.

[6b] H. Cartan, Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, J. de Math., (9), **19**, 1940, p. 1-26.

[6c] H. Cartan, Idéaux des fonctions analytiques de n variables complexes, Ann. Ecole Norm. Sup., (3), **61**, 1944, p. 149-197.

[6d] H. Cartan, Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, Bull. Soc. Math. France, **78**, 1950, p. 29-64.

[7] H. Cartan-P. Thullen, Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen: Regularitäts- und Konvergenzbereiche, Math. Annalen, **106**, 1932, p. 617-647.

[8] P. Cousin, Sur les fonctions de n variables complexes, Acta Math., **19**, 1895, p. 1-61.

[9a] H. Grauert, Charakterisierung der holomorph-vollständiger komplexen Räume, Math. Annalen, **129**, 1955, p. 233-259.

[9b] H. Grauert, Approximationssäzte für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen, ibid.,† **133**, 1957, p. 139-159.

[9c] H. Grauert, Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen, ibid., p. 450-472.

[9d] H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, ibid., **135**, 1958, p. 263-273.

[9e] H. Grauert, On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Annals of Math., **68**, 1958, p. 460-472.

[10a] H. Grauert-R. Remmert, Konvexität in der komplexen Analysis, Comm. Math Helv., **31**, 1956, p. 152-183.

[10b] H. Grauert-R. Remmert, Bilder und Urbilder analytischer Garben, Annals of Math., **68**, 1958, p. 393-443.

† ibid. はラテン語 ibidem の略で，同上すなわちすぐ前のと同じ雑誌の意味である．

一松

[10c] H. Grauert-R. Remmert, Komplexer Räume, Math. Annalen, **136**, 1958, p. 245–318.

[11] T. H. Gronwall, On the expressibility of a uniform function of several complex variables as the quotient of two functions of entire character, Trans. Amer. Math. Soc., **18**, 1917, p. 50–64.

[12] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbres homologiques, Tôhoku Math., J., (2), **9**, 1957, p. 119–221.

[13] F. Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten, Math. Annalen, **62**, 1906, p. 1–88.

[14] 一松 信（位田正邦筆記），多変数函数論（京大基研での講義），素粒子論研究，1960，2月，p. 130–149.

[15a] P. Lelong, Les fonctions plurisousharmoniques, Ann. Ecole Norm. Sup., (3), **62**, 1945, p. 301–338.

[15b] P. Lelong, Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques, J. d'analyse Math., **2**, 1952, p. 178–208.

[16a] E. E. Levi, Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche de due o più variabili complesse, Annali di Mat. pura appl., (3), **17**, 1910, p. 61–87.

[16b] E. E. Levi, Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse, ibid., (3), **18**, 1911, p. 69–79.

[17] F. Norguet, Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (passage du local au global), Bull. Soc. Math. France, **82**, 1954, p. 137–159.

[18] K. Oka (岡潔), Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables:

I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles, J. Sci. Hiroshima Univ., (A) **6**, Nr. 3, 1936, p. 245–255.

II. Domaines d'holomorphie, ibid., **7**, Nr. 2, 1937, p. 115–130.

III. Deuxième preblème de Cousin, ibid., **9**, Nr. 1, 1939, p. 7–19.

IV. Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, Jap. J. of Math., **17**, 1941, p. 517–531. 2

V. L'intégral de Cauchy, ibid., p. 523–531.

VI. Domaines pseudoconvexes, Tôhoku Math. J., **49**, 1942, p. 15–52.

VII. Sur quelques notions arithmétiques, Bull. Soc. Math. France, **78**, 1950, p. 1–27.

VIII. Lemme fondamentale, J. Math. Soc. Japan, **3**, 1951, p. 204–214, p. 259–279. 8

IX. Domaines finis sans point critique intérieur, Jap. J. of Math., **23**,

1953, p. 97–155.

[19] H. Poincaré, Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme, Rendiconti Cir. Mat. Palermo, **23**, 1907, p. 185–220.

[20a] R. Remmert, Projektionen analytischer Mengen, Math. Annalen, **130**, 1956, p. 410–441.

Gunning-Rossi (1965)

Notes

As remarked in the introduction, there is an approach to several complex variables which centers around pseudoconvex domains, considering those as the proper generalization of the unit ball. The techniques are those of partial differential equations; and the attitude is differential-geometric rather than function-theoretic. Until recently these techniques have been highly developed only in the study of compact manifolds. But by now the applications to open manifolds are profound. In particular, it is possible to prove theorem B6 directly for locally free sheaves, without any of the machinery evolved here [142]. The methods of J. J. Kohn [142] are very sensitive to boundary behavior, and open up a field of study which is apparently inaccessible in the sheaf-theoretic approach. It should also be mentioned that strict pseudoconvexity is only an extreme case of the properties of being pseudoconvex or pseudoconcave. (Cf. the papers of Rothstein [205], Ehrenpreis [3, 85], Kohn [142], Andreotti-Grauert [5], Andreotti [6], Kohn-Rossi [143].)

Except for proposition A4 (due to Kohn) the results in Chapter IX, up to lemma B5, are due to E. E. Levi [162]. The results in the rest of Section B are due to Grauert [104]; (an earlier argument, using other techniques is due to Ehrenpreis [3]). The extension to spaces is due to Narasimhan [180].

The argument in proposition C5 is a trivial case of an important theorem of Grauert [105], which goes as follows. Suppose $\pi\colon X \longrightarrow Y$ is a proper mapping of analytic spaces, and $\mathscr{S}$ is a coherent sheaf on X. If U is open in Y, define $\Gamma_U = H^0(\pi^{-1}(U), \mathscr{S})$. The collection $\{\Gamma_U\}$ defines a presheaf on Y, and the associated sheaf $\pi_0(\mathscr{S})$ is called the direct image sheaf. Grauert's theorem is that $\pi_0(\mathscr{S})$ is a coherent sheaf on X. In particular, in proposition C5, what is used is that $\pi_0(\mathscr{O}_E)$ is coherent. Remmert's proper mappings theorem (theorem V, C8) is easily deduced from this theorem.

There are many ways of handling the rest of Sections C, D: the reader is refered to the papers of Bremermann [50–52], Docquier-Grauert [82], Behnke [16]. The theorem we refer to as Oka's theorem in Section D was first proved in $\mathbb{C}^2$ by Oka [186, VI], and then in $\mathbb{C}^n$ by Bremermann [49], Norguet [185], Oka [186, IX]. ✓ The theorems in Section E are to be found in Grauert [106] (originally in Kodaira [138]). Grauert actually proved theorem E3 in the case that A has a weakly negative vector bundle of any rank. The proof is exactly the same as in the case of a line bundle; however, at the end A gets mapped into a Grassmannian rather than projective space.

34 Gunning-Rossi

Gun-Ros (1965)

32. Bishop, E., "A minimal boundary for function algebras," *Pac. J. Math* **9**(1959), 629–642.

33. Bishop, E., "Mappings of partially analytic spaces," *Amer. J. Math.* **83**(1961), 209–242.

34. Bishop, E., "Some global problems in the theory of functions of several complex variables," *Amer. J. Math.* **83**(1961), 479–498.

35. Bishop, E., "Partially analytic spaces," *Amer. J. Math.* **83**(1961), 669–692.

36. Bishop, E., "Analytic functions with values in a Frechet space," *Pacific J. Math.* **12**(1962) 1177–1192.

37. Bishop, E., "Holomorphic completion, analytic continuation, and the interpolation of semi-norms," *Ann. Math.* **78**(1963), 468–500.

38. Bishop, E., "Differentiable manifolds in Euclidean space," *Duke Math. Jour.* **32**(1965), 1–22.

39. Blanchard, A., "Sur les variétés analytiques complexes," *Ann. Sci. École Norm. Super.* **73**(1956), 157–202.

40. Bochner, S., "A theorem on analytic continuation of functions in several variables," *Ann. Math.* **39**(1938), 14–19.

41. Bochner, S., "Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula," *Ann. Math.* **44**(1943), 652–673.

42. Bochner, S., "Group invariance of Cauchy's formula in several variables," *Ann. Math.* **45**(1944), 686–706.

43. Bochner, S., "Linear and algebraic dependence of functions on compact complex spaces with singularities," *Proc. N.A.S.* **45**(1959), pp. 47–49.

44. Bochner, S., "Hartogs' theorem in Euclidean space and a related theorem on the torus," *Contributions to Function Theory* (Tata Institute, Bombay, 1960), pp. 79–113.

45. Bochner, S., and Gunning, R. C., "Infinite linear pseudogroups of transformations," *Ann. Math.* **75**(1962), 93–104.

46. Bochner, S., and Martin, W. T., *Several Complex Variables* (Princeton University Press, 1948).

47. Bochner, S., and Martin, W. T., "Complex spaces with singularities," *Ann. Math.* **57**(1953), 490–519.

48. Bremermann, H. J., "Die Holomorphie hullen der Tuben- und Halbtuben-gebiete," *Math. Ann.* **127**(1954), 406–423.

49. Bremermann, H. J., Über die Äquivalenz der pseudo-konvexen Gebiete und der Holomorphie-gebiete im Raum von *n* komplexen Veränderlichen," *Math. Ann.* **128**(1954), 63–91. ✓

50. Bremermann, H. J., "Complex convexity," *Trans. Amer. Math. Soc.* **82**(1956) 17–51.

35

Gunning – Rossi (1965)

181. Narasimhan, R., "Levi Problem for Complex Spaces II," *Math. Ann.* **146**(1962), 195–216.

182. Nickerson, H. K., "On the complex form of the Poincaré lemma," *Proc. Amer. Math. Soc.* **9**(1958), 183–188.

183. Nickerson, H. K., Spencer, D. C., and Steenrod, N., *Advanced Calculus* (D. Van Nostrand and Co., 1959).

184. Nishino, T., "Sur les familles de surfaces analytiques," *J. Math. Kyoto Univ.* **1**(1961/62), 357–377.

185. Norguet, F., "Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (passage du local au global)," *Bull. Soc. Math. France* **82**(1954), 137–159.

186. Oka, K., *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables* (Tokyo, Iwanami Shoten, 1961). [This is a collection of reprints of nine articles under the same general title, which have appeared in the following journals:

I "Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles," *J. Sci. Hiroshima Univ.*, ser. A **6**(1936), 245–255.

II "Domaines d'holomorphie," *J. Sci. Hiroshima Univ.*, ser. A **7**(1937), 115–130.

III "Deuxième problème de Cousin," *J. Sci. Hiroshima Univ.*, ser. A **9**(1939), 7–19.

IV "Domaines d'holomorphie et domaines rationellement convexes," *Jap. J. Math.* **17**(1941), 517–521.

V "L'intégrale de Cauchy," *Jap. J. Math.* **17**(1941), 523–531.

VI "Domaines pseudoconvexes," *Tohoku Math. J.* **49**(1942), 15–52.

VII "Sur quelques notions arithmétiques," *Bull. Soc. Math. France* **78**(1950), 1–27.

VIII "Lemme fondamental," *J. Math. Soc. Japan* **3**(1951), 204–214 and 259–278.

IX "Domaines finis sans point critique intérieur," *Jap. J. Math.* **23**(1953), 97–155.

Since then, the following paper in the series has also appeared:

X "Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudoconvexes," *Jap. J. Math.* **32**(1962), 1–12.]

187. Osgood, W. F., *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 2d ed., vol. 2, part I (Leipzig, Teubner, 1929).

188. Ramspott, R. J., and Stein, K., "Über Rungesche Paare komplexer Mannigfaltigkeit," *Math. Ann.* **145**(1962), 444–463.

189. Remmert, R., "Projektionen analytischer Mengen," *Math. Ann.* **130**(1956), 410–441.

36

NORTH-HOLLAND
MATHEMATICAL LIBRARY

An Introduction to Complex Analysis in Several Variables

LARS HÖRMANDER

Third Edition (Revised)

North-Holland

(1966)

37

Hörmander (1966)
Chap. IV 章末

entire analytic function U in $\mathbf{C}^{2n}$ such that $U = u$ in Σ and

$$\int |U(\theta)|^2 e^{-2\varphi_\varepsilon(\theta)}(1 + |\theta|^2)^{-3n} \, d\lambda < \infty,$$

where $d\lambda$ is now the Lebesgue measure in $\mathbf{C}^{2n}$. By Theorem 2.2.3 this implies that

$$|U(\theta)| \le C\, e^{\varphi_\varepsilon(\theta)}(1 + |\theta|)^{3n}. \tag{4.5.14}$$

Now set

$$\Psi(\theta) = U(\theta)\hat{\chi}(\theta)$$

where $\hat{\chi}$ is the Fourier–Laplace transform of a non-negative function $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{C}^n)$ with support in $\{z; |z| < \varepsilon\}$, such that χ only depends on $|z|$ and the integral of χ equals 1. This means that $\hat{\chi}(0) = 1$ and that $\hat{\chi}(\theta)$ is a function of $\theta_1^2 + \cdots + \theta_{2n}^2$, which implies that $\hat{\chi} = 1$ in Σ. Hence Ψ satisfies (4.5.11), and since by the Paley–Wiener theorem

$$|\hat{\chi}(\theta)| \le C_N(1 + |\theta|)^{-N} e^{\varepsilon|\operatorname{Im}\theta|}$$

for every N (this is proved by partial integration), the estimate (4.5.12)′ with ε replaced by 2ε follows from (4.5.14).

Example. The function $M(\zeta) = \cos(2\sqrt{\zeta_1\zeta_2})$ is entire and of exponential type. Since $|\cos t| \le e^{|t|}$ for every complex number t, it follows that

$$|M(\zeta)| \le \exp(a_1|\zeta_1| + a_2|\zeta_2|) \quad \text{if } a_1 a_2 = 1 \text{ and } a_1, a_2 > 0.$$

Hence the analytic functional μ for which $\tilde{\mu} = M$ is carried by the set $\{(z_1,z_2); |z_1| \le a_1, |z_2| \le a_2\}$ if $a_1 a_2 = 1$. The intersection of these carriers is the origin, but it is clear that μ is not carried by the origin since $M(\zeta_1,\zeta_1)$ is of exponential type 2. Hence there need not exist a smallest convex set which carries M except in the case $n = 1$ where the Borel transform of M can be continued analytically to the complement of the intersection of all convex sets carrying μ, which proves that μ is carried by the intersection.

Notes. Existence theorems for the Cauchy–Riemann equations in domains of holomorphy (stated as solution of the first Cousin problem) were first proved by Oka [2]. He also proved an approximation theorem for functions analytic in a neighborhood of a holomorph-convex compact subset. For a smaller class of domains this is due to Weil [3]. The identity of pseudoconvex domains and domains of holomorphy was proved much later by Oka [5], Bremermann [2] and

[IX]

Hörmander (1966)

Norguet [1]. It is an important feature of the methods used here that they solve the first Cousin problem directly in pseudoconvex domains. This makes it easy to prove that these are domains of holomorphy. In doing so we also prove that they are characterized by the existence of solutions to the equation $\bar{\partial} u = f$ for every form with $\bar{\partial} f = 0$ (cf. Serre [3]). Techniques similar to those used here were first proposed by Garabedian and Spencer [1] in analogy with the Hodge–de Rham–Kodaira decomposition of forms on Riemannian manifolds. The basic a priori estimates were first proved by Morrey [1] for (0, 1) forms and by Kohn [1] in the general case. (A simplification due to Ash [1] of the proof of Kohn [1] will be used in Chapter V.) Kohn [2] also proved some theorems on boundary regularity required in his approach and that of Morrey; a simplified proof has been given by Kohn and Nirenberg [1]. The technique of using weight functions to modify the L^2 norms goes back to Carleman in other areas of the theory of partial differential equations. It was introduced in the present context by Hörmander [1] to avoid the boundary difficulties referred to above and to prove sharper results. Related arguments are due to Andreotti and Vesentini [1]. More precise existence theorems in L^2 norms are given in section 4.4 with a few applications. Theorem 4.4.4 is due to Bombieri [1]; for further applications we refer to Skoda [1, 2]. The important feature of Theorem 4.4.2, the main result, is its uniformity with respect to the weight functions and pseudo-convex sets considered. As an application we give a proof due to Kiselman [2], [3] of the theorem of Siu [1] on the Lelong numbers of plurisubharmonic functions. Our presentation also contains some arguments from Lelong [2]. We refer to Siu [1] and Lelong [2] for more general versions concerning closed positive currents, and for applications. The methods of section 4.4 can also be used to study asymptotic properties of entire analytic functions (see Sigurdsson [1]). As a simple application of the results of section 4.4 we prove in section 4.5 a theorem on analytic functionals due to Pólya [1] for one complex variable and to Ehrenpreis [2] and Martineau [1] in general. Using results of Martineau [1], Kiselman [1] has studied when there is a unique minimal carrier for an analytic functional. For applications of analytic functionals, see e.g. Ehrenpreis [3], Malgrange [3].

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 68, No. 2, September, 1958
Printed in Japan

Grauert (1958)

ON LEVI'S PROBLEM AND THE IMBEDDING OF REAL-ANALYTIC MANIFOLDS

BY HANS GRAUERT

(Received March 19, 1958)

Introduction

In 1911 E. E. Levi [18] showed that the boundary of a domain of holomorphy is not arbitrary. It satisfies certain condition of convexity and therefore is called pseudoconvex.[1] The pseudoconvexity is a local property. To prove that a domain with twice differentiable boundary is pseudoconvex it is only necessary to verify that some differential inequalities are satisfied (see [3]).

For more than forty years it was an open problem of the theory of several complex variables whether the Levi conditions are sufficient for the domains of holomorphy. At first the problem was solved for special domains. After refuting a counter-example of Blumenthal, H. Behnke proved that Levi's conjecture is true for (complex) 2-dimensional circular domains [1]. The first general result, however, was not obtained until 1942 by K. Oka [22]. Oka showed: *each pseudoconvex domain G of the 2-dimensional complex number space C^2 is a domain of holomorphy.* The problem was solved for the case of dimension $n > 2$ by K. Oka [23], H. 1953 Bremermann [5] and F. Norguet [21] in 1954. K. Oka [22] even proved 23 that every unbranched (not necessarily schlicht) pseudoconvex domain over the n-dimensional complex number space C^n is a (holomorphically convex) domain of holomorphy. For branched domains and domains in the closed C^n, that is, in the n-dimensional complex projective space P^n, the problem is still unsolved.[2]

Using plurisubharmonic functions it can easily be proved that each pseudoconvex domain $G \subset C^n$ can be exhausted by strongly pseudoconvex domains $G_\nu \subset\subset G$ (see [23]). By a theorem of H. Behnke and K. Stein [2], the limit of domains of holomorphy is again a domain of holomorphy. So Levi's conjecture has to be verified only for strongly pseudoconvex domains (for definitions see § 1).

In this short paper relatively compact, *strongly* pseudoconvex subdomains G of complex manifolds $\mathfrak{M}$ are considered (without any assump-

[1] There are several definitions of pseudoconvexity. See [17].

[2] K. Oka has announced that the answer is also "yes" for these cases.

40

Graduate Texts in Mathematics

Klaus Fritzsche
Hans Grauert

From Holomorphic Functions to Complex Manifolds

Springer

(2002)

$\mathbf{z}_0$ in H and set $C := C_{P\cap G}(\mathbf{z}_0)$.[1] Since H lies in $P \cap G$ and is connected, it follows that $H \subset C$. Furthermore, $C \subsetneqq P$.

P. 51

Since $P \cap G \neq \varnothing$ and $(\mathbb{C}^n - G) \cap P \neq \varnothing$, by the lemma there is a point $\mathbf{z}_1 \in \partial C \cap \partial G \cap P$ (see Figure II.5).

Fr. - Gr. (2002)

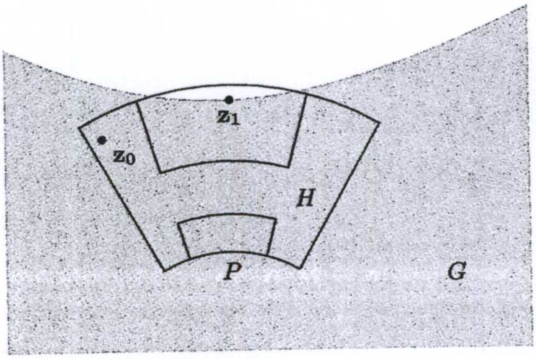


Figure II.5. G is not Hartogs convex

Let f be an arbitrary holomorphic function in G. Then $f|_C$ is also holomorphic, and by the continuity theorem it has a holomorphic extension F on P. Since P is an open connected neighborhood of $\mathbf{z}_1$, we obtain that f is not completely singular at $\mathbf{z}_1$. This completes the proof by contradiction. ∎

It follows, for example, that every convex domain is Hartogs convex. As a consequence, we see that every ball is Hartogs convex.

1.11 Theorem. *Every domain of holomorphy is Hartogs convex.*

The proof is trivial.

For the converse of this theorem one has to construct on any Hartogs convex domain a global holomorphic function that becomes completely singular at every boundary point, something that is rather difficult. It was done in 1910 by E.E. Levi in very special cases. The general case is called *Levi's problem.*

In 1942 K. Oka gave a proof for $n = 2$. At the beginning of the 1950s Oka, Bremermann, and Norguet solved Levi's problem for arbitrary n. It was gen-

[1] We denote by $C_M(\mathbf{z})$ the connected component of M containing $\mathbf{z}$.

eralized for complex manifolds (H. Grauert, 1958) and complex spaces (R. Narasimhan, 1962). Finally, in 1965 L. Hörmander published a proof that used Hilbert space methods and partial differential equations.

Fr.-Gr. (2002)

[KaKa83] L. Kaup, B. Kaup: *Holomorphic Functions of Several Variables.* Walter de Gruyter, Berlin (1983).

[Ko54] K. Kodaira: *On Kähler varieties of restricted type.* Ann. Math. **60**, No. 1, 28–48 (1954).

[Ko63] J.J. Kohn: *Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds.* I. Ann. Math. 78, 112–148 (1963) and II. Ann. Math. 79, 450–472 (1964).

[Ko79] J.J. Kohn: *Subellipticity of the $\overline{\partial}$-Neumann problem on pseudo-convex domains: sufficient conditions.* Acta math. **142**, 79–122 (1979).

[KoNi65] J.J. Kohn, L. Nirenberg: *Non-coercive boundary value problems.* Comm. Pure Appl. Math. **18**, 443–492 (1965).

[Ku60] N. Kuhlmann: *Projektive Modifikationen komplexer Räume.* Math. Ann. **139**, 217–238 (1960).

[La60] H. Langmaack: *Zur Konstruktion von Holomorphiehüllen unverzweigter Gebiete über dem $\mathbb{C}^n$.* Schriftenreihe d. Math. Inst. Münster **17**, 1–88 (1960).

[Lau71] H.B. Laufer: *Normal two-dimensional singularities.* Annals of Math. Studies **71**, Princeton (1971).

[Li70] I. Lieb: *Die Cauchy-Riemannschen DGLn auf streng pseudokonvexen Gebieten (beschränkte Lösungen).* Math. Ann. **190**, 6–44 (1970).

[Moi67] B.G. Moishezon: *On n-dimensional compact varieties with n algebraically independent meromorphic functions.* AMS Transl., II. Ser., **63**, 51–177 (1967).

[MoKo71] J. Morrow, K. Kodaira: *Complex Manifolds.* Holt, Rinehart and Winston, New York (1971).

[Nag58] M. Nagata: *Existence theorems for non-projective complete algebraic varieties.* Illinois Journal of Mathematics **2**, 490–498 (1958).

[Nar60] R. Narasimhan: *Imbedding of holomorphically complete complex spaces.* Am. J. Math. **82**, 917–934 (1960).

[Nar92] R. Narasimhan: *Compact Riemann surfaces.* Birkhäuser, Boston (1992).

[No54] F. Norguet: *Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes.* Bull. Soc. France **82**, 137–159 (1954).

[Oda88] T. Oda: *Convex Bodies and Algebraic Geometry – An Introduction to the Theory of Toric Varieties.* Springer Heidelberg 1988.

Q [Oka53] K. Oka: *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IX Domaines finis sans point critique interieur.* Jap. J. Math. **23**, 97–155 (1953).

[Pe86] Th. Peternell: *Algebraicity criteria for compact complex manifolds.* Math. Annalen **275**, 653–672 (1986).

43

Quelques souvenirs
par Henri Cartan

Münster/Westfalen, le 9 octobre 1978

祝辞 成就 年齢

Glückwunschadresse zur Vollendung des 80. Lebensjahres von Heinrich Behnke. Ein Jahr später, am 10. Oktober 1979, ist Heinrich Behnke nach langer Krankheit in Münster verstorben.

長い 死去

Cher Heinrich,
Mesdames, Messieurs,

Ma première rencontre avec Heinrich Behnke se situe à Münster, au mois de mai 1931. Les rencontres entre Allemands et Français n'étaient pas très fréquentes à cette époque. Ce jeune professeur de 32 ans avait décidé de faire de l'Université de Münster un centre vivant pour les mathématiques, et il avait su grouper autour de lui un cercle de jeunes chercheurs des deux sexes. Pour eux il avait organisé la visite d'un jeune Français de 26 ans et avait conçu un programme de travail chargé, puisque le visiteur devait donner, dans l'espace d'une semaine, quatre conférences d'une heure en allemand et une conférence en français, sans parler des conférenciers allemands et d'une excursion en forêt.

Combien vivant reste en moi le souvenir de la vieille ville de Münster, si riche en trésors artistiques avant les destructions de la guerre, le souvenir du bâtiment de l'Université sur la Domplatz, le souvenir du Professeur Behnke, muni d'un chapeau à larges bords, dépassant de sa haute stature la petite cohorte de ses élèves en promenade dans le parc du château !

Qu'est-ce donc qui m'avait valu cette invitation flatteuse à un colloque auquel avaient été aussi conviés des mathématiciens de villes voisines ? C'était, je pense, la publication d'une Note aux Comptes Rendus où je démontrais que tout isomorphisme holomorphe d'un domaine cerclé borné sur un autre domaine cerclé, dans lequel les centres des domaines se correspondent, est nécessairement *linéaire*. Ce résultat avait été peu auparavant démontré par Heinrich Behnke par une autre méthode, mais sous certaines hypothèses restrictives, en fait inutiles. Cette visite à Münster me permit de découvrir un centre actif et vivant comme il n'en existait pas en France à cette époque-là, de voir un maître proche de ses élèves, sachant leur poser des problèmes intéressants et consacrer le temps nécessaire pour discuter avec eux, sans d'ailleurs que ces relations nuisent à la déférence que les élèves devaient porter au maître.

C'est lors de cette visite de mai 1931 que je fis la connaissance de futurs amis, comme Gottfried Köthe, Stefan Bergmann, ou encore le philosophe Heinrich Scholz, si fin, si sensible, si souffrant parfois. Et c'est là surtout que j'appris à connaître Peter Thullen, alors assistant du Professeur Behnke, jeune mathématicien de 25 ans admirablement doué. Ce devait être pour lui et moi le début d'une collaboration scientifique, puis d'une longue amitié.

Je quittai Münster avec regret, muni d'un beau volume plein de reproductions des richesses artistiques de la ville de Münster, don de Heinrich Behnke. Ce livre devait malheureusement disparaître pendant la guerre à Strasbourg; mais 44 ans plus tard, mon vieil ami Behnke, venu fêter mon jubilé à Orsay en 1975, devait m'apporter un autre livre sur Münster reconstruite.

Je revis Heinrich Behnke à Zürich en septembre 1932, au congrès international des mathématiciens. Il était accompagné de sa nouvelle épouse, en qui je reconnus l'une des étudiantes rencontrées l'année précédente à Münster.

Puis vinrent les années de l'hitlérisme, qui ne nous séparèrent pas pour autant.

Heinrich Behnke vint en France pendant l'été de 1937; il nous rendit visite, à mon père et à moi-même, dans le petit village de Dolomieu (entre Lyon et Grenoble), où était né Elie Cartan et où il avait fait construire une maison pour les réunions familiales des vacances d'été. Heinrich Behnke s'est souvent plu à évoquer plus tard le calme paisible de cette rencontre, où l'on pouvait oublier un instant un monde agité et inquiétant. Cette visite nous permit de resserrer nos liens d'amitié.

En mai 1938, j'étais une seconde fois invité à Münster; mais l'atmosphère avait bien changé depuis ma première visite. Les étudiants se faisaient rares. Peter Thullen avait dû quitter l'Allemagne depuis plusieurs années; l'assistant avec lequel Heinrich Behnke travaillait activement s'appelait Karl Stein. Tous deux préparaient un travail sur les suites croissantes de domaines d'holomorphie. Je n'oublierai pas l'atmosphère oppressée qui régnait alors. Lorsque nous nous séparâmes, Behnke et moi nous demandions (sans oser nous l'avouer) quand et comment nous pourrions nous revoir.

1939, 1940. C'est la guerre. Dès le rétablissement des relations postales entre la France occupée et l'Allemagne, en février 1941, je reçois une lettre de mon ami Behnke. Il me fait part d'une lettre de Oka (datée de décembre 1940) qui annonce qu'il a résolu le problème de la pseudo-convexité globale (problème de Levi). Oka avait joint à sa lettre deux exemplaires de son manuscrit, dont l'un m'est destiné (mais ne me parviendra pas). Heinrich Behnke prend la peine de recopier de sa main la lettre de Oka, écrite en français. Je ne résiste pas à l'envie d'en citer un extrait : « Comme vous le connaîtrez bien, j'étudie la théorie d'après votre point de vue. Et, pour le " Hauptproblem der Theorie der Singularitäten " formulé dans votre ouvrage, je viens heureusement à vous faire la réponse affirmative. Je voudrais présenter le manuscrit de ma Note sur le problème à vous et à votre ami, M. Henri Cartan, mais je n'ai rien de nouvelle de lui. Et je vous envoie ici deux manuscrits. Auriez-vous la bonté de lui remettre un à quelque occasion favorable ? » L'ouvrage dont parle Oka est naturellement le " Bericht Behnke-Thullen " qui a servi de point de départ à toutes les recherches d'Oka.

2次元とのコメントがなら

手渡ス

Nouvelle lettre de Behnke du 8 août 1941 : avec l'aide de Wilhelm Süss, il s'est réfugié à Fribourg avec sa femme qui va avoir un bébé. Entre temps, Oka a publié sa Note au Japon.

Et notre correspondance se poursuit pendant toute la guerre, à intervalles espacés. Je ne puis oublier, cher Heinrich, que deux fois vous avez fait le voyage de Strasbourg pour prendre soin des papiers scientifiques que j'avais dû abandonner dans mon logement; ces papiers ont été déposés par vos soins à la bibliothèque de l'Université de Fribourg, et ainsi j'ai pu les retrouver après la guerre, grâce à vous.

Je ne puis pas non plus oublier toutes les démarches que vous avez faites durant les années 1943 et 1944 (en vain, hélas) pour tenter de retrouver la trace de mon frère Louis, déporté en Allemagne au mois de février 1943, et qui ne devait jamais revenir.

Enfin, le 22 avril 1945, la fin de la guerre est proche; vous m'écrivez une lettre de cinq grandes pages dans laquelle vous ouvrez votre cœur. Vous êtes à Oberwolfach, vous relatez les destructions qu'a apportées la guerre, et vous dites ceci : « Möge es nur auf beiden Seiten genügend viele Menschen geben, die hinreichend Kraft des Verstandes und des Herzens haben, um den Berg von Voreingenommenheiten zu beseitigen ! Gebe mir der Herrgott die Kraft, zur Verbesserung der Gesinnung beitragen zu können. » Je crois pouvoir dire aujourd'hui, cher ami, que ces vœux pleins de sagesse ont été exaucés.

Web 岡潔文庫
[X1] 西野

解　題

1. 初めに. 岡先生の第 I 論文で提起された問題 "Runge の定理や P. Cousin の定理が成り立つ領域のタイプ, F. Hartogs の凸性と H. Cartan と P. Thullen の凸性の関係" に対する一連の研究は, 未解決の問題 "内分岐領域に対する Hartogs の逆問題" を残したまま, この第 IX 論文で終わりになった. しかもこの論文の実質的な部分は, 序文にも書かれているように, すでに 1943 年に日本語で書かれているのである.[1] それらの論文の表題と頁数をもう一度挙げておく[2].

1. 多変数解析函数に就て, VII 正則函数の合同に関する二つの補助問題. 1943 年 9 月 4 日, 33 頁.
2. 多変数解析函数に就て, VIII 分岐点を持たない有限領域に対する第一基礎的補助定理. 1943 年 9 月 5 日, 14 頁.
3. 多変数解析函数に就て, IX 擬凸状函数. 1943 年 10 月 24 日 31 頁.
4. 多変数解析函数に就て, X 第二基礎的補助定理. 1943 年 11 月 12 日, 14 頁.
5. 多変数解析函数に就て, XI 擬凸状域と有限正則域, 有限正則域に於ける諸定理. 1943 年 12 月 12 日, 37 頁.

これらの一連の論文内容と第 IX 論文の内容を簡単に比較しておこう.

1° 日本語論文 VII と VIII の結果は第 VII 論文によって美しく一般化されており, 第 IX 論文ではその結果が使われている. なお第 VIII 論文の基本補題を量的評価付きで解く問題はこの第 IX 論文の第 1 章で解決されている.

2° 日本語論文 IX と X の結果は殆どそのまま第 IX 論文の第 2 章に書かれているが, 命題や証明法は第 IX 論文の方が洗練されている.

3° 日本語論文 XI の結果はそのまま洗練された形で第 IX 論文の第 3 章に書かれているが, そこにはそれ以外に, Cousin の第 2 問題と, 第 VII 論文の問題 (C_1), (C_2), (E) が不分岐擬凸状領域にまで一般化されている.

2. 幻の第 X 論文. 岡先生の論文の序文はどれも立派であるが, この論文の序文も非常に格調高く書かれている. その序文の 2 の中程に

≪ 次の論文では, 分岐点を許すと, 非常に難しい問題に出合う事を見るであろう. この論文を分離して発表することにしたのは, その手段を準備し, 困難さの姿を明らかにするためである.≫

と書かれている. さらに第 2 章の終わりの節には, 今後の問題として,

[1] 岡潔先生遺稿集第一集収録. このホームページに公開されている.

[2] 同じ番号の異なる論文が色々あるので, 以後フランス語で書かれて公表されいる論文だけは第*論文と表記して他と区別する.

岩波

IX Domaines finis sans point critique intérieur.

Introduction. 1. C'est le neuvième d'une succession de Mémoires[1], dont le premier a été publié en 1936. Nous allons d'abord jeter un coup d'œil sur le terrain où nous demeurons.

La théorie générale du prolongement analytique à une seule variable est semblable à la plaine campagne; là, on n'a pu trouver, malgré les nombreux efforts[2], aucun fait en dehors des prévisions de la logique formelle. Au contraire, le cas de plusieurs variables nous apparaît comme un pays montagneux, très escarpé.

En 1902, Fabry a remarqué que les rayons de convergence d'une série double ne sont pas arbitraires; d'où nous avons été conduits en 1906 par Hartogs au fait tout fondamental et vraiment curieux que tout domaine d'holomorphie est pseudoconvexe.

Désormais, un problème découvert à nouveau donnait naissance à un autre sur ce terrain jusqu'à 1932, dont la configuration d'accumulation de difficultés, ainsi que le courant d'idées, est dessinée d'une façon très prononcée dans l'Ouvrage suivant:

Behnke-Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 1934, où les problèmes principaux sont les suivants: problème inverse de Hartogs, premier et deuxième problèmes de Cousin, problème de développement[3].

En 1935, Weil a fait un premier pas à la direction inverse, c'est-à-dire, à la direction de résoudre des problèmes, grâce auquel les trois derniers

(1) Les Mémoires précédents sont: I Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles. 1936. II Domaines d'holomorphie, 1937, III Deuxième problème de Cousin, 1939 (Journal of Science of the Hiroshima University). IV Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, 1941, V L'intégrale de Cauchy, 1941 (Japanese Journal of Mathematics). VI Domaines pseudoconvexes, 1942 (Tôhoku Mathematical Journal). VII Sur quelques notions arithmétiques, 1950 (Bulletin de la Société Mathématique de France). VIII Lemme fondamental, 1951 (Journal of Mathematical Society of Japan). (Rappelons la voie que nous avons suivie).

(2) Voir, par exemple, des beaux Mémoires de Denjoy (C. R., Paris).

(3) Voir pages 54, 68, 79 de l'Ouvrage. C'est vraiment grâce à cet Ouvrage que nous avons pu commencer nos recherches.

des problèmes ci-dessus sont devenus résolubles pour les domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles[1].

C'est justement à ce temps et pour ces problèmes, que nous avons commencé nos recherches. Pour obtenir l'image vivante sur la transition de problèmes depuis 1934, il y a des Mémoires de Behnke-Stein que voici :

Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polstellenflächen, 1937[2]. Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, 1940[3]. Die Singularitäten der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen, 1952[4].

2. Dans le présent Mémoire, nous traiterons les problèmes indiqués plus haut, ainsi que les problèmes arithmétiques introduits au Mémoire VII, pour les domaines pseudoconvexes finis sans point critique intérieur ; dont la partie essentielle n'est pas différente de ce que nous avons exposé en japonais en 1943[5].

On verra dans le Mémoire suivant que quand on admet les points critiques intérieurs, on rencontre à un problème qui m'apparaît extrêmement difficile (Voir No. 23). C'est pour préparer des méthodes et pour éclaircir la figure de la difficulté, que nous avons décidé à publier le présent Mémoire, séparément[6].

Ce Mémoire consiste en trois chapitres. Dans le Chapitre I, nous adjoindrons un complément quantitatif au lemme exposé au Mémoire VIII. Dans le Chapitre II, nous préparerons le deuxième lemme. Et dans le Chapitre III, nous traiterons les problèmes ci-dessus, en nous servant de ces lemmes. (Précisément, voir Nos. 1, 7, 24.)

Chapitre I. Complément du lemme.

1. Problème. Nous voulons résoudre *le problème inverse de Har-*

---

(1) Avant lui. ces problèmes n'étaient résolubles que dans les domaines cylindriques. Voir : A. Weil, Sur les séries de polynomes de deux variables complexes, 1932 (C. R., Paris). A. Weil, L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, 1935 (Math. Annalen).

(2) (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung). Voir aussi : H. Cartan, Note sur le premier problème de Cousin, 1938 (C. R., Paris).

(3) (Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, VIII).

(4) (Nieuw Archief voor Wiskunde, Amsterdam).

(5), (6) Voir la Note à l'Introduction du Mémoire VIII. Dans ce manuscrit-ci on trouve déjà les problèmes (C_1), (C_2) (explicitement) et (E) (implicitement).

Levi 問題の解決の正しい記述：

1. ２次元領域： K. Oka [VI] (1942) Rec.1941.10.25. **初の一般的結果**。注意。この論文で初めて
多重劣調和関数＝擬凸関数
（複素直線への制限が劣調和）の概念が定義された。P. Lelong も独立 (?) にこの概念を得た。
2. 一般次元、被覆領域（リーマン領域）の場合：K. Oka [IX] (1953/43 in Japanese).*)

*) [IX] の序文 **2** から分かるように、この間岡先生は分岐被覆も扱うことを考察していた。その結果が [VII], [VIII] であった。

3. その後、一般次元領域の場合：Bremermann, Norguet 等も Oka [VI] のアイデア（Weil-Oka の積分表示・岡の融合法）による証明を与えた。

多重劣調和関数・擬凸関数の発見．

1. Oka VI (1942): Levi 問題の解決のために導入。上半連続、任意の複素直線に制限して劣調和。可微分な場合は、我々が現在使っている Levi 型式の正値性（Levi の Levi 型式は、これと異なる）。
2. H. Cartan の “Quelques Souvenirs” にあるように、1940 年 12 月日付の Levi 問題解決についての岡先生の手紙が、1941 年 2 月にはパリの Cartan の所に着いていた。岡の論文原稿のコピーは、着かなかった由。
3. Lelong, C.R. 215 (1942), 398-400 の受理記録： Séance du 3 november 1942.: 定義だけ！　Levi 問題への言及は全くない。
これ以前の同年の論文は、Sur certaines fonctions multiformes, C. R. Acad. Sci. Paris 214, (1942), 53–54.
Sur les valeurs lacunaires d’une relation à deux variables, I, II., Bull. Sci. math. (2) 66 (1942), 103-108, 112-125.
これ等は多価正則関数の値分布に関するもの。時系列として、Lelong はこの論文以後に “plurisousbharmonique” の概念を得たと考えるのが妥当。

Rechercher

Abonnez-vous

en

fr

Site Internet de l'Académie des sciences

- Les actualités
- L'Académie
  - Gouvernance
  - Les Membres
  - Histoire
  - Missions et statuts
  - Rapport d'activité
  - Comités
  - Musées
  - Nous contacter
- Les activités
  - Publications
  - Colloques et séances publiques
  - Prix
  - Enseignement
  - Archives
  - Jumelages avec le Parlement
  - International
  - Parrainages
- Les vidéos
- Espace presse
  - Communiqués de presse
  - L'Académie dans la presse

In memoriam

Retour vers la rubrique

Pierre LELONG

14 mars 1912 - 12 octobre 2011

Pierre Lelong, né le 14 mars 1912 à Paris, est décédé le 12 octobre 2011. Il avait été élu Membre de l'Académie des sciences le 13 mai 1985 (section de Mathématique).

Voir la notice sur les travaux scientifiques de Pierre Lelong (1973, avec mises à jour en 1974, 1976, 1985 et 1993)

Notice nécrologique

Au cours de sa longue carrière, Pierre Lelong a été successivement professeur à Grenoble, à Lille et à la Faculté des sciences de Paris à partir de 1955. Il a exercé de hautes responsabilités, en particulier comme Conseiller technique pour l'Éducation nationale et la recherche scientifique auprès du Général de Gaulle de 1959 à 1961, puis comme Président de la Commission de la recherche scientifique du IVe plan de 1962 à 1964.

Son oeuvre scientifique a eu un très grand impact sur l'évolution de l'analyse complexe. À la suite de premiers travaux novateurs sur les fonctions entières de plusieurs variables, Pierre Lelong a introduit en 1942 le concept fondamental de fonction plurisousharmonique.

順応な

Ces fonctions très souples, également étudiées par Oka au Japon dans le milieu des années 1940, sont les analogues des fonctions convexes dans le domaine complexe. Elles jouent un rôle considérable dans l'analyse complexe contemporaine, par exemple pour obtenir des estimées hilbertiennes sur les solutions des équations de Cauchy-Riemann. Il en découle de puissants résultats d'existence ou de convexité en géométrie analytique, qui ont trouvé des applications aussi bien en géométrie algébrique qu'en théorie des nombres, et de multiples prolongements dans le monde entier avec les travaux de mathématiciens comme Kodaira, Grauert, Hörmander, Bombieri et Siu.

Un autre apport fondamental de Pierre Lelong est l'introduction de la théorie des courants positifs à la fin des années 1950. Ceux-ci fournissent une généralisation très riche des cycles analytiques, et sont maintenant universellement utilisés en théorie des systèmes dynamiques holomorphes. Le nombre densité d'un courant, aujourd'hui connu sous le nom de "nombre de Lelong", généralise ainsi la notion de multiplicité d'une singularité analytique.

Pierre Lelong a été distingué par de nombreux prix scientifiques, et il a reçu le titre de Docteur Honoris Causa de l'Université d'Uppsala en 1981. Il était Commandeur de la Légion d'Honneur.

Son influence et celle du séminaire d'analyse qu'il a animé jusqu'au milieu des années 1980 ont fortement contribué à forger l'école française d'analyse et géométrie complexes. Avec lui, c'est le dernier représentant d'une génération de grands mathématiciens français qui s'éteint.

Jean-Pierre Demailly, octobre 2011

Heinrich Behnke vint en France pendant l'été de 1937; il nous rendit visite, à mon père et à moi-même, dans le petit village de Dolomieu (entre Lyon et Grenoble), où était né Elie Cartan et où il avait fait construire une maison pour les réunions familiales des vacances d'été. Heinrich Behnke s'est souvent plu à évoquer plus tard le calme paisible de cette rencontre, où l'on pouvait oublier un instant un monde agité et inquiétant. Cette visite nous permit de resserrer nos liens d'amitié.

En mai 1938, j'étais une seconde fois invité à Münster; mais l'atmosphère avait bien changé depuis ma première visite. Les étudiants se faisaient rares. Peter Thullen avait dû quitter l'Allemagne depuis plusieurs années; l'assistant avec lequel Heinrich Behnke travaillait activement s'appelait Karl Stein. Tous deux préparaient un travail sur les suites croissantes de domaines d'holomorphie. Je n'oublierai pas l'atmosphère oppressée qui régnait alors. Lorsque nous nous séparâmes, Behnke et moi nous demandions (sans oser nous l'avouer) quand et comment nous pourrions nous revoir.

1939, 1940. C'est la guerre. Dès le rétablissement des relations postales entre la France occupée et l'Allemagne, en février 1941, je reçois une lettre de mon ami Behnke. Il me fait part d'une lettre de Oka (datée de décembre 1940) qui annonce qu'il a résolu le problème de la pseudo-convexité globale (problème de Levi). Oka avait joint à sa lettre deux exemplaires de son manuscrit, dont l'un m'est destiné (mais ne me parviendra pas). Heinrich Behnke prend la peine de recopier de sa main la lettre de Oka, écrite en français. Je ne résiste pas à l'envie d'en citer un extrait : « Comme vous le connaîtrez bien, j'étudie la théorie d'après votre point de vue. Et, pour le " Hauptproblem der Theorie der Singularitäten " formulé dans votre ouvrage, je viens heureusement à vous faire la réponse affirmative. Je voudrais présenter le manuscrit de ma Note sur le problème à vous et à votre ami, M. Henri Cartan, mais je n'ai rien de nouvelle de lui. Et je vous envoie ici deux manuscrits. Auriez-vous la bonté de lui remettre un à quelque occasion favorable ? » L'ouvrage dont parle Oka est naturellement le " Bericht Behnke-Thullen " qui a servi de point de départ à toutes les recherches d'Oka.

2次元とのコメントがなら

手渡ス

Nouvelle lettre de Behnke du 8 août 1941 : avec l'aide de Wilhelm Süss, il s'est réfugié à Fribourg avec sa femme qui va avoir un bébé. Entre temps, Oka a publié sa Note au Japon.

Et notre correspondance se poursuit pendant toute la guerre, à intervalles espacés. Je ne puis oublier, cher Heinrich, que deux fois vous avez fait le voyage de Strasbourg pour prendre soin des papiers scientifiques que j'avais dû abandonner dans mon logement; ces papiers ont été déposés par vos soins à la bibliothèque de l'Université de Fribourg, et ainsi j'ai pu les retrouver après la guerre, grâce à vous.

Je ne puis pas non plus oublier toutes les démarches que vous avez faites durant les années 1943 et 1944 (en vain, hélas) pour tenter de retrouver la trace de mon frère Louis, déporté en Allemagne au mois de février 1943, et qui ne devait jamais revenir.

Enfin, le 22 avril 1945, la fin de la guerre est proche; vous m'écrivez une lettre de cinq grandes pages dans laquelle vous ouvrez votre cœur. Vous êtes à Oberwolfach, vous relatez les destructions qu'a apportées la guerre, et vous dites ceci : « Möge es nur auf beiden Seiten genügend viele Menschen geben, die hinreichend Kraft des Verstandes und des Herzens haben, um den Berg von Voreingenommenheiten zu beseitigen ! Gebe mir der Herrgott die Kraft, zur Verbesserung der Gesinnung beitragen zu können. » Je crois pouvoir dire aujourd'hui, cher ami, que ces vœux pleins de sagesse ont été exaucés.

Proc. Imp. Acad. Tokyo 17 (1941), 7–10.

Sur les domaines pseudoconvexes.

Par Kiyosi OKA.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A, Jan. 13, 1941.)

Au commencement du progrès récent de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables, *F. Hartogs* a découvert que tout *domaine d'holomorphie*[1] est un *domaine psudoconvexe.* Ces 2 notions sont devenues extrêmement importantes d'après le développement de la théorie; le problème réciproque reste cependant à peu près libre même aujourd'hui. Nous traiterons ce problème dans la présente Note; où nous placerons pour la simplicité à l'espace de 2 variables complexes, mais la conclusion s'appliquera, je crois, à un nombre quelconque de variables.

1. Dans l'espace des 2 variables complexes x, y, considérons un domaine univalent et fini D. Nous l'appellerons *pseudoconvexe*, si l'ensemble complémentaire E de D satisfait au *théorème de la continuité* au voisinage d'un point fini quelconque P, et encore si ceci admet toute transformation pseudoconforme biunivoque au voisinage de P; dont la première condition veut dire que: lorsque l'on trace une hypersphère suffisamment petite autour de P, et prend arbitrairement dans la hypersphère un point (a, b) et une circonférence de la forme, $x = a, |y - b| = r$, si (a, b) appartient à E, sans l'être pour aucun point de la circonférence, on peut trouver un nombre positif d de façon que, à tout x' dans $|x - a| < d$, corresponde dans $|y - b| < r$ au moins un y' tel que (x', y') appartienne à E. Alors :

Théorème. Dans l'espace de 2 variables complexes, tout domaine pseudoconvexe univalent et fini est un domaine d'holomorphie.

La démonstration sera donnée dans un Mémoire ultérieur. Dans ce qui suit, nous en exposerons tout rapidement la partie essentielle.

2. Nous allons construire un domaine pseudoconvexe Δ satisfaisant aux conditions un peu compliquées, à partir de 2 domaines d'holomorphie empiétant l'un sur l'autre. Considérons dans l'espace (x, y) un domaine *univalent et borné* D et 3 hyperplans de la forme $x_1 = a$, $x_1 = a_1$, $x_1 = a_2$, que nous désigneron par L, L_1, L_2, respectivement, où x_1 représente la partie réelle de x et $a_2 < a < a_1$. Supposons D traversé par chacun des hyperplans, et désignons les parties de D au côté gauche de L_1,

[1] Un domaine est appelé domaine d'holomorphie, s'il l'est pour une au moins des fonctions.

Oka VI

Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.

VI Domaines pseudoconvexes.

Par

Kiyoshi Oka

(Reçu le 25 octobre, 1941)

Introduction. En 1906, F. Hartogs a découvert une restriction très curieuse, à laquelle sont soumis les domaines d'holomorphie[1], et par cette découverte même, je pense, a commencé le développement récent de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables.

La même restriction a été succesivement trouvée aux fonds des différentes branches de la théorie, par E. E. Levi, G. Julia, W. Saxer et l'auteur[2]. Nous appelons tout domaine restreint de ce mode d'être *pseudoconvexe*[3].

La convexité de cette sorte admet d'être critiquée d'une manière locale. Or, en 1932, H. Cartan et P. Thullen ont trouvé que les domaines d'holomorphie sont encore, en un certain sens, globalement convexes[4]. Et grâce à cette propriété, nous venons d'établir plusieurs théorèmes globaux par rapport aux domaine d'holomorphie [5].

---

[1]F. Hartogs, Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen, 1906. (Münch. Berichte.)

[2]E. E. Levi, Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse, 1910, (Annali di Matematica.)

G. Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables, 1926. (Acta Mathematica.).

W. Saxer, Sur les familles de fonctions méromorphes de plusieurs variables, 1931. (Comptes Rendus, Paris.)

K. Oka, Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes ete., 1934. (Journal of Science of the Hiroshima University.)

[3]Pour les domains univalents et finis, nous l'avons défini à Mémoire IV; voir: No.10, Mémoire actuel.

[4]Et la réciproque: Voir:

H.Cartan–P.Thullen, Regularitäts–und Konvergenzbereiche, 1932. (Mathematische Annalen.) Pour l'idée, voir :

H. Cartan, Sur les domaines d'existence de fonctions de plusieurs variables complexes, 1931. (Bull. Société mathématique de France.)

[5]Mémoires précédents des présentes recherehes: I Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936; II Domaines d'holomorphie, 1937; III Deuxième problème de Cousin, 1939; (Joumal of Science of the Hiroshima University.) IV Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, 1941; V L'intégrale de Cauchy,1941; (Japanese journal of Mathematics.)

Oka VI

Considérons à l'espace (x, y) un domaine borné Δ, tel que la frontière S soit donnée par $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$, dont $x = x_1 + ix_2$ et $y = y_1 + iy_2$, de manière que l'on ait $\varphi < 0$ pour les points de Δ et $\varphi > 0$ pour les points extérieurs, où φ exprime une fonction réelle, *bien définie*[31] et continue au voisinage de S, ayant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre. Dans ces conditions, E. E. Levi a montré que, pour que Δ soit pseudoconvexe, il *faut* que l'on ait $L(\varphi) \geq 0$ sur S, dont

$$\begin{aligned} L(\varphi) = &\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right)^2\right] \\ &+ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right] \\ &-2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\right) \\ &-2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right) \end{aligned}$$

C'est une conséquence de la proposition suivante: *Si $L(\varphi) < 0$ à un point P de S, on peut trouver une surface caractèristique passant par P, régulière en P et restant dans Δ au voisinage de P, sauf à P.* Remarquons ici que $L(-\varphi) = -L(\varphi)$.

D'où il s'ensuit, d'après le résultat que nous venons d'obtenir, que, *si $L(\varphi) > 0$ partout sur S, Δ est un domaine d'holomophie.* Donc, en tenant compte du *théorème de H. Behnke–K. Stein, il s'agit si un domaine pseudoconvexe quelconque est approximatif de l'intérieur par une suite de domaines ayant cette caractère* $(L(\varphi) > 0)$. C'est ce problème que nous traiterons dans la présente Section.

Or, on n'a pas nécessairement $L(\varphi_1 + \varphi_2) > 0$, même si $L(\varphi_1) > 0$ et $L(\varphi_2) > 0$. Pour traiter le problème, nous allons d'abord chercher une autre condition jouissant d'un rôle analogue et restant invariable par rapport à l'addition de fonctions.

Considérons un domaine pseudoconvexes $\mathfrak{D}$ à l'espace (x, y), nous désignerons par $\mathfrak{D}(\xi)$ la projection sur le plan y, de l'intersection de $\mathfrak{D}$ avec un plan caractéristique de la forme $x = \xi$, ξ étant une constante. $\mathfrak{D}(\xi)$ est un ensemble ouvert sur le plan y. Nous désignerons par $R_\eta(\xi)$ la distance (au sens usuel) d'un point η de $\mathfrak{D}(\xi)$ à la frontière de $\mathfrak{D}(\xi)$. Cette fonction $R_y(x)$ définie dans $\mathfrak{D}$; correspond du *rayon d'holomorphie*

[31] C'est-à-dire, à tout point (x, y) correspond une valeur de φ, finie ou non. mais une seule.

Oka VI

de F. Hartogs. Hartogs a montré que

$$-\log R_y(x)$$

est une fonction subharmonique par rapport à x, (détermination du logarithme étant réelle).

Faisons ici une remarque sur la définition de fonctions subhamoniques. Soit A un domaine sur le plan x; on appelle *fonction subharmonique* par rapport à x dans A, toute fonction réelle $\varphi(x)$ bien définie dans A, satisfaisant aux conditions suivantes: 1° $e^{\varphi(x)}$ est finie et semi-continue supérieurement dans A. 2° Soit (δ) un domaine quelconque à l'intérieur de A, soit γ la frontière de (δ); et soit $u(x)$ une fonction harmonique par rapport à x, (c'est-à-dire, par rapport à x_1, x_2) dans (δ) restant continue jusqu'à la circonférence γ; alors, si

$$\varphi(x) \leq u(x)$$

harmonic majorant

sur γ, il en est de même pour (δ). Les fonctions subharmoniques ainsi définies peuvent prendre la valeur $-\infty$. *Nous entendrons que la constante $-\infty$ est y comprise.*[32]

Or, pour le *rayon de Hartogs*, on trouvera de plus que *cette fonction est subharmonique sur tout plan caractéristique, par rapport à x ou à y.*[33] En étudiant les fonctions ayant cette propriété, nous trouverons que la condition différentielle possède le caractère demandé. Et nous verrons, pour le problème formulé ci-dessus, que tout domaine pseudoconvexe est approximatif de l'intérieur par une suite de domaines ayant le nouveau caractère; cela nous suffit.

11. Nouvelle classe de fonctions réelles. Considérons dans l'espace (x, y) un domaine quelconque $\mathfrak{D}$, pseudoconvexe ou non.

Nous appellerons fonction pseudoconvexe par rapport à x, y dans $\mathfrak{D}$, toute fonction réelle $\varphi(x, y)$ bien définie et satisfaisant aux conditions suivantes: 1° *La fonction $e^{\varphi(x,y)}$ est finie et semi-continue supérieurement par rapport à x, y dans $\mathfrak{D}$.* 2° *Sur tout plan caractéristique L passant par un point de $\mathfrak{D}$, $\varphi(x, y)$ est une fonction subharmonique de x ou de y sur la portion de L dans $\mathfrak{D}$.*

[32]Pour les fonctions subharmoniques, voir par exemple: F. Riesz, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport avec la théorie du potentiel. I, 1926. (Acta math.)

[33]Voir: No. 11.

Oka VI

12. Condition différentielle. Dans un domaine quelconque $\mathfrak{D}$ à l'espace (x,y), étant donnée une fonction réelle continue $\varphi(x_1,x_2,y_1,y_2)$ admettant les dérivées partielles continues jusqu'au deuxième ordre, nous allons chercher la condition pour que φ soit pseudoconvexe en x,y.

Prenons un point quelconque P de $\mathfrak{D}$, que nous supposerons d'être à l'origine pour simplifier l'écriture. Considérons un plan caractéristique de la forme

$$y = ax, \qquad a = \alpha + i\beta;$$

sur lequel nous avons

$$\Phi(x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2,y_1,y_2),$$

dont

$$y_1 = \alpha x_1 - \beta x_2, \qquad y_2 = \beta x_1 + \alpha x_2;$$

$\Phi(x_1,x_2)$ est définie au voisinage de $x=0$. Nous allons calculer

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}.$$

En posant

$$\left[\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}, & D &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}, \\ B &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_2}, & C &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial y_1}, \end{aligned}\right]$$

nous obtenons sans difficulté que

$$(1) \qquad \Delta\Phi = A + 2B\alpha + 2C\beta + D(\alpha^2+\beta^2).$$

En considérant A,B,C,D comme constantes réelles et α,β comme paramètres réels nous envisagerons la forme

$$(2) \qquad U(\alpha,\beta) = A + 2B\alpha + 2C\beta + D(\alpha^2+\beta^2)$$

pour

$$-\infty < \alpha < +\infty, \quad -\infty < \beta < +\infty.$$

Calculons d'abord *la borne inférieure* m de U: 1° Quand $D \leq 0$; si $B=C=D=0$, on a $m=A$; si non, on a $m=-\infty$. 2° Quand $D>0$, il existe certainement au moins un (α,β) pour lequel $U=m$; par suite ce (α,β) sera donné par

$$\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \alpha} = B + D\alpha = 0,$$

Oka VI

$$\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \beta} = C + D\beta = 0.$$

Donc,

$$(3) \qquad mD = AD - (B^2 + C^2).$$

Cherchons ensuite la condition pour que la forme $U(\alpha, \beta)$ soit *non-négative.* Pour cela, il faut d'abord que $D \geq 0$, puisque, si non, $m = -\infty$. De plus; 1^o Si $D = 0$, il faut que $B = C = 0$ et $A \geq 0$. 2^o Si $D > 0$, il faut que $mD \geq 0$. En résumé,

$$(4) \qquad A \geq 0, \quad D \geq 0, \quad AD - (B^2 + C^2) \geq 0$$

donne la condition *nécessaire.*

Supposons réciproquement que la condition (4) soit remplie; alors, il n'y a que deux cas possibles: ou bien $D = 0$, ce qui entraîne $m = A \geq 0$, puisqu'alors $B = C = 0$ nécessairement; ou bien $D > 0$, on a alors $mD \geq 0$ d'après (3), et par suite $m \geq 0$. La condition (4) est ainsi *suffisante.*

Revenons au problème original; et nous supposerons une fonction pseudoconvexe φ dans $\mathfrak{D}$. Φ étant alors subharmonique par rapport à x en l'origine, nous avons nécessairement $\Delta\Phi \geq 0$ pour $x = 0$, et cela pour tout plan caractéristique de la forme $y = ax$. La condition (4) est donc nécessaire pour P, d'après ce que nous venons de voir, dont P est un point quelconque dans $\mathfrak{D}$.

Supposons réciproquement que la condition (4) soit remplie dans $\mathfrak{D}$. Pour un point quelconque P de $\mathfrak{D}$, φ est alors subharmonique sur tout plan caractéristique de la forme $y = ax + b$ passant par P, au voisinage de P, puisque l'on a nécessairement $\Delta\Phi \geq 0$. Il en est nécessairement de même pour tout plan caractéristique de la forme $x = ay + b$, car, la condition (4) est symétrique par rapport à x, y. La fonction φ est donc pseudoconvexe dans $\mathfrak{D}$. Nous avons ainsi vu que :

Soit $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2)$ une fonction réelle continue admettant les dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre dans un domaine $\mathfrak{D}$. Pour que φ soit pseudoconvexe par rapport à x, y dans $\mathfrak{D}$, il faut et il suffit que l'on ait dans $\mathfrak{D}$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2} \geq 0,$$

$$V(\varphi) = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial y_2}\right)^2$$

Notes on mathematics and its applications

General editors: Jacob T. Schwartz, *Courant Institute of Mathematical Sciences*, and Maurice Lévy, *Université de Paris*

E. Artin ALGEBRAIC NUMBERS AND ALGEBRAIC FUNCTIONS
R. P. Boas COLLECTED WORKS OF HIDEHIKO YAMABE
M. Davis A FIRST COURSE IN FUNCTIONAL ANALYSIS
M. Davis LECTURES ON MODERN MATHEMATICS
J. Eells, Jr. SINGULARITIES OF SMOOTH MAPS
K. O. Friedrichs ADVANCED ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
K. O. Friedrichs SPECIAL TOPICS IN FLUID DYNAMICS
A. Guichardet SPECIAL TOPICS IN TOPOLOGICAL ALGEBRAS
M. Hausner and J. T. Schwartz LIE GROUPS; LIE ALGEBRAS
P. Hilton HOMOTOPY THEORY AND DUALITY
F. John LECTURES ON ADVANCED NUMERICAL ANALYSIS
A. M. Krall STABILITY TECHNIQUES FOR CONTINUOUS LINEAR SYSTEMS
P. Lelong PLURISUBHARMONIC FUNCTIONS AND POSITIVE DIFFERENTIAL FORMS
H. Mullish AN INTRODUCTION TO COMPUTER PROGRAMMING
F. Rellich PERTURBATION THEORY OF EIGENVALUE PROBLEMS
J. T. Schwartz DIFFERENTIAL GEOMETRY AND TOPOLOGY
J. T. Schwartz NONLINEAR FUNCTIONAL ANALYSIS
J. T. Schwartz W-* ALGEBRAS
J. L. Soulé LINEAR OPERATORS IN HILBERT SPACE
J. J. Stoker NONLINEAR ELASTICITY

Additional volumes in preparation

Plurisubharmonic functions and positive differential forms

Pierre LELONG
The Sorbonne
Paris

Translated by
M. A. Dostal

GORDON AND BREACH
Science Publishers
NEW YORK LONDON PARIS

Preface

THESE LECTURES were delivered at the colloquium in Varenna, Italy, organized by the Centro Matematico Internazionale Estivo (C.M.I.E.) in the summer of 1963. There we gave an account of certain notions introduced in our previous work together with an indication of their more recent developments. The present lectures are concerned on the one hand with plurisubharmonic functions, on which research still continues, and on the other hand with certain classes of generalized differential forms, called "positive currents", which play an important role in the study of metric properties of complex analytic sets.

Much could be said about the present development of the theory of functions of several complex variables. Let us only recall that the theory is now developing in many different directions. These different points of view create a splitting in what was the heart of the classical "function theory".

Many properties can be easily expressed in terms of the ring $\mathcal{O}_n$ of holomorphic functions of n complex variables, making it possible to work algebraically with finitely generated coherent $\mathcal{O}_n$-modules.

The other properties, however, use a totally different language: actually a great number of problems can be formulated in terms of plurisubharmonic functions and positive measures. The reader can make a useful comparison with the recent development of the theory of functions of one complex variable: in the modern research on Riemann surfaces, for example, one very often uses the tools of potential theory (subharmonic functions) in order to obtain more subtle results. The same trend appears in the theory of analytic functions of n complex variables. The object of our first communication in *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (1942) on plurisubharmonic functions was to define this important class of functions as a means of describing complex convexity and its analogy with classical convexity. Since then, in the period of the last twenty-five years, the relations between the complex convexity, holomorphic functions and the properties of the $d_{\bar{z}}$ operator have been more and more clarified. Indeed the publication of these lectures might be helpful to the reader by giving him an extensive account of for the plurisubharmonic case was given in ref. 5); by Theorem 10 the same is true for any closed subset W^n which can be obtained as a countable union of such sets E_q defined in W^n.

5 References

1. V. Avanissian, "Functions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques", *Ann. Ecole Norm. Super.* (1961).
2. M. Brelot, *Lectures on Potential Theory*, Tata Institute, Bombay (1960).
3. P. Lelong (a) "Définition des fonctions plurisousharmoniques", *Compt. Rend.*, **215,** 398 (1942);
   (b) "Sur les suites de fonctions plurisousharmoniques", *Compt. Rend.*, **215,** 454 (1942);
   (c) "Sur une propriété de la frontière d'un domaine d'holomorphie", *Compt. Rend.*, **216,** 167 (1943);
   (d) "Les fonctions plurisousharmoniques", *Ann. Ecole Norm. Super.*, **62,** 301–338 (1945);
   (e) "Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation", *Ann. Ecole Norm. Super.*, **67,** 393–419 (1950);
   (f) "La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes", *J. Math.*, **31,** 191–219 (1952);
   (g) "Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques", *J. Math.*, **36,** 263–303 (1957);
   (h) "Sur une classe de singularités impropres", *Arch. Math.*, **9,** 3, 161–166 (1958);
   (i) "Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques réelles", *Ann. Inst. Founier*, **11,** (1961).
4. J. Deny and P. Lelong, "Etude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône", *Bull. Soc. Math. France*, **75,** 89–112 (1947).
5. H. Grauert and R. Remmert, "Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen", *Math. Z.*, **65,** 175–194 (1956).

CHAPTER III

Plurisubharmonic functions and the Levi problem

1 Convexity in C^n with respect to plurisubharmonic functions

The main result of this chapter is the following: A domain which is convex with respect to plurisubharmonic functions is also convex with respect to holomorphic functions. For the domains in C^n this result is due to K. Oka[5a] when $n = 2$, and to F. Norguet[4b] for arbitrary n. The proofs of these authors are based on integral representations. The contemporary methods use cohomology, namely the preliminary proof of the fact that $H^q(D, \sigma)$ is of finite dimension for $q \geqslant 1$; here σ is the sheaf of germs of holomorphic functions in a domain D which is strictly convex with respect to plurisubharmonic functions. In this form the result extends to analytic spaces.

First we recall the results of an elementary treatment[2b] of domains D in C^n, which show without using the Oka theorem, the equivalence of different classical properties. The consequence of it is that for a univalent domain D in C^n all these properties are equivalent to the property that D be convex with respect to plurisubharmonic functions defined on D. The class of functions plurisubharmonic in D will be denoted by $P(D)$.

P-convexity We shall say that D is convex with respect to the class of plurisubharmonic functions which are defined in D (abbreviated as P-convex), if for every compact $K \subset D$ one can find a set $E(K)$, $E(K) \Subset D$, such that in each open set $\omega \subset D - \bar{E}(K)$ there exists at least one point z and a function $V \in P(D)$ for which we have

$$V(z) > \sup_{z' \in K} V(z').$$

The class (C_0) of domains with this property is invariant with respect to the class of plurisubharmonic functions $P(D)$. The domain D will be called P-convex if D is convex with respect to the class $P(D)$ of plurisubharmonic functions in D.

Classes (Γ) On the other hand, we shall say that D is of class (Γ), if there exists a function $V \in P(D)$ which tends to $+\infty$ when one approaches the boundary bD of D.

and therefore also in a whole neighborhood of x_0. Ω has a connected component $D' \subset U \Subset D$ which is a Runge domain. Therefore, one has

$$\hat{K}_H(D) = \hat{K}_H(D'). \tag{3}$$

Further, each plurisubharmonic function V can be approximated in D' by the functions $V_\rho = V * \alpha_\rho$ where ρ is small enough. If $\sup_{y\in K} V(y) = A$, then $V(x) < A + \varepsilon$ for $\rho < \rho_0$. Hence $\sup_K V_\rho(x)$ tends to $\sup_K V(x)$ when $\rho \to 0$. Then, however, $x_1 \notin \hat{K}_p(D)$ implies $x_1 \notin K_{pc}(D')$. Thus

$$K_{pc}(D') \subset K_p(D)$$

Finally,

$$\hat{K}\hat{K}_H(D') = \hat{K}_{pc}(D') \subset \hat{K}_p(D) \subset \hat{K}_H(D)$$

which together with (3) implies

$$\hat{K}_H(D) = K_p(D)$$

as well as the next statement:

PROPOSITION 3 *A compact subset K of a P-convex (and therefore also holomorphically convex) domain in C^n has the same envelope of convexity with respect to holomorphic functions in D as with respect to plurisubharmonic functions in D.*

4 References

1. H. J. BREMERMANN (a) "Die Charakterisierung von Regularitätsgebieten", *Thesis*, Münster (1951);
   (b) "On the conjecture of the equivalence of the plurisubharmonic functions and the Hartogs functions", *Math. Ann.*, **131** (1956).
2. P. LELONG (a) "La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables", *J. Math.*, **31**, 191–219 (1951);
   (b) "Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques", *J. Analyse Jérusalem*, **11**, 178–208 (1952).
3. R. NARASIMHAN (a) "The Levi's problem for complex spaces, I", *Math. Ann.*, **142**, 355–365 (1961);
   (b) "The Levi's problem for complex spores, II", *Math. Ann.*, **146**, 355–365 (1962).
4. F. NORGUET (a) "Problème de Lévi et plongement des variétés analytiques réelles", *Sém. Bourbaki*, No. 173 (1958–59);
   (b) "Sur les domaines d'holomorphie", *Bull. Soc. Math. France*, **82**, 137–159;
   (c) "Un théorème de finitude pour la cohomologie des faisceaux", *Atti Accad. Nazl. Lincei*, **31**, 222 (1961);
   (d) *Séminaire d'Analyse*, Institut Henri Poincaré, Exposé no. 6 (1962).
5. K. OKA (a) "Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VI", *Tohoku Math. J.*, **49** (1942);
   (b) "Domaines finis sans point critique intérieur, XI", *Japan. J. Math.*, **23**, 97–155 (1953).
6. H. GRAUERT, "On Levi's problem", *Ann. Math.*, **68** (1958).

CHAPTER IV

Positive elements of an exterior complex algebra with involutions

1 Introduction

THE STUDY of analytic functions of $n > 1$ complex variables, or more generally, the study of complex structures, involves homogenous forms of type (1,1):

$$t = i \sum_{p,q} t_{p,q} dz_p \wedge d\bar{z}_q, \qquad p, q = 1, \ldots, n \tag{1}$$

with the condition $\sum t_{p,q} h_p \bar{h}_q \geqslant 0$ for every complex vector $\vec{h} = (h_p)$. Let us recall that with a real-valued plurisubharmonic function V, one can associate the following measure

$$\delta(V, \vec{h}) = \sum_{p,q} \frac{\partial^2 V}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} h_p \bar{h}_q, \tag{2}$$

which is positive for every vector $\vec{h}$ from C^n. However, in the following we prefer to formulate our condition for the corresponding *exterior* form t which is obtained by replacing $h_p \vec{h}_q$ by $i dz_p \wedge d\bar{z}_q$. It can be written as $t = i d_z d_{\bar{z}} V$ and it is actually a generalized form (or a current in the sense of G. de Rham). Thus, we are led to the notion of a *positive form* of degree 1 with respect to the exterior algebra $E_{2n}(dz, d\bar{z})$. This notion can be extended to degrees p, $0 \leqslant p \leqslant n$. The positive forms of degree p are of type (p, p) and form a convex cone E^p_+. On the other hand, the coefficients can be taken either from a vector space (the case of currents), or from a ring (e.g. a ring of continuous functions). In the latter case, a monomial, which is the exterior product of q positive forms of degree 1, is still a positive form; thus we obtain a positive cone whose elements can be multiplied with each other.

2 Positive elements

First, let us consider the case of an exterior complex algebra E_{2n} over the complex number field K and with the involution $a \to \bar{a}$ defined by taking the complex conjugate in K. We shall take a basis $(\omega_1, \ldots, \omega_n,$

Part II Oka [VII], [VIII] について。

連接性のこと。

§1 [VII] の出版時期について。

§2 幾何学的イデアル層について：

Oka [VII] (1950),

Oka [VIII] (1951),

H. Cartan (1950)。

BULLETIN DE LA S. M. F.

KIYOSHI OKA

Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 78 (1950), p. 1-27.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1950__78__1_0>

51

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES (VII. SUR QUELQUES NOTIONS ARITHMÉTIQUES);

PAR M. KIYOSHI OKA.

Introduction. — Ce Mémoire (1) est le septième d'une série dont les précédents sont : I. *Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles*, 1936; II. *Domaines d'holomorphie*, 1937; III. *Deuxième problème de Cousin*, 1939 (*Journal of Science of the Hiroshima University*); IV. *Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes*, 1941; V. *L'intégrale de Cauchy*, 1941 (*Japanese Journal of Mathematics*); VI. *Domaines pseudoconvexes*, 1942 (*Tohoku Mathematical Journal*).

On rencontre déjà certaines notions arithmétiques au théorème II du Mémoire I (lemme fondamental), au théorème I du Mémoire II, et à la condition (β) (condition de A. Weil) du Mémoire V. Plus tard, nous rencontrerons une autre notion arithmétique, dans l'étude des points de ramification; faute de laquelle on ne pourrait pas traiter des fonctions algébriques.

Nous commencerons ici par approfondir ces notions arithmétiques. Les notions de *congruence* et d'*idéal*, par exemple, seront transplantées du champ des polynomes à celui des fonctions analytiques. Comme la fonction ne peut pas, en général, être prolongée à tout l'espace, on rencontre de nouveaux problèmes. H. Cartan a découvert un phénomène de cette nature (2), auquel se rattachent plusieurs théorèmes et un problème assez complexe du présent Mémoire

(1) *Note de la Rédaction.* — Le lecteur observera que, par suite de la guerre, l'auteur n'avait pu prendre connaissance du Mémoire de H. CARTAN, *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 61, 1944, p. 149-197) consacré au même sujet, et faisant suite au Mémoire cité par l'auteur [*voir* ci-dessous, note (2)]. Les résultats que M. Oka obtient ici sont plus complets que ceux du Mémoire de H. Cartan de 1944.

(2) H. CARTAN, *Sur les matrices holomorphes de n variables complexes* (*Journ. Math.*, 9e série, 19, 1940, p. 1-26). Nous devons beaucoup aux théorèmes de ce Mémoire.

B. Fr.

(*Voir* §7). Ces théorèmes me sont indispensables pour résoudre les problèmes étudiés depuis le Mémoire I, lorsqu'on veut les étendre au cas des domaines ramifiés; ils sont aussi utiles pour des domaines moins compliqués (3).

Dans le Mémoire actuel, il sera seulement question de domaines *univalents* de l'espace numérique complexe (donc, sans points à l'infini). Nous omettrons de le spécifier.

1. Congruences et équivalences; théorème de H. Cartan. — Parmi les problèmes qui se transportent du champ de l'Arithmétique à celui des fontions analytiques, se trouve un type de problèmes (comme les « problèmes de Cousin »), où il s'agit de passer de données *locales* à des solutions *globales*. Nous allons résumer les principaux problèmes de ce type.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine dans l'espace de n variables complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Considérons, dans $\mathcal{D}$, deux fonctions holomorphes f, φ, et un système fini de p fonctions holomorphes $F_1, \ldots, F_p$. Un point de l'espace sera désigné par une seule lettre (x), et la valeur d'une fonction f en ce point sera notée $f(x)$. Supposons une relation de la forme

$$f-\varphi=\alpha_1 F_1+\ldots+\alpha_p F_p,$$

où les α_i $(i=1, 2, \ldots, p)$ sont des fonctions holomorphes de (x) dans $\mathcal{D}$; les fonctions f, φ seront alors dites *congruentes* par rapport à F dans $\mathcal{D}$, et la relation sera notée

$$f\equiv\varphi \qquad [\operatorname{mod}(F)].$$

Nous dirons que deux fonctions f, φ sont congruentes *en un point* P de $\mathcal{D}$, si elles sont congruentes dans un voisinage de P. Deux fonctions qui sont congruentes en tout point de $\mathcal{D}$ ne sont pas nécessairement congruentes (globalement) dans $\mathcal{D}$. Ceci nous conduit au problème que voici :

Problème (C_1). — *Étant donné un système fini de fonctions holomorphes* $(F_1, \ldots, F_p)$ *et une fonction holomorphe* $\Phi(x)$ *au voisinage d'un ensemble fermé borné* E, *telle que* $\Phi\equiv 0[\operatorname{mod}(F)]$ *en tout point de* E, *trouver* p *fonctions* $A_i(x)$ *holomorphes au voisinage de* E, *de façon que* $\Phi=\sum_i A_i F_i$ *identiquement.*

On est conduit d'autre part au problème d'existence :

Problème (C_2). — *Soit donné, au voisinage d'un ensemble fermé borné* E *de l'espace* (x), *un système fini de fonctions holomorphes* $(F_1, \ldots, F_p)$; *supposons attaché à chaque point* P *de* E *un polycylindre* (γ) *autour de* P *et une fonction* $\varphi(x)$ *holomorphe dans* (γ); *supposons que, pour tout couple de polycylindres* (γ), (γ') *d'intersection* (δ) *non vide, on ait la relation* $\varphi(x)\equiv\varphi'(x)$ $[\operatorname{mod}(F)]$ *entre les fonctions correspondantes en tout point de* (δ). *On se propose de trouver une fonction* $\Phi(x)$ *holomorphe au voisinage de* E, *telle que* $\Phi(x)\equiv\varphi(x)\,[\operatorname{mod}(F)]$ *en tout point* P *de* E.

(3) L'auteur désire exprimer ici ses sincères remerciment à Huju-Kai pour son concours à l'époque du Mémoire VI.

Leri 问题 n=2.

岩波

VII Sur quelques notions arithmétiques.

Introduction. Nous sommes maintenant en chemin de nous réfléchir éfforcément, en reconnaissant les caractères des difficultés que nous avons rencontrées sur la voie suivie,[1] en observant les figures des difficultés que nous rencontrerons sur le prolongement, et en faisant des autres ; et dont nous exposerons ici un des résultats.

On pourra apercevoir des certaines notions arithmétiques au Théorème II du Mémoire I (Lemme fondamental), au Théorème I du Mémoire II, et à la condition (β) (condition de A. Weil) du Mémoire V ; et on rencontrera une autre, si l'on admet les points de ramification ; dont, sans cela, on ne pourra pas traiter même les fonctions algébriques. Ceci nous fait commencer par étudier ces notions.

Supposons quelques notions arithmétiques, la congruence et l'idéal par exemple, transplantés du champ de polynomes à celui de fonctions analytiques ; la fonction ne pouvant en général plus se prolonger à tout espace fini, on apercevra des nouveaux problèmes. C'est H. Cartan qui a découvert un phénomène de cette nature,[2] et dans le présent Mémoire on trouvera, comme conclusion, plusieurs théorèmes et un problème bien filtré de la même nature (Voir No. 7) ; dont les théorèmes me sont indispensables pour traiter les problèmes depuis le Mémoire I, aux domaines contenant les points de ramification, et ils sont utiles pour les domaines moins compliqués. (*)

Or, nous, devant le beau système de problèmes à F. Hartogs et aux successeurs, voulons léguer des nouveaux problèmes à ceux qui nous suivront ; or, comme le champ de fonctions analytiques de plusieurs variables s'étend heureusement aux divers branches de mathématiques, nous serons permis de rêver divers types de nouveaux problèmes y préparant.[3]

(1) Les Mémoires précédents sont : I Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936. II Domaines d'holomorphie, 1937. III Deuxième problème de Cousin, 1939. IV Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, 1941. V L'intégrale de Cauchy, 1941. VI Domaines pseudoconvexes, 1942.

(2) H. Cartan, Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, 1940, p. 1–26 (Journal de Mathématiques, Vol. 19) ; dont nous devons beaucoup aussi aux théorèmes.

(3) L'auteur voudra dire ici un remerciement sincère à Hūju-Kai pour son secours depuis

岩波

«Dans le Mémoire actuel, nous ne traiterons que le domaine *univalent et fini*, et dont la condition sera donc généralement abrégée.».

1. Congruences et équivalences. Théorème de H. Cartan. Parmi les problèmes générés des notions arithmétiques transplantées au champ de fonctions analytiques, se trouve *un type* de problèmes, où on demande *globalement* ce que l'on a défini *localement* (comme aux problème de Cousin), et que nous allons recolter.

Dans un domaine D à l'espace de n variables complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$, considérons deux fonctions holomorphes f, φ et une combinaison finie de fonctions holomorphes $(F_1, F_2, \dots, F_p)$ des variables; dont l'espace sera abrégément désigné par (x), et la fonction f par exemple, par $f(x)$; et supposons une relation de la forme,

$$f-\varphi=\alpha_1F_1+\alpha_2F_2+\cdots+\alpha_pF_p,$$

α_i $(i=1, 2, \dots)$ étant des fonctions holomorphes des variables (x) dans D; les fonctions f, φ seront alors appelées *congruentes* par rapport à (F) dans D, et la relation sera désignée par

$$f\equiv\varphi \qquad \mathrm{mod}\,(F).$$

Nous appelons les fonctions f, φ d'être congruentes *en un point* P de D, si elles le sont au voisinage de P: or, même si elles sont congruentes en tout point de D, elles ne le sont pas nécessairement, globalement pour D; et un des problèmes que voici:

Problème (C_1) *Etant données une combinaison finie de fonctions holomorphes* $(F_1, F_2, \dots, F_p)$ *et une fonction holomorphe* $\Phi(x)$ *au voisinage d'un ensemble fermé* E *(nécessairement borné), satisfaisant à la relation* $\Phi(x)\equiv 0 \ \mathrm{mod}\,(F)$ *en tout point de* E*; trouver* p *fonctions* $A_i(x)$ *holomorphes au voisinage de* E, *de façon que* $\Phi=\sum A_iF_i$ $(i=1, 2, \dots, p)$ *identiquement.*

Ceci concerne l'expression de la fonction; si pour la fonction même:

Problème (C_2) *Considérons, au voisinage d'un ensemble fermé* E *à l'espace* (x), *une combinaison finie de fonctions holomorphes* $(F_1, F_2, \dots, F_p)$, *et en un point quelconque* P *de* E, *un polycylindre* (γ) *autour de* P

---

vers le temps du Mémoire VI.

55

多変数解析函数について.

VII　或る算術的概念について.

岡潔

1948 年 10 月 15 日受理

序文.　現在我々は, 来し方[1]に出逢った困難の本性を再認識し, 行く末に出逢うであろう困難の姿を考察するなどの懸命な省察の途上にある. その成果の一端をここに報告しよう.

人々は, 第 I 論文の定理 II (基本補題), 第 II 論文の定理 I および第 V 論文の条件 (β) (A. Weil の条件) において, ある種の算術的概念に気付く筈である. そしてもし分岐点を許すなら, 人々はさらなるそれに出逢うであろう. しかもそれなしには代数函数すら扱うことができないのである. この事は我々をそれらの概念の研究に駆り立てる.

幾つかの算術的概念, 例えば合同とかイデアルとかを多項式の分野から解析函数の分野に移植したとすると, この函数はもはや一般には全有限空間に延長することができないため, そこに新たなる問題が生じる. その種の現象を発見したのは H. Cartan[2]であるが, この論文でも, 結論として, その種の幾つかの定理と精選された一つの問題を見いだすであろう.(No. 7 を見よ) それらの定理は第 I 論文以来の諸問題を分岐点を含んだ領域に対してで研究するためには不可欠であるばかりでなく, それよりも単純な領域の研究に対しても有用である.

さて, 我々は F. Hartogs やその後継者達に負う一連の美しい問題群の延長上に, 新しい問題群を後続の人々に残したいと想う. 幸い多変数解析函数の分野は数学の色々な分野に拡がっているため, 我々はここに提起された新しい問題の様々な変形を夢見ることが許されるであろう.[3]

≪ この論文では 有限で単葉 な領域しか扱わないので, その条件の明示は一般に省かれている.≫

1.　合同と同値.　H. Cartan の定理.　解析函数の分野に移植された算術的概念から生じる問題の中には, (Cousin の問題のように) 局所的 に

[1] これまでの論文は次の通りである. I Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936. II Domaines d'holomorphie, 1937. III Deuxième problème de Cousin, 1939. IV Domaines d'holomrphie et domaines rationnellement convexes, 1941. V L'intégrale de Cauchy, 1941. VI Domaines pseudoconvexes, 1942.

[2] H. Cartan, Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, 1940, p. 1-26 (Journal de Mathématiques, Vol. 19); 我々はまたこれらの定理に多くの事を負っている.)

[3] 著者は第 VI 論文の時代以来の援助に対し, 風樹会に対してここに心からの謝意を述べる.

Springer 英訳
(R. Narasimhan.)

VII. On Some Arithmetical Notions

Sur quelques notions arithmétiques

Bulletin de la Société Mathématique de France **78** (1950), p. 1–27
(Received 15 October 1948)

Introduction. We are now embarked on thinking hard about the subject; among other things, understanding the nature of the difficulties we have met on the path that we have followed[1], and studying the form of the difficulties we shall meet in continuing. We present here one of the results of this reflection.

It will be noticed that there are already certain arithmetical notions in Theorem II of Memoir I (fundamental lemma), in Theorem I of Memoir II, and in condition (β) (WEIL's condition) in Memoir V. We shall meet another such notion when we allow points of ramification in our domains without which we could not even treat algebraic functions. This makes us begin by studying these notions.

Let us suppose that certain arithmetical notions, those of congruence and ideal for example, are transplanted from the field of polynomials to that of analytic functions. Since functions can no longer always be continued to all of (finite) space, we meet new problems. H. CARTAN discovered a phenomenon of this nature[2], and in the present memoir, we shall find, at the end, several theorems and a rather complex problem of the same nature (see No. 7). These theorems are indispensable to me to be able to treat the problems we have been interested in since Memoir I on domains containing ramification points; they are also useful for less complicated domains.

後世ノ人ニ残ス

Having found ourselves face to face with the beautiful problems introduced by F. HARTOGS and his successors, we should like, in turn, to bequeath new problems to those who will follow us. The field of analytic functions of several variables happily extends into diverse branches of mathematics, and we might be permitted to dream of the many types of new problems in store for us[3].

"In the present memoir, we shall only treat *univalent domains without points at infinity*, and this condition will, in general, not be repeated."

1. Congruences and Equivalence. Theorem of H. Cartan. Among the problems generated by transplanting arithmetic notions to the field of analytic functions, there is *one type* of problem in which one asks to obtain *globally*

[1] The preceding memoirs are: I. Rationally convex domains, 1936; II. Domains of holomorphy, 1937; III. The second COUSIN problem, 1939 (Journal of Science of Hiroshima University); IV. Domains of holomorphy and rationally convex domains, 1941; V. The CAUCHY integral, 1941 (Japanese Journal of Mathematics); VI. Pseudoconvex domains, 1942 (Tohoku Math. Journal).

[2] H. CARTAN: Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, 1940, p. 1–26 (Journal de mathématiques, Vol. 19); we owe much to this memoir.

[3] The author would like to express here his sincere thanks to HUJU-KAI for his help since around the time of Memoir VI.

Levi 問題 $n=2$.

Previous: volume 76 (1948) **Next:** volume 78 (1950) **Up:** volume list

Bulletin de la Société Mathématique de France, 77, 1949

Previous: volume 76 (1948) **Next:** volume 78 (1950) **Up:** volume list

OKA [VII] Bull. Fr. 最後の頁

en tout point de (δ), *on peut trouver une fonction* $\Phi(x)$ *holomorphe au voisinage de* Δ, *telle que* $\Phi(x) \equiv \varphi(x)[\mathrm{mod}\,(F)]$ *en tout point* P *de* Δ.

Théorème 3. — *Dans la configuration géométrique du théorème 2, supposons attaché à tout* (γ) *un système fini de fonctions holomorphes* (f), *de façon que, pour tout couple* (γ'), (γ''), *les systèmes correspondants* (f'), (f'') *soient équivalents en tout point de l'intersection* (δ). *Alors on peut trouver un système fini de fonctions* (F) *holomorphes au voisinage de* Δ, *tel que* $(F) \sim (f)$ *en tout point* P *de* Δ.

Théorème 4. — *Étant donné des fonctions* $F_i\,(i = 1, \ldots, p)$ *holomorphes au voisinage d'un polycylindre fermé* Δ, *on peut trouver une solution formulaire de l'équation fonctionnelle* $A_1F_1 + \ldots + A_pF_p = 0$ *au voisinage de* Δ. *Il en est de même pour les systèmes d'équations fonctionnelles linéaires homogènes simultanées.*

Nous nous sommes restreint aux polycylindres fermés : en effet, en vertu des propriétés trouvées, les mêmes problèmes pourront ensuite être résolus pour des ensembles fermés de nature plus générale. Outre les quatre théorèmes que nous venons d'énoncer ici, nous avons vu au paragraphe 5 le *théorème du reste*. Au sujet de ces théorèmes, si nous pensons que cela peut être utile en vue des applications, nous serons obligé d'en faire une étude *quantitative*.

Ainsi, nous venons d'exposer les résultats obtenus. D'un autre côté, nous sommes conduit au nouveau problème :

Problème (J). — *Pour les idéaux de domaines indéterminés, trouver une pseudo-base finie locale.*

Au sujet de ce problème, je ne sais presque rien, pas même quelle sera l'attitude favorable pour l'aborder. Ce qui est sûr, c'est que ce problème ne peut pas être résolu sans conditions, puisque nous avons vu un contre-exemple au paragraphe 2.

C'est un cas particulier de ce problème qui a été résolu sous la forme du problème (K). La solution du problème (K) nous était indispensable pour établir les théorèmes ci-dessus. Nous reviendrons une autre fois sur le problème (J), et montrerons qu'il est résoluble sans condition pour les *idéaux géométriques de domaines indéterminés*. Cela nous sera indispensable si nous voulons pouvoir traiter les problèmes envisagés depuis le Mémoire I, dans le cas où des points de ramification ne sont pas exclus. Ces deux exemples mettront en évidence l'importance du problème.

(Manuscrit reçu le 15 octobre 1948).

Étant donné un idéal (I) de domaines indéterminés, nous dirons qu'un système fini (F) de fonctions holomorphes est une pseudo-base de (I) *en un point*, si c'est une pseudo-base dans un voisinage de ce point. Un tel système sera parfois appelé une *pseudo-base locale*. Nous nous proposons encore le problème suivant :

PROBLÈME (J). — *Étant donné dans l'espace* (x) *un idéal* (I) *de domaines indéterminés et un point* P, *trouver une pseudo-base finie de* (I) *au point* P.

Le problème (J) est un cas particulier du problème (I). Entre ces deux problèmes il y a la relation suivante :

Soit, dans l'espace (x), *un idéal* (I) *de domaines indéterminés et un polycylindre borné fermé* E. *Supposons que le problème* (J) *soit résoluble pour l'idéal* (I) *et pour tout point* P *de* E, *et que de plus le problème* (C_1) *soit résoluble pour tout polycylindre fermé borné. Alors le problème* (I) *est résoluble pour l'idéal* (I) *et le polycylindre* E.

En effet, soit P un point quelconque de E; puisque le problème (J) est résoluble pour (I) au point P, il existe un polycylindre (γ), au voisinage de P, et un système fini de fonctions holomorphes (f) dans (γ), qui constitue une pseudo-base de (I) dans (γ). Considérons un couple de polycylindres (γ), (γ') d'intersection non vide; soient (f) et (f') les pseudo-bases correspondantes; elles sont équivalentes en chaque point de l'intersection $(\gamma) \cap (\gamma')$. Nous nous proposons de trouver un système fini (F) de fonctions holomorphes au voisinage de E, tel que $(F) \sim (f)$ en tout point P de E. Or ceci est un problème (E) pour le polycylindre fermé E; comme on a supposé que le problème (C_1) est résoluble pour tout polycylindre fermé, l'existence de (F) s'ensuit. Or un tel système (F) est une pseudo-base en tout point P de E, donc est une pseudo-base pour E. C. Q. F. D.

Le problème (I) est donc ramené au problème (J), moyennant le problème (C_1) pour les polycylindres fermés bornés. Or le problème (J) n'a pas toujours de solution, comme le montre le contre-exemple suivant :

Exemple 3. — Soient, dans l'espace de deux variables complexes x, y, deux hypersphères (C), (γ) de centre à l'origine, telles que $(C) \supset (\gamma)$. Désignons par Σ_0 la partie de la surface caractéristique $x = y$ qui est contenue (strictement) dans (C) et non strictement contenue dans (γ). Soit (I) l'ensemble des couples (f, δ) dont le δ est contenu dans (C) et tels que $\frac{f}{x-y}$ soit holomorphe en tout point de l'intersection $\Sigma_0 \cap \delta$. Alors (I) est un idéal [qui possède les propriétés (T_1) et (T_2)]; mais, puisque l'ensemble des zéros de (f, δ) est $\Sigma_0 \cap \delta$ pour tout élément (f, δ) de (I), cet idéal (I) ne peut posséder une pseudo-base locale finie en aucun point de la frontière de (γ).

On ne peut donc pas résoudre le problème (J) pour n'importe quel idéal de domaines indéterminés. Nous verrons ultérieurement d'autres contre-exemples.

Nous étudierons deux catégories d'idéaux de domaines indéterminés pour lesquels le problème (J) peut être résolu pour les polycylindres fermés bornés.

L'une d'elles va être étudiée dans le présent Mémoire. L'autre est celle des *idéaux géométriques de domaines indéterminés* (qui correspondent aux idéaux de polynomes attachés aux variétés algébriques), dont la considération deviendra indispensable quand nous aurons à nous occuper des domaines qui admettent des points de ramification. Pour pouvoir montrer que le problème (J) peut être résolu pour les idéaux de cette espèce (et pour les polycylindres bornés fermés), nous aurons besoin non seulement des résultats du présent Mémoire, mais de quelques notions concernant les domaines ramifiés. Nous réserverons donc cette étude pour un Mémoire ultérieur.

3. **Équations fonctionnelles linéaires homogènes; solutions formulaires.** — Nous allons scruter les environs du problème (C_1) grâce aux notions que nous venons d'introduire.

1° *Équations fonctionnelles linéaires homogènes.* — Soient p fonctions holomorphes F_i ($i = 1, \ldots, p$) non identiquement nulles dans un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace (x). Considérons l'équation

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_p F_p = 0, \tag{1}$$

où les A_i désignent des fonctions inconnues; si un système de fonctions A_i holomorphes dans un domaine (connexe ou non) δ contenu dans $\mathcal{D}$ satisfait dans δ à l'équation (1), nous dirons que le système des A_i est une *solution* (*holomorphe*) de l'équation (1) pour δ. Toute équation de cette nature sera dite *équation fonctionnelle linéaire homogène*.

Considérons l'ensemble (I_1) des couples (A_1, δ) tels qu'il existe $A_2, \ldots, A_p$, holomorphes dans δ de manière que ($A_1, A_2, \ldots, A_p$) soit une solution de l'équation (1) pour δ. Je dis que :

(I_1) *est un idéal.*

En effet, si $(A_1, \delta) \in (I_1)$ et si α est une fonction holomorphe dans un domaine (connexe ou non) δ', on a $\alpha A_1 \in (I_1)$ pour $\delta \cap \delta'$; si $(A_1, \delta) \in (I_1)$ et $(A'_1, \delta') \in (I_1)$, on a $A_1 + A'_1 \in (I_1)$ pour $\delta \cap \delta'$.

Nous ne voyons pas immédiatement si (I_1) satisfait aux propriétés (T_1), (T_2) ou non.

C'est cette espèce d'idéaux que nous avions en vue à la fin du paragraphe précédent. Nous montrerons dans ce Mémoire que le problème (J) peut être résolu pour ces idéaux (et pour les polycylindres bornés fermés). Le problème (J) se formule comme suit :

Problème (K). — *Étant donné une équation fonctionnelle linéaire homogène dans un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace (x), et un point P de $\mathcal{D}$, trouver une pseudo-base finie de l'idéal* (I_1) *au point* P [en désignant par (I_1) l'idéal défini par l'équation, comme il a été expliqué ci-dessus].

2° *Solutions formulaires.* — Nous nous proposons maintenant de trouver une

On ne peut donc pas résoudre tous les problèmes (J) à la fois et sans condition. On apercevera encore divers sortes d'exemples contraires.

Nous verrons deux espèces d'idéaux de domaines indéterminés pour lesquelles le problème (J) est résoluble aux polycylindres fermés; dont l'une sera traitée dans le présent Mémoire.

L'autre espèce est *les idéaux géométriques de domaines indéterminés* (ce qui correspond aux idéaux géométriques au champ de polynomes), qui deviendront indispensables à nous, lorsque nous nous occupe domaines admettant des points de ramifications. La démonstration pour les idéaux de cette espèce (pour que le problème (J) soit résoluble aux polycylindre fermés) demande, outre les résultats du Mémoire actuel, quelque notions sur tels domaines. Nous le traiterons donc, dans un Mémoire ultérieur.

3. Equations fonctionnelles linéaires homogènes et ses solution formulaires. Nous allons scruter les environs du problème (C_1) à l'aide conceptions que nous venons de préparer.

1° *Equations fonctionnelles linéaires homogènes.* Considérons p fonctions holomorphes $F_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, p)$ différentes de zéro dans un domaine D à l'espace (x); concevons l'équation,

$$A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0, \tag{1}$$

où A_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ signifient des fonctions inconnues; nous appellerons tout système de fonctions holomorphes $[A_1(x), A_2(x), \dots, A_p(x)]$ pour un domaine (connexe ou non) δ contenu dans D satisfaisant à cette équation identiquement d'être une *solution* (*holomorphe*) de 1'équation pour δ; et nous appellerons toute équation de cette nature *équation fonctionnelle linéaire homogène*.

Considérons, concernant 1'équation (1), l'ensemble (I_1) de (A_1, δ) de façon que $(A_1, A_2, \dots, A_p)$ soit une solution pour δ; je dis que :

(I_1) *est un idéal.*

Car, si $(A_1, \delta) \in (I_1)$ et si $\alpha(x)$ est une fonction holomorphe pour un domaine (connexe ou non) δ', on a alors $\alpha A_1 \in (I_1)$ pour $\delta \cap \delta'$; si $(A_1, \delta) \in (I_1)$, $(A_1', \delta') \in (I_1)$, on a alors $A_1 + A_1' \in (I_1)$ pour $\delta \cap \delta'$.

Nous ne pouvons pas apercevoir immédiatement si (I_1) satisfait aux propriétés $(T_1), (T_2)$ ou non.

C'est pour cette espèce d'idéaux dont nous avons parlé à la fin du numéro précédant; et dont problème (J) est comme suivant :

Problème (K) *Etant donnés une équation fonctionnelle linéaire homogène dans un domaine D à l'espace (x), et un point P de D, trouver un*

HENRI CARTAN

Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes

Bulletin de la S. M. F., tome 78 (1950), p. 29-64.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1950__78__29_0>

59

IDÉAUX ET MODULES DE FONCTIONS ANALYTIQUES DE VARIABLES COMPLEXES;

PAR M. HENRI CARTAN.

Introduction. — Dans un Mémoire intitulé : *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, 61, 1944, p. 149-197; ce Mémoire sera désigné par les initiales I. F. A. tout le long du présent travail), j'ai tenté d'expliquer le rôle joué par les idéaux dans certaines questions de la théorie des fonctions analytiques de variables complexes; j'ai indiqué les principaux problèmes qui se posaient, et tâché de les résoudre. Je n'y suis parvenu que d'une façon incomplète, ayant dû laisser sans solution deux problèmes-clefs (« premier problème » et « deuxième problème », p. 187 de I. F. A.). Les mêmes questions ont été travaillées d'une manière indépendante au Japon par K. Oka, dont les beaux travaux antérieurs m'avaient d'ailleurs guidé dans mes recherches sur les idéaux. Sans avoir pu prendre connaissance de mon travail I. F. A., Oka a écrit en 1948 un Mémoire où il étudie les mêmes questions, quoique en des termes un peu différents. Dans ce Mémoire, qui paraît dans ce même volume du *Bulletin*, Oka résout le premier des deux problèmes-clefs dont je parlais plus haut, et obtient donc des résultats plus complets que ceux de mon Mémoire de 1944. Ayant eu le privilège de connaître en manuscrit le nouveau travail de Oka, j'ai été conduit à faire une nouvelle mise au point de l'ensemble de la théorie. D'une part je donne ici (ci-dessous, théorème 1) une solution simplifiée du « premier problème » (I. F. A., p. 187) résolu par Oka; d'autre part, grâce à la solution de ce premier problème, je résous aussi le « deuxième problème » [1] (ci-dessous, théorème 2), ce qui me permet d'aborder franchement l'étude *globale* des variétés analytiques (*voir* par exemple les théorèmes 7 *ter* et 8 *ter* ci-dessous).

1950トシテイナイ

La lecture du présent Mémoire, qui donne autant que possible des démonstrations complètes, devrait en principe se suffire à elle-même; j'y fais peu d'usage de mon Mémoire I. F. A., l'optique d'ensemble ayant changé. Les quelques résultats initiaux qui sont admis ici sans démonstration sont énoncés explicitement sous forme de *lemmes*, avec renvois précis à I. F. A. ou à d'autres Ouvrages.

Le but final de ce travail est l'étude globale des idéaux (et des modules) de fonctions analytiques dans les *domaines d'holomorphie*; il est atteint au para-

---

(1) *Note rajoutée à la correction des épreuves* : d'après des papiers communiqués récemment à l'auteur, il semble que K. Oka ait aussi obtenu, de son côté, une solution du deuxième problème.

解析的部分集合の
イデアル層の連接性
幾何学的イデアル層

H. Cartan

graphe VIII (n^{os} 27 à 33). Pour y parvenir, plusieurs étapes ont dû être franchies : tout d'abord, avant de pouvoir faire le passage du local au global, il faut approfondir les propriétés locales, c'est-à-dire voir comment les propriétés ponctuelles s'organisent localement; c'est l'objet du paragraphe III (les paragraphes I et II étant consacrés à l'exposition des notions de base) : dans ce paragraphe III on étudie la notion de *cohérence* locale, et l'on résout les deux problèmes-clefs dont il a déjà été question plusieurs fois. Il semble bien que toute cette partie de la théorie, dont le caractère est *local*, soit valable non seulement pour les fonctions analytiques de variables *complexes*, mais plus généralement pour les fonctions analytiques de variables prenant leurs valeurs dans un *corps valué complet* (qu'il faudrait toutefois supposer *algébriquement clos* pour le théorème 2).

C'est à partir du paragraphe IV que se fait le passage des propriétés locales aux propriétés globales. C'est aussi à partir de là qu'il est essentiel de se borner au corps des nombres complexes, car l'intégrale de Cauchy joue un rôle qui ne semble pas pouvoir être évité. On commence par l'étude globale des idéaux et modules dans certains ensembles compacts; ce n'est qu'au dernier paragraphe (§ VIII) que l'on effectue le passage des ensembles compacts à certains ensembles *ouverts* (en fait, les domaines d'holomorphie). Le cas des ensembles compacts nécessite lui-même le franchissement successif de plusieurs étapes : au paragraphe IV, il s'agit seulement des polycylindres compacts (et simplement connexes). Le cas plus général des « domaines polyédraux » (§ VII) s'y ramène ensuite, parce qu'on identifie un domaine polyédral à une variété analytique dans un polycylindre d'un espace à un plus grand nombre de dimensions, suivant une idée que l'on trouve déjà chez Oka en 1936-1937.

On a essayé de ramasser les résultats dans un petit nombre d'énoncés précis. Ces théorèmes sont puissants, mais ce ne sont que des théorèmes d'existence; ils en ont les inconvénients : ils ne fournissent pas de solution effective d'un problème particulier.

Qu'il me soit permis de profiter de cette occasion pour faire quelques rectifications ou mises au point de détail de mon Mémoire I. F. A. :

Page 157, lignes 8-9 : il n'est pas évident (ni même certain) que les modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ engendrés par $\mathfrak{M}$ forment un système cohérent sur E. C'est pourquoi les lignes 1 à 3 de la Note ([14]) du bas de la page 158 sont sujettes au doute, ainsi que l'affirmation (p. 158, lignes 10-12) qu'elles tendaient à justifier. Ceci infirme également la conclusion du « corollaire du théorème III », p. 183, qui repose sur la considération du « système cohérent engendré par $\mathfrak{M}$ ». En fait, il y a là un *problème ouvert :* est-il possible qu'un module, sur un polycylindre compact, ne puisse pas être engendré par un nombre *fini* d'éléments ?

Pages 160 et suivantes, les notions de « module pur » et de « module parfait » sont devenues sans objet, puisqu'on peut démontrer maintenant que tous les modules sont « purs » et « parfaits »; j'avais d'ailleurs émis cet espoir (p. 161, lignes 20-21).

Page 166, Note ([19]) de bas de page : la démonstration est insuffisante, à cause de la présence possible de composantes impropres.

Page 183, lignes 19 à 23 : l'affirmation est peut-être un peu sommaire. A ce sujet, *voir* ci-dessous, début du n° 21, et lemme 5 (n° 27)

Page 189, lignes 9-12, l'affirmation est correcte, mais sa justification est trop sommaire.

序文最後

H. Cartan Bull. Fr. (1950) 最後の頁

Une telle h_j est déterminée à l'addition près d'une fonction du module engendré par $\mathfrak{M}$ dans P_j (d'après le théorème 4 *bis*). On va profiter de cette circonstance pour remplacer les h_j par des g_j jouissant des mêmes propriétés, et satisfaisant en outre aux conditions : $|g_{j+1}-g_j| \leqq 2^{-j}$ dans P_j. Montrons ceci par récurrence sur j : g_j étant déjà choisie, la différence $h_{j+1}-g_j$ appartient au module engendré par $\mathfrak{M}$ dans P_j, donc est limite uniforme, dans P_j, de fonctions du module $\mathfrak{M}$ lui-même. Si a est une fonction de $\mathfrak{M}$, telle que $|h_{j+1}-h_j-a| \leqq 2^{-j}$ dans P_j, il suffira de prendre $g_{j+1}=h_{j+1}-a$.

Cela posé, la suite des g_j ainsi choisies converge, uniformément sur tout compact de D, vers une fonction g holomorphe dans D; grâce au lemme 6, g est congrue à f_x modulo $\mathfrak{M}_x$ en chaque point x de D; ce qui démontre le théorème.

(Manuscrit reçu le 15 septembre 1949). ✓

Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May, 1951.

Sur les Fonctions Analytiques de Plusieurs Variables, VIII—Lemme Fondamental

Kiyoshi OKA

Introduction. —Les problèmes principaux depuis le Mémoire I sont : problèmes de Cousin, problème de developpement et problème des convexités[1]. Dans les Memoires I—VI[2], nous avons vu, disant un mot, que ces problèmes sont résolubles affirmativement pour les domaines univalents finis[3]. Et l'auteur a encore constaté quoique sans l'exposer, que ces résultats restent subsister au moins. jusqu' aux domaines finis sans point critiques[4].

Il s'agit donc : ou bien d'introduire l'infini convenable, ou bien de permettre des points critiques ; or, on retrouvera que l'on ne sais presque

---

(1) Ces problèmes sont fondés sur H. Behnke et P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer Komplexer Veränderlichen, 1934. Nous allons les expliquer en formes précises. Soient $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_0$ deux domaines connexes ou non sur l'espace de n variables complexes tels que $\mathfrak{D}_0 \subseteqq \mathfrak{D}$ (c'est-à-dire que $\mathfrak{D}_0$ soit un «Teilbereich» de $\mathfrak{D}$); nous appellerons que $\mathfrak{D}_0$ est holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}$, si $\mathfrak{D}_0 \subseteqq H$, H' étant la «Regularitätshulle» de $\mathfrak{D}_0$, et encore si, pour tout domaine connexe ou non Δ_0 tel que $\Delta_0 \Subset \mathfrak{D}_0$ (c'est-à-dire que $\Delta_0 \subset \mathfrak{D}_0$ et $\Delta_0 \ll \mathfrak{D}_0$), on peut trouver un domaine connexe ou non Δ tel que $\Delta_0 \subset \Delta \Subset \mathfrak{D}_0$ de façon qu à tout point P de $\mathfrak{D}_0 - \Delta$, il corresponde une fonction f holomorphe dans $\mathfrak{D}$ telle que $|f(P_0)| > \max |f(\Delta_0)|$. Spécialement, si $\mathfrak{D}_0$ est ainsi par rapport à lui-même, nous l'appelons avec H. Behnke d'être holomorphe-convexe (regulär-konvex). Les problémes sont alors : Problèmes de Cousin. Trouver une fonction meromorphe (ou holomorphe) admettant les pôles (ou les zéros satisfaisant à une certaine condition) donnés dans un domaine holomorphe-convexe. Problème de développement. Soit $\mathfrak{D}_0$ un domaine (connexeou non) holomorphe-convexe par rapport à $\mathfrak{D}$; trouver, pour toute fonction holomorphe f_1, une série de fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$, convergente uniformément vers f dans tout domaine connexe ou non Δ_0 tel que $\Delta_0 \Subset \mathfrak{D}_0$. Porblème des convexités. Tout domaine psseudoconvexe est il holomorphe-convexe ? Pour les domaines univalents, on peut remplacer «holomorphe-convexe» par «domaine d'holomorphie», grâce au théorème de H. Cartan et P. Thullen.

(2) Les Mémoirs précédents sont : I—Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936 ; II—Domaines d'holomorphie, 1937 ; III—Deuxièmes problèmes de Cousin, 1939 (Journal of Science of the Hiroshima Univarsity) ; IV—Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, 1941 ; V—L'intégral de Cauchy, 1941 (Japanese Journal of Mathematics); Domaines pseudoconvexes, 1942 (Tohoku Mathematical Journal); VII—Sur quelques notions arithmetiques, 1950 (Bulletin de la Société Mathématique de France).

(3) Précisément dit, pour le deuxième problème de Cousin, nous avons montrer une condition nécessaire et suffisante pour les zéros ; et pour le problème des convexites, nous l'avons explique pour les deux variables complexes, pour dimenuer la répitation ultérieure inévitable.

(4) L'auteur l'a écrit aux détails en japonais à Prof. T. Takagi en 1943.

204

rien sur les domaines intérieurement ramifiés ; par exemple, qu'arrive-t-il pour le développement locale? Nous nous occuperons donc, d'abord au deuxième problème.

Or, l'idée fondamentale pour les recherches actuelles s'exprime symboliquement par le théorème II du Mémoire I. Nous venons de l'utiliser en forme du théorème I du Mémoire II[5], à cause que nous n'avons pas pu résoudre le problème (E). Mois, pour les domaines intérieurement ramifiés, la forme originale est indispensable ; c'est le lemme fondamental du titre et c'est pour l'établir, que nous avons préparé le Mémoire VIII.

Pour établir le lemme fondamental, les domaines (finis) sans points critiques, il est visiblement suffisant de résoudre les problèmes (C_2) et (E) et de trouver les pseudobases locales des idéaux géométriques de domaines indéterminés ; dont nous avons résolu les problèmes (C_2) et (E) dans le Mémoires VII, et plus récemment H. Cartan a résolu le dernier problème d'après le théorème 4 du Mémoire VII que le problème (K) est toujours résoluble[6]. Mais, quand on permet des points critiques, on rencontre la nouvelle difficulté que une fonction holomorphe sur une variété caractéristique n'est pas nécessairement la trace d'une fonction holomorphe à l'espace. Ce qui engendre, comme conséquence, une espèce des problèmes (J), qui contient le problème des idéaux géométriques dans un certain sens, et est plus étendu.

Dans le Mémoire actuel, nous résoudrons ce problème à partir encore du théorème 4 du Mémoire VII (théorèmé 2), établirons le lemme fon-

---

(5) H. Behnke et K. Stein ont souvent indiqué que ce théorème est applicable aux domaines multivalents sans point critique.

(6) Nous allons expliquer brièvement sur le cours des recherches des idéaux holomorphes. C'est W. Rückert qui a transplanté la noton " idéal " du champ de fonctions algebriques au champ de fonctions analytiques (1933, Math. Annalen, Vol 107, pp 259—281); et c'est H. Cartan qui a premièrement remarqué la différence essentielle, avec un résultat important (1940, cité dans le Mémoire VII). Cartan a encore exposé : Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, (3), LXI—); Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes (1950, Bulletin de la Société Mathématique de France).

Or l'auteur a exposé le Mémoire VII, sans connaitre l'existence du premier de ces deux Memoires de Cartan et du Memoire du Rückert ; nous allons donc examiner le Mémoire-là en comparant avec les Mémoires-ici : Le Mémoire VII consiste des deux parties, dont la première montre que les problèmes (C_1), (C_2) et (E) se réduissent au seul problème (K); ce qui est déjà indiqué par Cartan, sans démonstration, mais avec toutes les préparations. Dans la deuxième partie, l'auteur a d'abord préparé le théorème du réste pour résoudre le problème (K); ce théorème est déjà exposé et utilisé par Rückert.

$\mathfrak{D}$ et une variété caractéristique (ou analytique) $\sum$ dans $\mathfrak{D}$[7], considérons l'ensemble (I) des (f, δ) tels que $\delta \subseteq \mathfrak{D}$ et f soit identiquement nulle sur $\sum \cap \delta$; (I) forme évidement un idéal; nous l'appelons idéal géométrique de domaines indéterminés (attaché à $\sum$ et defini dans le domaine $\mathfrak{D}$).

Théorème de H. Cartan.—*Tout idéal géometrique de domaines indéterminés possède les pseudobases locales.*

Nous allons le reprouver d'après *le corollaire* 1. Soit (x^0) un point quelconque de $\sum$; il suffit de montrer que (I) ait une pseudobase en (x^0). D'après *Weierstrass*, nous savons que la partie de $\sum$ au voisinage de (x^0) consiste d'un nombre fini d'éléments. Sans appeler à la connaissance que ces éléments sont aussi des variétés caractéristiques, on peut definir pour chaque élément un idéal comme ci-dessus et convenir de l'appeler pour le moment par le même mot. (I) étant au voisinage de (x^0) l'intersection de ces idéaux, d'après *le corollaire de Cartan*, il suffit de dire que chacun d'eux ait une pseudobase en (x^0). Ceci est évident, quand $\sum$ est un point ou une surface.

Considérons donc, à nouveau à l'espace $(x_1, \ldots\ldots, x_n, y_1, \ldots\ldots, y_m)$ tel que $n>0$, $m>1$, un élément $\sum$ à n dimensions (toujours *complexes* dans ce Mémoire) d'une variété caractéristique, au voisinage d'un point (x^0, y^0) de $\sum$, et l'idéal géométrique (I) correspondant; nous allons montrer que (I) ait une pseudobase en (x^0, y^0). Grace à *Weierstrass*, on peut choisir les coordonnées (x, y), tracer un polycylindre $[(\gamma), (\gamma')]$ de la forme, (γ): $|x_i - x_i^0| < r$ $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$, (γ'): $|y_j - y_j^0| < \rho$ $(j=1, 2, \ldots\ldots, m)$, et definir $\sum$ et (I) dans $[(\gamma), (\gamma')]$ de façon que la projection[8] de $\sum$ sur l'espace (y) soit (γ'), et que (I) ait pour $[(\gamma), (\gamma')]$ les fonctions holomorphes comme suivantes:

$$F_i(x, y_i),\ \Psi_j(x, y_1, y_j) = y_j \frac{\partial F_1(x, y_1)}{\partial y_1} - \Phi_j(x, y_1) \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \ldots, m \\ j=\ \ 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

où $F_i(x, y_i)$ est un polynome de y_i tel que le coefficient de la plus haute puissance soit 1, $\Phi_j(x, y_1)$ est un polynome de y_1, et spécialement $F_1(x, y_1)$ jouit de la propriété que la projection de $\sum$ sur l'espace (x, y_1) coïncide à $F_1(x, y_1)=0$, et que l'intersection de $\sum$ et $\dfrac{\partial F_1(x, y_1)}{\partial y_1}=0$, si elle existe,

(7) Une variété caractéristique est un ensemble de points qui s'exprime localement par l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de fonctions holomorphes.

(8) La projection de l'ensemble des points (x', y') sur l'espace (x) est l'ensemble des points (x').

65

一松 (1960)

$$a^j-u^j=f'^{\,l-1}\sum_{k=1}^{p-1}q^k g_k{}^j.\quad \text{ゆえに}\quad a^j=\sum_{l=1}^{r}b^l h_l{}^j+\sum_{k=1}^{p-1}f'^{\,l-1}q^k g_k{}^j \tag{9·17}$$

をうる．これは $(g_k{}^j)$, $(h_l{}^j)$ が $\mathfrak{R}$ の局所生成元であることを意味する．(終)

系　$\mathfrak{O}$–加群の連接層 $\mathfrak{F}$ の有限個の切断 $u_1, \cdots, u_p \in \Gamma(X, \mathfrak{F})$ から作られる 1 次関係の層 $\mathfrak{R}$ はそれ自身また連接層である．($\mathfrak{O}^p$ が連接層，$\mathfrak{R}$ が局所有限だから，補題 9·8 による．)

定理 9·12 は極めて重要な結果で，後の章でも利用される．局所理論への一つの応用として，つぎの結果をのべておく．

整級数環 $\mathfrak{O}_x$ のイデアル $\mathfrak{I}_x$ と $g \in \mathfrak{O}_x$ に対し，$gf \in \mathfrak{I}_x$ をみたす任意の $f \in \mathfrak{O}_x$ は，$f \in \mathfrak{I}_x$ に限るとき，$\mathfrak{I}_x$ を g について素とよぶ．たとえば，$\mathfrak{I}_x$ が素イデアルであって，$g \notin \mathfrak{I}_x$ ならば，$\mathfrak{I}_x$ は g について素である．

定理 9·13　$\mathfrak{O}$ の局所有限な $\mathfrak{O}$–加群の部分層 $\mathfrak{I}$ (すなわち，イデアルの連接層) があるとき，点 x の近傍で正則な g に対して，もし点 x での芽 ${}_xg$ について $\mathfrak{I}_x$ が素ならば，x の小近傍 U の各点 y において，$\mathfrak{I}_y$ は芽 ${}_yg$ について素である．

証明　$\mathfrak{I}$ の x における局所生成元 $u_1, \cdots, u_m$ と g との 1 次関係の層 $\mathfrak{R}$ は，定理 9·12 系により連接層であり，x の近傍 U_1 での $\mathfrak{R}$ の局所生成元 $(a_l{}^k, b_l)$ $(l=1, \cdots, r)$ がある．定義から $\sum_{k=1}^{m} a_l{}^k u_k + b_l g = 0$. x での芽をとれば $b_l g \in \mathfrak{I}_x$ だから，仮定により $b_l \in \mathfrak{I}_x$，ゆえに x の近傍 $U\,(\subset U_1)$ において $b_l=\sum_{k=1}^{m} c_l{}^k u_k$ と表わされる．U の各点 y において $fg \in \mathfrak{I}_y$ ならば，$\sum_{k=1}^{m} a^k u_k + fg = 0$, $a^k \in \mathfrak{O}_y$ だから，(a^k, f) は $\mathfrak{R}$ の局所生成元で表示され，

$$f=\sum_{l=1}^{r}\alpha^l b_l=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{r}c_l{}^k\alpha^l\right)u_k \in \mathfrak{I}_y. \quad \text{(終)}$$

注意 3.　この定理は，本書では省略したが，つぎの零点定理を証明するときに補助定理として必要である：$f_1, \cdots, f_m$ が点 x の近傍 U で正則ならば，正の整数 l が定まり，U 内の $f_1=\cdots=f_m=0$ である点で必ず 0 となる U での任意の正則函数 g に対して，g の l 乗 g^l の x での芽は，$f_1, \cdots, f_m$ から生成される $\mathfrak{O}_x$ 内のイデアルに含まれる†.—— 前にも注意したように $\mathfrak{I}_x$ が素イデアルでも，x の近傍の各点 y において $\mathfrak{I}_y$ が素イデアルになるとは限らない．だからこそ定理 9·13 の価値があるのである．

注意 4.　多変数函数論において重要な連接層はこのほかにもいくつかある：

1°　クザンの分布から作られるもの (次章において論ずる).

2°　解析的集合のイデアルのなす層 (カルタン・岡)††.

3°　一般に可約な解析的集合上の正則函数の芽のなす層 (岡)‡.

2°, 3° とも本質的な部分は岡潔氏に負うもので，その証明も興味深いが，長くなるし，以下の理論との関連がうすいので，結果をあげるのにとどめておく．

---

† たとえば参考書 [B2] XIV 編．

†† 参考書 [B3] XVI 編，主解析的集合のときは問 3 にのべたように容易にできる．一般の場合には局所表示の定理を利用する．

‡ 岡潔，論文 [D18 VIII] なお参考書 [B4] IX—X 編をも参照．

INTRODUCTION TO HOLOMORPHIC FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

Volume III: II:
Homological Theory

Robert C. Gunning

(1990)

WADSWORTH & BROOKS/COLE
MATHEMATICS
SERIES

67

Vol. II

Let $h_1, \ldots, h_\lambda \in {}_n\mathcal{O}_{U_A}$ be generators for this family of ideals. The hypothesis that $\mathfrak{A}_Z = \text{id } \mathbf{V}_Z$ whenever $Z \in V - W$ implies that $\mathfrak{B}_Z = {}_n\mathcal{O}_Z$ whenever $z \in U_A \cap (V - W)$, so the common zeros of the generators $h_1, \ldots, h_\lambda$ must lie in $W \cap U_A$. The function d vanishes on W, so it follows from Hilbert's zero-theorem that $\mathbf{d}_A^r \in \mathfrak{B}_A$ for some integer $r > 0$; but that means that $\mathbf{d}_A^r \mathbf{f}_A \in \mathfrak{A}_A$, and since $\mathfrak{A}_A : {}_n\mathcal{O}_A \mathbf{d}_A = \mathfrak{A}_A$ necessarily $\mathbf{f}_A \in \mathfrak{A}_A$. Therefore $\mathfrak{A}_A = \text{id } \mathbf{V}_A$ at all points $A \in V \cap \Delta(0; R)$, and since that is also true trivially whenever $A \in \Delta(0; R) - V \cap \Delta(0; R)$, the proof is thereby completed.

6. THEOREM (Cartan's theorem). *If V is a holomorphic subvariety of an open subset $U \subseteq \mathbb{C}^n$, then the family of ideals $\{\text{id } \mathbf{V}_A\}$ in $\{{}_n\mathcal{O}_A\}$ is finitely generated over an open neighborhood of each point of U.*

Proof. Fix a point of V, which to simplify notation can be assumed to be the origin $O \in \mathbb{C}^n$, and suppose at first that the germ $\mathbf{V}_O$ of V at the origin is irreducible. After a nonsingular linear change of coordinates in $\mathbb{C}^n$, it can be assumed that the ideal $\text{id } \mathbf{V}_O \subseteq {}_n\mathcal{O}_O$ is strictly regular in the variables $z_{k+1}, \ldots, z_n$. Let $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\nu \in {}_n\mathcal{O}_O$ be generators of the ideal $\text{id } \mathbf{V}_O$, including among others the auxiliary polynomials $\mathbf{p}_j \in \text{id } \mathbf{V}_O \cap {}_k\mathcal{O}[z_j]$ for $k + 1 \leqq j \leqq n$ and $\mathbf{q}_j \in \text{id } \mathbf{V}_O \cap {}_k\mathcal{O}[z_{k+1}, z_j]$ for $k + 2 \leqq j \leqq n$, and choose an open neighborhood U of the origin such that these germs can be represented by holomorphic functions $f_1, \ldots, f_\nu \in {}_n\mathcal{O}_U$. Now as observed after the proof of the local parametrization theorem, the subvariety V is actually a complex submanifold outside a proper holomorphic subvariety $W \subset V$, and the functions $p_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n$ can be taken as part of a local system of coordinates in $\mathbb{C}^n$ near any point of $V - W$ exhibiting V as such a submanifold. Thus these functions, and therefore the functions $f_1, \ldots, f_\nu$ as well, generate $\text{id } \mathbf{V}_A \subseteq {}_n\mathcal{O}_A$ at each point $A \in V - W$. It then follows immediately from Lemma 5 that the functions $f_1, \ldots, f_\nu$ generate $\text{id } \mathbf{V}_A \subseteq {}_n\mathcal{O}_A$ at all points A in some open polydisc $\Delta(0; R) \subseteq U$ and hence that the family of ideals $\{\text{id } \mathbf{V}_A\}$ is finitely generated over $\Delta(0; R)$. If the germ $\mathbf{V}_O$ is reducible, then in some open neighborhood U of the origin write $V \cap U = \bigcup V_i$ where V_i are holomorphic subvarieties of U and their germs at the origin are the irreducible components of $\mathbf{V}_O$. It follows from the first part of the proof that for each index i the family of ideals $\{\text{id } \mathbf{V}_{iA}\}$ is finitely generated over some open polydisc $\Delta(0; R) \subseteq U$. But $\text{id } \mathbf{V}_A = \bigcap_i \text{id } \mathbf{V}_{iA}$, so by Corollary 3 the family of ideals $\{\text{id } \mathbf{V}_A\}$ is also finitely generated over $\Delta(0; R)$ after shrinking R if necessary. That suffices to conclude the proof.

It is perhaps worth pointing out explicitly here that the lemma used in the proof of Cartan's theorem is in turn a simple consequence of the following corollary of that theorem.

7. COROLLARY. *If $f_1, \ldots, f_\nu$ are holomorphic functions in an open set $U \subseteq \mathbb{C}^n$ defining a holomorphic subvariety $V \subseteq U$ and a finitely generated family of ideals $\{\mathfrak{A}_A\}$ over U and if $\mathfrak{A}_A = \text{id } \mathbf{V}_A$ at some point $A \in V$, then $\mathfrak{A}_Z = \text{id } \mathbf{V}_Z$ at all points $Z \in U - W$ where $W \subset V$ is a proper holomorphic subvariety of V.*

Proof. Since $\mathfrak{A}_Z \subseteq \text{id } \mathbf{V}_Z$ at every point $Z \in U$, the condition that $\mathfrak{A}_Z = \text{id } \mathbf{V}_Z$ is just that $\mathfrak{B}_Z = \mathfrak{A}_Z : \text{id } \mathbf{V}_Z = {}_n\mathcal{O}_Z$. Now by Cartan's theorem the family of ideals $\{\mathfrak{B}_Z\}$ is

$$\mathscr{S}_A = \left\{ (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\mu) \in {}_V\mathcal{O}_A^\mu : \sum_j \mathbf{f}_j \boldsymbol{\phi}_{jkA} = 0 \text{ for } 1 \leqq k \leqq \nu \right\}$$

In terms of the ν-tuples of holomorphic functions $\phi_j = (\phi_{j1}, \ldots, \phi_{j\nu})$, the submodule $\mathscr{S}_A \subseteq {}_V\mathcal{O}_A^\mu$ is just the module of relations $\mathscr{S}_A = \mathscr{R}(\Phi_{1A}, \ldots, \Phi_{\mu A})$ between the germs of these ν-tuples at the point A as introduced in section II-F. It then follows immediately from Corollary II-F9 that the sheaf $\mathscr{S}$ is locally finitely generated as desired, thereby concluding the proof.

6. THEOREM (Cartan's theorem). *If W is a holomorphic subvariety of a holomorphic variety V, then the sheaf $\mathscr{I}(W)$ of ideals of the subvariety W is a locally finitely generated sheaf of ideals in ${}_V\mathcal{O}$.*

図が出て来ない。

Proof. This is merely a restatement of Corollary II-F11, so nothing more needs to be added to complete the proof.

7. COROLLARY. *If $\mathscr{R}$ and $\mathscr{S}$ are locally finitely generated sheaves of ideals over a holomorphic variety, then the naturally defined sheaves of ideals $\mathscr{R} + \mathscr{S}$, $\mathscr{R} \cdot \mathscr{S}$, $\mathscr{R} \cap \mathscr{S}$, and $\mathscr{R} : \mathscr{S}$ are also locally finitely generated sheaves of ideals.*

Proof. This is merely a restatement of Corollary II-F10, so again nothing more needs to be added to complete the proof.

The following extension of a part of the preceding corollary will prove useful in the subsequent discussion, and a comparison of its proof with the proofs given in section II-F illustrates the notational convenience that the systematic use of sheaves provides.

8. LEMMA. *If $\mathscr{R}$ and $\mathscr{S}$ are locally finitely generated subsheaves of a free sheaf ${}_V\mathcal{O}^\nu$ over a holomorphic variety V, then the intersection $\mathscr{R} \cap \mathscr{S}$ is also locally finitely generated.*

Proof. Since $\mathscr{R}$ and $\mathscr{S}$ are locally finitely generated, over an open neighborhood V_A of any point $A \in V$ there are surjective homomorphisms of holomorphic sheaves of the form $\rho\colon {}_V\mathcal{O}^\alpha \to \mathscr{R}$, $\sigma\colon {}_V\mathcal{O}^\beta \to \mathscr{S}$. Introduce the sheaf homomorphism $\phi\colon {}_V\mathcal{O}^\alpha \oplus {}_V\mathcal{O}^\beta \to {}_V\mathcal{O}^\nu$ that associates to any elements $\mathbf{F} \in {}_V\mathcal{O}_Z^\alpha$, $\mathbf{G} \in {}_V\mathcal{O}_Z^\beta$ over a point $Z \in V$ the element $\phi(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = \rho(\mathbf{F}) - \sigma(\mathbf{G}) \in {}_V\mathcal{O}_Z$. It follows from Oka's theorem, Theorem 5, that the kernel of this homomorphism is locally finitely generated; so after shrinking the neighborhood V_A if necessary there will exist a sheaf homomorphism $\psi\colon {}_V\mathcal{O}^\gamma \to {}_V\mathcal{O}^\alpha \oplus {}_V\mathcal{O}^\beta$ such that the image of ψ is precisely the kernel of ϕ. Now whenever $\mathbf{H} \in {}_V\mathcal{O}_Z^\gamma$ for some point $Z \in V_A$, then $\psi(\mathbf{H}) = (\mathbf{F}, \mathbf{G})$ is in the kernel of ϕ, so that $\rho(\mathbf{F}) - \sigma(\mathbf{G}) = 0$; hence, $\rho(\mathbf{F}) = \sigma(\mathbf{G}) \in \mathscr{R}_Z \cap \mathscr{S}_Z$. On the other hand, any element in $\mathscr{R}_Z \cap \mathscr{S}_Z$ for some point $Z \in V_A$ can be written as $\rho(\mathbf{F})$ for some $\mathbf{F} \in {}_V\mathcal{O}_Z^\alpha$ and also as $\sigma(\mathbf{G})$ for some $G \in {}_V\mathcal{O}_Z^\beta$. Then $\phi(\mathbf{F}, \mathbf{G}) = \rho(\mathbf{F}) - \sigma(\mathbf{G}) = 0$, so there must exist some element $\mathbf{H} \in {}_V\mathcal{O}_Z^\gamma$ for which $\psi(\mathbf{H}) = (\mathbf{F}, \mathbf{G})$. Thus over V_A the intersection $\mathscr{R} \cap \mathscr{S}$ is precisely the image of the sheaf homomorphism $\theta\colon {}_V\mathcal{O}^\gamma \to {}_V\mathcal{O}^\nu$ that associates to any $\mathbf{H} \in {}_V\mathcal{O}_Z^\gamma$ over a point $Z \in V_A$ the element $\rho(\mathbf{F})$ where $\psi(\mathbf{H}) = (\mathbf{F}, \mathbf{G})$. But that means that $\mathscr{R} \cap \mathscr{S}$ is finitely generated over V_A and thereby concludes the proof.

The locally finitely generated holomorphic sheaves are still too general a class of sheaves for many purposes in complex analysis; this class contains some rather

Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 265

A Series of Comprehensive Studies in Mathematics

H. Grauert R. Remmert

Coherent Analytic Sheaves

Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork Tokyo

(1984)

G.-R. CAS

Introduction

> ... Je mehr ich über die Principien der Functionentheorie nachdenke – und ich thue dies unablässig –, um so fester wird meine Überzeugung, dass diese auf dem Fundamente algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden muss (WEIERSTRASS, Glaubensbekenntnis 1875, Math. Werke II, p. 235).

1. Sheaf Theory is a general tool for handling questions which involve *local* solutions and *global* patching. "La notion de faisceau s'introduit parce qu'il s'agit de passer de données 'locales' à l'étude de propriétés 'globales'" [CAR], p. 622. The methods of sheaf theory are algebraic. The notion of a sheaf was first introduced in 1946 by J. LERAY in a short note *L'anneau d'homologie d'une représentation*, C.R. Acad. Sci. 222, 1366–68. Of course sheaves had occurred implicitly much earlier in mathematics. The "Monogene analytische Functionen", which K. WEIERSTRASS glued together from "Functionselemente durch analytische Fortsetzung", are simply the connected components of the sheaf of germs of holomorphic functions on a RIEMANN surface*); and the "idéaux de domaines indéterminés", basic in the work of K. OKA since 1948 (cf. [OKA], p. 84, 107), are just sheaves of ideals of germs of holomorphic functions.

Highly original contributions to mathematics are usually not appreciated at first. Fortunately H. CARTAN immediately realized the great importance of LERAY's new abstract concept of a sheaf. In the polycopied notes of his Séminaire at the E.N.S. 1950–51, one can already find an excellent presentation both of the theory of sheaves and of cohomology with coefficients in a sheaf (see Exp. XIV–XX). Shortly after, at the "Colloques sur les Fonctions de Plusieurs Variables" in Brussels 1953, CARTAN and SERRE presented to a dumb-founded audience their "function theory based on sheaves" which culminated in the ever since so-called Theorems A and B for STEIN manifolds. By 1954, sheaves were already in common use. For example, SERRE uncompromisingly begins his celebrated paper "Faisceaux Algébriques Cohérents" with the sentence "On sait que les méthodes cohomologiques, et particulièrement la théorie des faisceaux, jouent un rôle croissant, non seulement en théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, mais aussi en géométrie algébrique classique".

2. Of greatest importance in Complex Analysis is the concept of a *coherent* analytic sheaf. Already in 1944 CARTAN had experimented with the notion of a coherent system of punctual modules. He posed the fundamental problem, whether for any finite system of holomorphic functions the derived module system of punctual relations is coherent ([CAR], p. 572 and 603).

---

*) WEIERSTRASS described his notion rather vaguely already in 1842 (cf. Math. Werke 1, p. 83–84) and developed it clearly in his lectures at Berlin (cf. also Math. Werke 2, p. 209–210).

G.-R. CAS

This is exactly the problem, whether the sheaf $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ of germs of holomorphic functions on complex n-space is coherent. In 1948 OKA gave an affirmative answer ([OKA], p. 106); in 1950 CARTAN simplified OKA's proof ([CAR], p. 626), introducing the terminology "faisceau cohérent".

The notion of coherence makes it possible to pass from *point*-properties to *local* properties. "Il faut approfondir les propriétés locales, c'est-à-dire voir comment les propriétés ponctuelles s'organisent localement" ([CAR], p. 619). A typical example is as follows:

Let $\mathscr{S}' \xrightarrow{\varphi} \mathscr{S} \xrightarrow{\psi} \mathscr{S}''$ *be a sequence of coherent sheaves on a space X. If, for a certain point* $x \in X$, *the sequence* $\mathscr{S}'_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathscr{S}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathscr{S}''_x$ *is exact, then the same holds for all points sufficiently near to x.*

Coherence is, in a vague sense, a *local principle of analytic continuation.* "En gros, on peut dire que, pour un A-faisceau $\mathscr{F}$ cohérent en un point a de A, la connaissance du module $\mathscr{F}_a$ détermine les modules $\mathscr{F}_x$ attachés aux points x suffisamment voisins de a" ([CAR], p. 626). It is a difficulty of the theory that, at first glance, there are no convincing examples. The only coherent sheaves one can produce immediately are the zero sheaf and, in the case where the space X is a single point, all finite dimensional vector spaces on X. The first non trivial example is given by OKA's Theorem which guarantees that the structure sheaf $\mathcal{O}_X$ of every complex space X is coherent.

In the late fifties and early sixties coherent sheaves were sometimes hailed as a panacea for the problems of complex analysis. Neither the creators nor the authors of this book ever shared such wishful thinking. However we do believe that the theory of *Coherent Analytic Sheaves* is not merely "a monument more durable than bronze": sheaves are very much alive, indeed they will outlive us all.

3. There are four fundamental Coherence Theorems in Complex Analysis

1o - coherence of the structure sheaf $\mathcal{O}_X$ of any complex space X

2o - coherence of the ideal sheaf $\mathscr{i}(A)$ of any analytic set A

3o - coherence of the normalization sheaf $\hat{\mathcal{O}}_X$ of any reduced structure sheaf $\mathcal{O}_X$

4o - coherence of all direct image sheaves of any coherent analytic sheaf under any *proper* holomorphic map (Direct Image Theorem).

We give proofs for all of these theorems. Let us describe briefly how we proceed. We start, in Chapter 2, with Local WEIERSTRASS Theory. From the very beginning we use the geometric language of finite holomorphic maps, which is the canonical generalization of RIEMANN's visualization of his surfaces as analytic coverings of $\mathbb{C}$. The WEIERSTRASS Isomorphism Theorem 2.4.2*), together with standard techniques from the Calculus of Coherent Sheaves, leads to a simple proof of coherence of the sheaves $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$; from this

*) Cross references in this book follow the usual convention: 2.4.2 refers to Paragraph 2 of Section 4 in Chapter 2. For cross references within a chapter resp. a section the chapter number resp. the section number is not repeated.

72

Serreの定理.

領域 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 上に3つの層 $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$ があり、次の層準同型が完全であるとする。

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{S} \to \mathcal{T} \to 0.$$

このとき、$\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$ の中の二つが連接層ならば、他の残りも連接層である。

使い方：複素空間 X をとる。局所的には、解析的部分集合 $X \subset \Omega(\subset \mathbf{C}^N)$ である。$\mathcal{I}_X \subset \mathcal{O}_\Omega$ をイデアル層（幾何学的イデアル層）とすると、$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_\Omega / \mathcal{O}_X$ であり、完全列がある：

$$0 \to \mathcal{I}_X \to \mathcal{O}_\Omega \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

$\mathcal{I}_X$ と $\mathcal{O}_\Omega$ の連接性より、$\mathcal{O}_X$ の連接性が従う。

G.-R. CAS

§ 2. Coherence of the Sheaves $\mathscr{i}(A)$

This section is devoted to the proof of the following

Fundamental Theorem: *For any analytic set A in a complex space X the sheaf of ideals $\mathscr{i}(A)$ is a coherent $\mathcal{O}_X$-sheaf.*

This coherence theorem is as basic as the coherence theorem for the structure sheaf. The theorem was probably known to OKA in 1948 (cf. the last lines of his 7th paper, [OKA], p. 106), the first proof was published in 1950 by CARTAN (cf. [CAR], p. 631). In 1951, in his 8th paper, OKA published his proof of what he then called "théorème de H. Cartan". For further details the reader may consult CARTAN's comments on OKA's papers VII and VIII in [OKA], p. 106–108 and p. 132–134.

We shall give here a simple proof of the Fundamental Theorem which we will also call the OKA-CARTAN Theorem. Ingredients of the proof are the RÜCKERT Nullstellensatz and the Local Description Lemma (thus the Finite Mapping Theorem and HENSEL's Lemma are involved).

1. Proof of Coherence in a Special Case. We first discuss the simplest situation. Let $z_1, \ldots, z_d$ resp. $w_1, \ldots, w_k$ denote complex linear coordinates in $\mathbb{C}^d$ resp. $\mathbb{C}^k$.

Proposition: *Let $c_1, \ldots, c_k$ be holomorphic functions in an open set L in $\mathbb{C}^d$. Then the set $A := N(w_1 - c_1(z), \ldots, w_k - c_k(z))$ is analytic in $L \times \mathbb{C}^k$ and its ideal sheaf $\mathscr{i}(A)$ is generated over $L \times \mathbb{C}^k$ by the functions $w_1 - c_1(z), \ldots, w_k - c_k(z)$. In particular, the sheaf $\mathscr{i}(A)$ is $\mathcal{O}_{L \times \mathbb{C}^k}$-coherent.*

Proof: Fix $a \in A$. We may assume that a is the origin $0 \in \mathbb{C}^n$. Setting $\hat{w}_1 := w_1 - c_1, \ldots, \hat{w}_k := w_k - c_k$, we see that $z_1, \ldots, z_d, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_k$ are complex coordinates around 0. In these coordinates A is given in a neighborhood of 0 by the equations $\hat{w}_1 = 0, \ldots, \hat{w}_k = 0$.

Let $f_0 \in \mathcal{O}_0$ be any germ and let

$$f(z_1, \ldots, z_d, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_k) = \sum a_{\mu_1 \ldots \mu_d \nu_1 \ldots \nu_k} z_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot z_d^{\mu_d} \hat{w}_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \hat{w}_k^{\nu_k}$$

be its TAYLOR series expansion around $0 \in \mathbb{C}^n$. If $f_0 \in \mathscr{i}(A)_0$ we have $f(z_1, \ldots, z_d, 0, \ldots, 0) = 0$, i.e. $a_{\mu_1 \ldots \mu_d 0 \ldots 0} = 0$ for all $\mu_1, \ldots, \mu_d$. This means that $f = h_1 \hat{w}_1 + \ldots + h_k \hat{w}_k$ with functions $h_1, \ldots, h_k$ holomorphic in a neighborhood of $0 \in \mathbb{C}^n$. We conclude

$$f_0 \in \mathscr{i}(A)_0 \Rightarrow f = h_1 \cdot (w_1 - c_1) + \ldots + h_k \cdot (w_k - c_k) \quad \text{near } 0.$$

Therefore, $w_1 - c_1, \ldots, w_k - c_k$ generate $\mathscr{i}(A)_0$.

2. Reduction to Analytic Sets in Domains of $\mathbb{C}^n$. Returning to the general situation, we now show that it is enough to consider the case where X is a

73

西野本

参考文献

[1] R.Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues*, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[2] H.Behnke und K.Stein, Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphieconvexität, *Math. Annalen*, **116**, 1939.

[3] L.Bieberbach, Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schilichte volumtreue Abbildung der R_4 auf einen Teil seiner selbst vermitteln, *S. B. preuss. Akad. Wiss.*, 1933.

[4] E.Bishop, Mapping of partially analytic spaces, *Amer. J. Math.*, **83**, 1961.

[5] A.B.Brown, On certain analytic continuations and analytic homeomorphisms, *Duke Math. J.*, **2**, 1936.

[6] E. Calabi and M. Rosenlicht, Complex analytic manifolds without countable base, *Ann. of Math.*, **58**, 1953.

[7] E. Cartan, Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes, *Ann. Mat. pura. appl.*, **4**, No. 1, 1932.

[8] H. Cartan, Sur les fonctions de deux variables complexes, *Bull. Sci. Math.*, **54**, 1930.

[9] H.Cartan, Sur les fonctions de deux variables complexes : les transformations d'un domaine borné D en un domaine intérieur à D, *Bull. Soc. Math. France*, **58**, 1930.

[10] H.Cartan, Sur les domaines d'existence des fonctions de plusiers variables complexes, *Bull. Soc. Math. France*, **59**, 1931.

[11] H.Cartan, Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **199**, 1934.

[12] H.Cartan, Note sur le premier problème de Cousin, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **207**, 1938.

[13] H.Cartan, Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, *J. Math. pur. et app.*, **19**, 1940.

[14] H.Cartan und P.Thullen, Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen : Regularitäts- und Konvergenz-bereiche, *Math. Annalen*, **106**, 1932.

[15] L.Chow, On compact analytic varieties, *Amer. J. Math.*, **71**, 1949.

[16] P.Cousin, Sur les fonctions de n variables complexes, *Acta Math.*, **19**, 1895.

[17] E.Fabry, Sur les rayons de convergente d'une série double, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **134**, 1902.

[18] M.Fékete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Math. Z.*, **17**, 1923.

[19] R.Fujita, Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe, *J. Math. Soc. Japan*, **15**, 1963.

西野本

75

西野本

で (Ω) を満たすものを δ における (Ω) の解という．容易にわかるように，D の任意の開集合 δ と，δ における (Ω) の任意の解 $f(z)$ との組 $(f(z),\delta)$ の全体は D における ν 次の $\mathcal{O}$-モジュールを作る．これを**1次関係 (Ω) による $\mathcal{O}$-モジュール**といい，$\mathcal{L}\{\Omega\}$ と表す．

この概念のもとに次の定理が得られる．

岡の連接定理

定理 7.1 (岡)　$\mathbf{C}^n$ の領域 D における任意の1次関係 (Ω) による $\mathcal{O}$-モジュール $\mathcal{L}\{\Omega\}$ は，D の各点において局所有限生成である．

この定理は $\mathcal{O}$-モジュールの理論における主定理であり，岡によって証明された．以下に述べる証明は H.Cartan によって整理されたものである．

7.3.3　二つの補助定理

記述を簡単にするため，$n+1$ 個の複素変数 $z_1,\ldots,z_n$ と w の空間 $\mathbf{C}^{n+1}$ で考えることとし，D を複素変数 $z_1,\ldots,z_n$ の空間 $\mathbf{C}^n$ のある領域，l をある正の整数として，D における l 個の正則函数 $a_j(z)$ $(j=1,\ldots,l)$ を係数とする，最高次係数1の w の擬多項式

$$P((z),w)=w^l+a_1(z)w^{l-1}+\cdots+a_l(z)$$

を考える．そして r を正の数とし，w の平面 $\mathbf{C}$ における閉円板 $\Gamma:|w|\leq r$ を，D の任意の点 (z') にたいし，$P((z'),w)=0$ となる点 w はすべて Γ の完全内部に含まれるように描き，$\Lambda=D\times\Gamma$ とおく．

このとき次の二つの定理が得られる．

定理 7.2 (剰余の定理)　$f((z),w)$ を Λ における任意の正則函数とするとき，同じ Λ で正則な函数 $q((z),w)$ および D における正則函数 $c_k(z)$ $(k=0,1,\ldots,l-1)$ を係数とする w の $l-1$ 次の擬多項式

$$r((z),w)=c_0(z)w^{l-1}+\cdots+c_{l-1}(z)$$

を，恒等式

$$f((z),w)\equiv q((z),w)\cdot P((z),w)+r((z),w)$$

が成り立つように求めることができる．このとき $q((z),w)$ と $c_k(z)$ は $f((z),w)$ によって一意的に定まり，$f((z),w)$ が Λ で不等式 $|f((z),w)|\leq M$ を満たしているなら，Λ および D でそれぞれ不等式

$$|q((z),w)|\leq KM,\qquad |c_k(z)|\leq KM\quad(k=0,1,\ldots,l-1)$$

を満たす．ただし K は $f((z),w)$ にはよらない定数である．

西野本い

7.5　局所有限性定理

7.5.1　ℓ-イデアル

D を n 個の複素変数 $z_1, \ldots, z_n$ の空間 $\mathbf{C}^n$ におけるある領域とし，ν と λ をある正の整数として，D における ν 個の λ 次の正則ベクトル函数

$$F_j(z) = (F_{1,j}(z), \ldots, F_{\lambda,j}(z)) \qquad (j = 1, \ldots, \nu)$$

を考え，さらに $f_j(z)$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ を未知函数として連立1次方程式

$$(\Omega) \qquad f_1(z) \cdot F_1(z) + \cdots + f_\nu(z) \cdot F_\nu(z) = 0$$

を考える．そして δ を D に含まれる任意の開集合とし，$f_1(z)$ を δ における (Ω) の解 $(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_\nu(z))$ の第1成分となるような函数として，そのような $f_1(z)$ と δ の組 $(f_1(z), \delta)$ の全体を $\mathcal{I}$ とすると，$\mathcal{I}$ は D における $\mathcal{O}$-イデアルとなる．これを1次関係 $\{\Omega\}$ による **ℓ-イデアル**といい，$\ell\{\Omega\}$ と表す．

ℓ-イデアルについて次の定理が得られる．

定理 7.7　D における任意の1次関係 (Ω) による ℓ-イデアル $\ell\{\Omega\}$ は D の各点で局所有限生成である．

この定理は定理 7.1 の系である．この節ではこの定理を使って，いくつかの重要な $\mathcal{O}$-イデアルの局所有限性定理を証明しよう．

7.5.2　G-イデアル

D を $\mathbf{C}^n$ におけるある領域とし，$\mathcal{I}$ を D における任意の $\mathcal{O}$-イデアルとするとき，D の点 p で $\mathcal{I}$ に属する函数がすべて p で零になるなら，p を $\mathcal{I}$ の零点といい，$\mathcal{I}$ の零点全体を $\mathcal{I}$ の零点集合という．D の点 q が $\mathcal{I}$ の零点でないなら，q における任意の正則函数が q で $\mathcal{I}$ に属する．

D における任意の $\mathcal{O}$-イデアル $\mathcal{I}$ の零点集合 E は常に D における閉集合であり，さらに $\mathcal{I}$ が D の各点で局所有限生成なら E は D における解析集合である．

逆に E を D における任意の点集合とし，δ を D における任意の開集合，$f(z)$ を $E \cap \delta$ で零となる δ で正則な函数として，そのような $f(z)$ と δ の組 $(f(z), \delta)$ の全体を $\mathcal{I}$ とすると，$\mathcal{I}$ は D における $\mathcal{O}$-イデアルになる．これを E に関する **G-イデアル**といい，$G\{E\}$ と表す．

G-イデアルについて次の定理が得られる．

77

西野本

定理 7.8　領域 D における任意の解析集合 Σ に関する G-イデアル $G\{\Sigma\}$ は D の各点で常に局所有限生成である．

幾何学的イデアル
層の連接性

[証明]　まず，Σ が特殊な解析集合の場合を考える．

記述を簡単にするため，$\mathbf{C}^n$ を r 個の複素変数 $z_1, \ldots, z_r$ の空間 $\mathbf{C}^r$ と $n-r$ 個の複素変数 $w_1, \ldots, w_{n-r}$ の空間 $\mathbf{C}^{n-r}$ の直積空間と考えることとし，D を $\mathbf{C}^r$ のある領域として直積領域 $\Lambda = D \times \mathbf{C}^{n-r}$ を考える．そして D における正則函数 $a_{j,k}(z)$ $(j=1,\ldots,n-r;\ k=1,\ldots,l_j)$ を係数とする重複因子をもたない w_j $(j=1,\ldots,n-r)$ の擬多項式

$$P_j((z), w_j) = w_j^{l_j} + a_{j,1}(z)w_j^{l_j-1} + \cdots + a_{j,l_j}(z) \quad (j=1,\ldots,n-r)$$

を考え，Λ において $P_j((z), w_j) = 0$ $(j=1,\ldots,n-r)$ で与えられる解析集合を $\widetilde{\Sigma}$ とする．

このとき，次の命題が得られる．

命題 7.5　Λ における G-イデアル $G\{\widetilde{\Sigma}\}$ は $n-r$ 個の擬多項式

$$P_j((z), w_j) \qquad (j=1,\ldots,n-r)$$

によって生成される．

[証明]　証明は $n-r$ に関する帰納法である．まず $n-r=1$ のとき，この命題は成り立つ．それで $n-r-1$ のときは成り立つと仮定して，$n-r$ のときを証明する．$p=((a),(b))$ を $\widetilde{\Sigma}$ の任意の点とし，まず $\mathbf{C}^r$ において (a) を中心とする閉多円筒

$$\delta\ : |z_k - a_k| \leq r_k \qquad (k=1,\ldots,r)$$

を描き，次に各 $\mathbf{C}_{w_j}$ において閉円板

$$\gamma_j\ :\ |w_j - b_j| \leq \rho_j \qquad (j=1,\ldots,n-r)$$

を描いて，

$$\gamma = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_{n-r}, \qquad \gamma' = \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_{n-r}$$

とおき，さらに $\lambda = \delta \times \gamma$ および $\lambda' = \delta \times \gamma'$ とおく．そして r_k および ρ_j を適当にとって，λ は Λ に含まれ，さらに $\widetilde{\Sigma}$ は $\delta \times \partial\gamma$ と交わらないと仮定し，$\widetilde{\Sigma}^0 = \widetilde{\Sigma} \cap \lambda$ とおく．

このとき各 $P_j((z), w_j)$ は $\lambda_j = \delta \times \gamma_j$ において

$$P_j((z), w_j) = \omega_j((z), w_j) \cdot P_j^0((z), w_j)$$

KŌDAI MATH. SEM. REP.
Nos. 5-6, Dec., 1949.

NOTE SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES.

Par Kiyoshi OKA.

(Communicated by Y. Komatu)

Introduction. 1. Le champs de fonctions analytiques de variables quelconques s'étend aux champs de: arithmétique, algèbre, analyse, géométrie, et sciences exactes. C'est un fait, très simple mais tout fondamental. On rêvera aux nouveaux problèmes qui y s'attachent. C'est une des raisons que nous avons commencé à étudier la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables.

Revenons à l'introduction de notre Mémoire I [5], où se trouve une famille de problèmes tout fondamentaux reliés intimement les uns aux autres.

Essentiellement dit, c'est H.Behnke et P.Thullen [2] qui ont posé ces problèmes avec des raisons l'être, dont une est historique, et cela par une méthode tout à fait concrète, précisément dit, en exposant un Ouvrage de la mesure convenable. (Voir: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veraenderlichen, 1934, spécialement pages 54, 68, 79.)

Par les Mémoires I-VI [5], nous avons fait un expériment pour savoir la voie.

Depuis lors, nous nous sommes occupés éfforcément, avant tout, pour prévoir les résultats et méthodes, d'où à partir, dont nous exposerons, une partie dans la Note actuelle, et l'autre partie dans la Note suivante. Dont, nous allons expliquer brièvement la raison.

2. H.Poincaré a repris un problème essentiellement important pour la civilisation, l'éducation étant comprise, par exemple. Un problème depuis la lointaine, mais c'est lui qui en a premièrement parler, explicitement. Mais sans expliquer la raison profonde, ni la méthode concrète, nous pensons ainsi. C'est le problème suivant:

Problème (a) - De quelle manière le découvert mathématique se présente?

Et, il nous semble que, c'est R. Descartes qui a fourni la recherche, que nous somme en train de faire dévotement, avant tout, d'une méthode convenable de la représentation.

Pareillement, il y a le problème que voici:

Problème (A) - De quelle manière une étude d'une seule et la même branche des sciences mathématiques se pousse de plus en plus par une seule et la même personne au sens propre?

Naturellement, il y a, un ordre de problèmes, qui nous apparaissons, comme ensemble, arithmétique, c'est-à-dire, dénombrable actuellement, entre (a,A) et s'étend aux deux côtes. Nous avons décidé de les étudier éfforcément possible, pour l'éclaircir plus ou moins la matrice de la civilisation.

3. Spécialement, nous semblons que, les problèmes (A), (a), pour fixer l'idée, possèdent une seule et la même partie essentielle, autrement dit, ces problèmes se ressemblent à la partie essentielle.

Et, c'est pour l'experiment critique, pour affirmer notre idée ci-dessus, visiblement, que nous exposons la présente Note.

4. La présente Note et la Note suivante, comme ensemble, consiste en deux parties, dont: la partie I et la première moitie. À de la partie II sont mathématiquement exactes à nous; mais le reste ne l'est jamais, dont nous expliquerons la raison: quoique nous en avons examiné le mode de raisonnement, c'était sans papier, nous y avons quand même parcouru le champs des logiques mathématiques où l'intuition pure ne demeure plus, sans doute.

5. Donc, naturellement, du présente Note, ne se présente aucune restriction pour le lecteur pour étudier le champs actuel et exposer le résultat, nous pensons ainsi.

6. Disant un mot, ... est commencé à décider, de décider .... coule dans la extase, se forme de plus en plus et s'arrêt à être formulé; nous voyons ainsi. (Je voudrais dire ici le remerciement profond à Fûju-Kai, pour son secours depuis le temps de la Note sur les domaines pseudoconvexes, jusqu'au temps actuel.)

I. Le domaine fini et sans point de ramification.

Comme nous venons de le dire, pour les résultats exposés dans nos Mémoires I-VI, nous avons essaié de les étendre aux domaines du titre, et nous l'avons fini à la fin de 1943.

Comme H.Behnke et K.Stein [1] les ont déjà indiqués, le théorème sur le développement (ou approximation) de fonctions holomorphes reste subsister, il en est de même pour les théorèmes concernant les problèmes de P.Cousin pourvu si l'on se restreint aux domaines d'holomorphie de feuilles bornées; et dont le premier fournit le deuxième au cas général d'un lemme suffisante pour le passage à la-limite.

Le seul problème qui reste à traiter est donc, ce qui concerne la conception, holomorphe-convexe (regulär-konvex) que H.Behnke a introduite et formulée avec P.Thullen au page 72 de leur Ouvrage [2] dont la partie actuellement importante et que la troisième domaine B_0' ($B_0 \subset B_0' \Subset B$) est par définition de feuilles bornées; or:

Problème — « Tout domaine pseudoconvexe (fini, sans point de ramification) est-il holomorphe-convexe ? »

Dont, la conception de F.Hartogs, domaine pseudoconvexe, donnée dans le Memoire VI [5], peut être immédiatement généralisée (puisque, sans point de ramification). Pour le problème actuel, le théorème de H.Cartan et P. Thullen [4] ne répond plus pour les domaines d'holomorphie, sauf le cas de feuilles bornées. Or, la réponce est affirmative.

II. Idéaux holomorphes.

Maintenant, nous allons parler de la deuxième généralisation. Dans ce cas, il faut parler d'abord l'indétermination de la voie à décider. C'est ainsi: ou bien, si l'on faire la généralisation en admettant des points à l'infini, il y a quelques problèmes, mais ils ne semblent pas essentiels; ou bien, si celui de points critiques, c'est-à-dire, de points de ramification, dans ce cas, nous avons arrivé finalement à apercevoir des divers sorts de difficultés, tout à fait nouvelles à observer, ... et nous avons trouvé que:

1° Supposons le domaine $\mathfrak{D}$ sur le plan de la variable z, et la fonction holomorphe $f(z)$ à traiter, et on pourra au cas essentiel, déformer continuement le domaine (de la forme originale à l'intérieur). 2° Au contraire, si c'est pour un domaine contenant le point critique z_0, la déformation continue n'est permise plus.

C'est un fait tout à fait fondamental; nous appelons entre nous, le cas comme la deuxième d'être arithmétique, et celui des premier non-arithmétique.

Nous sommes ainsi devenus de reconnaitre qu'il est indispensable à nous, d'étudier d'abord, les idéaux du titre.

A. Éléments de l'idéal et probleme à partir

Nous nous restreindrons aux domaines univalents à l'espace fini de n variables complexes, pour fixer l'idée, toujours sauf le cas où la réciproque est indiquée, explicitement.

En donnant la liberté à l'élément analytique de C.Weierstrass, et en même temps, en prolongeant celui de B.Riemann au champs général, où même l'intuition physique ne demeure plus; concevoyons une paire ordonnée (f, δ), dont δ est le domaine connexe ou non, et f la fonction holomorphe dans δ, et nous conviendrons que $(f, \delta) = 0$, ou bien si $f = 0$ ou bien si $\delta = 0$. Considérons un ensemble (I) des éléments (f, δ), et nous l'exprimerons aussi en disant que $f \in (I)$ pour δ. L'ensemble (I) sera appelé idéal holomorphe, ou selon le cas, simplement idéal, s'il satisfait aux conditions suivantes:

1° Si $(f, \delta) \in (I)$ et (α, δ') quelconque, alors on a $\alpha f \in (I)$ pour $\delta \cap \delta'$,

2° Si $(f, \delta) \in (I)$, $(f', \delta') \in (I)$, alors on a $f + f' \in (I)$ pour $\delta \cap \delta'$

De la définition, la suivante:

« Si $(f, \delta) \in (I)$, $\delta \supset \delta_0$, alors on a $(f, \delta_0) \in (I)$ » — Donc, on peut dire que $f \in (I)$ ou non en un point. Étant donnés un idéal (I) et un domaine pseudobase de (I) pour $\mathfrak{D}$, si elle consiste d'un nombre fini de fonctions holomorphes, c'est-à-dire, uniformes dans $\mathfrak{D}$ et appartenant à (I) en tout point P de $\mathfrak{D}$ et si, pour toute fonction f appartenant à (I) en tout point au voisinage de P on a toujours, identiquement $f = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p$ en P, α_i étnat des fonctions holomorphes. Et, nous avons:

Problème I — « Trouver une pseudobase d'un idéal donné (I) pour un domaine donné $\mathfrak{D}$. »

La partie essentielle de ce problème est, comme nous le verrons plus tard (voir le problème (E)), la sui-

80

vante:

Problème II — « Trouver une pseudo-base de (I) pour un point donné P de $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire, pour un voisinage déterminé de P. »

Nous appellerons toute base comme ci-dessus, base locale. On ne peut pas résoudre les problèmes II sans condition, puisqu'il y a des divers exemples. Or, parmis les problèmes de II, ce qui est à traiter pour la première fois, est la suivant:

$$(1) \quad A_1F_1 + A_2F_2 + \quad + A_pF_p = 0,$$

et nous appellerons tout système $(A_1, A_2, \quad, A_p)$ consistant des fonctions holomorphes dans un domaine δ contenu dans $\mathfrak{D}$ (connexe ou non) satisfaisant identiquement à la relation (1), d'être une solution de l'équation (1) pour δ. Considérons l'ensemble (I) consistant de toutes les paires ordonnées (A, δ) des solutions de (1) pour δ, (I) est un idéal, et le problème dit plus haut. C'est:

Problème III — « Trouver pour un point donné de $\mathfrak{D}$ une base locale pour, l'idéal expliqué ci-dessus, $(I) = \{(A_1, \delta)\}$. »

Avec H. Cartan, nous allons expliquer la signification de ce problème. Rassemblons une sorte de problèmes, seulement en respectant à fixer l'idée, à la sensation, et à l'allure propre d'histoire.

D'abord, soient $F_1, F_2, \cdot, F_p, f, \varphi$ fonctions holomorphes dans un domaine $\mathfrak{D}$; s'il existe une solution de la forme $f - \varphi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdot + \alpha_p F_p$, α_i étant des fonctions holomorphes dans $\mathfrak{D}$, nous appelons avec P.G.L. Dirichlet que les fonctions f, φ sont congruentes dans $\mathfrak{D}$, par rapport à (F), et avec lui nous le désignerons par $f \equiv \varphi \mod (F)$. Soit P un point de $\mathfrak{D}$, deux fonctions holomorphes sont appelées congruentes en P, s'il en est ainsi pour un voisinage de P; et:

Problème de A. Weil — « Étant donnés un domaine univalent, fermé et borné Δ à l'espace de n variables complexes, une combinaison (ne pas ordonnée) $(F_1, F_2, \quad, F_p)$ de fonctions holomorphes au voisinage de Δ est une fonction Φ de la même nature; et cela de telle façon que $\Phi \equiv 0 \mod (F)$ en tout point P de Δ; trouver un système de fonctions A_i $(i = 1, 2, \cdot, p)$ holomorphes au voisinage de Δ, tel que $\Phi = A_1F_1 + A_2F_2 + \quad + A_pF_p$ identiquement.

Nous avons rencontré ce problème dans le Mémoire V[5], à l'hypothèse de A.Weil (1932-1935) [6]

Problème (C) — « Reprenons au sens ci-dessus, Δ, $(F_1, F_2, \cdot\cdot, F_p)$, supposons qu'à tout point P de Δ, il correspond un polycylindre élémentaire (γ) et une fonction φ holomorphe dans (γ), et cela de façon que, pour toute paire de (γ) contigus, les fonctions correspondantes soient congruentes par rapport à (F) en tout point de la partie commune; et nous proposerons de trouver une fonction holomorphe Φ au voisinage de Δ de manière que $\Phi \equiv \varphi \mod (F)$ en tout point P de Δ. »

Nous avons rencontré ce problème déjà au Mémoire I[5].

Ensuite, soient $(f_1, f_2, \quad, f_p)$, $(\varphi_1, \varphi_2, \cdot, \varphi_q)$ deux combinaisons de fonctions holomorphes dans un domaine $\mathfrak{D}$; elles seront appelées équivalentes dans $\mathfrak{D}$, s'il existe deux relations des formes, $\varphi_i = \alpha_{i1} f_1 + \alpha_{i2} f_2 + \cdots + \alpha_{ip} f_p$ $(i = 1, 2, \quad, q)$ et $f_j = \beta_{j1}\varphi_1 + \beta_{j2}\varphi_2 + \cdots + \beta_{jq}\varphi_q$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ et nous le désignerons par $(f) \sim (\varphi)$. Nous appellerons que $(f) \sim (\varphi)$ en un point P de $\mathfrak{D}$, s'il en estainsi pour un voisinage de P:

Problème (E) — « Dans les circonstances géometriques du problème (C), supposons qu'il corresponde à chaque (γ) une combinaison finie (f) de fonctions holomorphes, de façon que, pour toute paire de (γ) contigus, les combinaisons correspondantes soient équivalentes en tout point de la partie commune; et nous proposerons de trouver une combinaison finie (F) de fonctions holomorphes au voisinage de Δ, de façon que $(F) \sim (f)$ en tout point P de Δ. »

Nous avons rencontré ce problème au Mémoire II[5] et nous l'avons évité en trouvant une autre voie, le théorème I; c'est sur cette voie que H.Behnke et K.Stein ont atteint aux résultats expliqués à I.

Ce théorème I du Mémoire II [5] peut etre constaté plus simplement, pour le lecteur, mais notre fois, la voie original à la démonstration, est la coulée d'un élément (1931), de la Note exposée en 1934; nous l'expliquerons dans un Mémoire ultérieur, au temps propre; la Note consiste en quelques éléments, qui seront publiés aux temps propres, aux détails, quoique ne pas tout prochainement.

Ce sont la famille de problèmes dit plus haut. Or, H.Cartan a indiqué dans un Mémoire tout récent [3], que

«Si le problème III est toujours résoluble, il en est de même pour les problèmes, de A.Weil, (C) et (E), pourvu si l'on se restreint aux domaines fermés Δ extérieurement holomorphe-convexes. »

Cela, sans démonstration, mais avec toutes les préparations. Donc, disormais, le problème III sera appelé d'après le nom de H.Cartan, puisque, c'est lui qui a premièrement donné au problème la raison d'être, suffisante.

C'est le problème de H.Cartan que nous cherchions, pour faire le point de départ. Or nous disons que: Le problème de H.Cartan est toujours résoluble.

Dans la Note suivante nous parlerons d'une forme commode de conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de bases locales d'idéaux holomorphes, d'un exemple et d'un sous-exemple très important à nous.

(Fin de la première Note, le 1 Décembre 1949.)

(*) Received Dec. 19, 1949.

[1] H.Behnke-K.Stein, Approximation analytischer Funktionen in vorgegebenen Bereichen der Raumes von n komplexen Veraenderlichen. Goettinger Nachrichten, neue Folge 1 (1939) 195-202.

[2] H.Behnke-P.Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veraenderlichen, Erg. Math. III 3, (1934) Berlin.

[3] H.Cartan, Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes. Annals Sci. École Norm. Sup. (3) 61 (1944) 149-197. voir aussi: Jour. de Math. (9) 19 (1940) 1-26.

[4] H.Cartan-P.Thullen, Regularitaets- und Konvergenz Bereiche. Math. Ann. 106 (1932) 617-647.

[5] K.Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables,
(I) Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelle. Jour. of Sci. Hiroshima Univ. 6 (1936) 244-255.
(II) Domaines d'holomorphie. ibid. 7 (1937) 115-130.
(III) Deuxième problème de Cousin. ibid. 9 (1939) 7-19.
(IV) Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles. Jap.Jour. of Math. 17 (1941) 517-521.
(V) D'intégrale de Cauchy. Jap.Jour. of Math. 17 (1941) 523-531.
(VI) Domaines pseudo-convexes. Tôhoku Math. J. 49 (1942) 15-52; voir aussi: Proc. Imp.Acad.Tokyo. 17 (1941) 7-10.

[6] A.Weil,
(1) Sur les séries de polynomes de deux variables complexes C.R.Paris 194 (1932) 1304-1305.
(2) L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. Math.Ann. 111 (1935) 178-182.

82

H. Cartan 全集

38.

Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes

Bulletin de la Société mathématique de France 78, 29–64 (1950)

Introduction. — Dans un Mémoire intitulé : *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes* (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, 61, 1944, p. 149-197; ce Mémoire sera désigné par les initiales I. F. A. tout le long du présent travail), j'ai tenté d'expliquer le rôle joué par les idéaux dans certaines questions de la théorie des fonctions analytiques de variables complexes; j'ai indiqué les principaux problèmes qui se posaient, et tâché de les résoudre. Je n'y suis parvenu que d'une façon incomplète, ayant dû laisser sans solution deux problèmes-clefs (« premier problème » et « deuxième problème », p. 187 de I. F. A.). Les mêmes questions ont été travaillées d'une manière indépendante au Japon par K. Oka, dont les beaux travaux antérieurs m'avaient d'ailleurs guidé dans mes recherches sur les idéaux. Sans avoir pu prendre connaissance de mon travail I. F. A., Oka a écrit en 1948 un Mémoire où il étudie les mêmes questions, quoique en des termes un peu différents. Dans ce Mémoire, qui paraît dans ce même volume du *Bulletin*, Oka résout le premier des deux problèmes-clefs dont je parlais plus haut, et obtient donc des résultats plus complets que ceux de mon Mémoire de 1944. Ayant eu le privilège de connaître en manuscrit le nouveau travail de Oka, j'ai été conduit à faire une nouvelle mise au point de l'ensemble de la théorie. D'une part je donne ici (ci-dessous, théorème 1) une solution simplifiée du « premier problème » (I. F. A., p. 187) résolu par Oka; d'autre part, grâce à la solution de ce premier problème, je résous aussi le « deuxième problème » [1] (ci-dessous, théorème 2), ce qui me permet d'aborder franchement l'étude *globale* des variétés analytiques (*voir* par exemple les théorèmes 7 *ter* et 8 *ter* ci-dessous). "1948"

La lecture du présent Mémoire, qui donne autant que possible des démonstrations complètes, devrait en principe se suffire à elle-même; j'y fais peu d'usage de mon Mémoire I. F. A., l'optique d'ensemble ayant changé. Les quelques résultats initiaux qui sont admis ici sans démonstration sont énoncés explicitement sous forme de *lemmes*, avec renvois précis à I. F. A. ou à d'autres Ouvrages.

Le but final de ce travail est l'étude globale des idéaux (et des modules) de fonctions analytiques dans les *domaines d'holomorphie*; il est atteint au para-

---

[1] *Note rajoutée à la correction des épreuves* : d'après des papiers communiqués récemment à l'auteur, il semble que K. Oka ait aussi obtenu, de son côté, une solution du deuxième problème.

85

H. Cartan 全集 Cartan 自身のコメント

utilisée plusieurs fois depuis dans des cas plus généraux, notamment par FRENKEL dans sa Thèse.

Aujourd'hui, les problèmes de Cousin trouvent leur solution naturelle dans le cadre de la théorie des faisceaux analytiques cohérents (voir ci-dessous, 7)).

7) Théorie des faisceaux sur une variété analytique complexe

L'étude des problèmes globaux relatifs aux idéaux et modules de fonctions holomorphes m'a occupé plusieurs années, en partant des travaux d'OKA. Dès 1940, j'avais vu qu'un certain lemme sur les matrices holomorphes inversibles joue un rôle décisif dans ces questions. Ce lemme est énoncé et démontré en 1940 dans [35]; dans ce même travail, j'en fais diverses applications, et je prouve notamment que si des fonctions f_i (en nombre fini), holomorphes dans un domaine d'holomorphie D, n'ont aucun zéro commun dans D, il existe une relation $\Sigma c_i f_i = 1$ à coefficients c_i holomorphes dans D. Dans [36], j'introduis la notion de «cohérence» d'un système d'idéaux et je tente de démontrer les théorèmes fondamentaux de ce qui deviendra la théorie des faisceaux analytiques cohérents sur une variété de Stein; mais je n'y parviens pas dans le cas le plus général, faute de réussir à prouver une conjecture que K. OKA démontrera plus tard (1950) et qui, en langage d'aujourd'hui, exprime que le faisceau des germes de fonctions holomorphes est *cohérent*. Sitôt que j'eus connaissance de ce théorème d'OKA (publié avec beaucoup d'autres dans le volume 78 du Bulletin de la Société mathématique de France), je repris l'ensemble de la question dans [38], en introduisant systématiquement la notion de *faisceau* (introduite alors par LERAY en Topologie) et celle de faisceau cohérent (mais pas encore dans le sens plus général et définitif qui sera celui de mon Séminaire 1951–52). Il s'agit essentiellement de ce qu'on appelle aujourd'hui les «théorèmes A et B». Cependant, la formulation cohomologique générale du théorème B ne viendra que dans le Séminaire cité, à la suite de discussions avec J.-P. SERRE. La conférence [41] est consacrée à une exposition d'ensemble de ces questions (sans démonstrations), avec indications sur les diverses applications qui en découlent pour la théorie globale des variétés de Stein, et en particulier pour les problèmes de Cousin.

8) Un théorème de finitude pour la cohomologie

Il s'agit du résultat suivant, obtenu en collaboration avec J.-P. SERRE (cf. [42], ainsi que mon Séminaire 1953–54): si X est une variété analytique complexe *compacte*, et F un faisceau analytique cohérent, les espaces de cohomologie $H^q(X,F)$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Le même résultat vaut, plus généralement, si X est un espace analytique compact.

Ce théorème n'est aujourd'hui que le point de départ du fameux théorème de GRAUERT qui dit que les images directes d'un faisceau analytique cohérent par une application holomorphe et propre sont des faisceaux cohérents.

Springer版, OKA 全集 VII, 最後の頁 と H. Cartan のコメント

(δ). *Then we can find a holomorphic function* $\Phi(x)$ *in a neighbourhood of* Δ *such that* $\Phi(x) \equiv \varphi(x) \bmod (F)$ *at any point* P *of* Δ.

Theorem III. *With the same geometric configuration as in Theorem* II, *suppose given on each* (γ) *a finite system* (f) *of holomorphic functions, in such a way that for each pair* (γ'), (γ''), *the corresponding systems* (f'), (f'') *are equivalent at each point of the intersection* (δ). *We can then find a finite system* (F) *of functions holomorphic in a neighbourhood of* Δ *such that* $(F) \sim (f)$ *at any point* P *of* Δ.

Theorem IV. *Given holomorphic functions* $F_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,p)$ *in a neighbourhood of a closed polycylinder* Δ, *we can find a formula for the solutions of the functional equation* $A_1F_1 + A_2F_2 + \ldots + A_pF_p = 0$ *in a neighbourhood of* Δ. *The same is true also for systems of simultaneous homogeneous linear functional equations.*

We have restricted ourselves to closed polycylinders; these problems then become solvable for less restrictive closed sets by virtue of intrinsic properties. Besides the theorems stated above, we obtained the *remainder theorem* in No. 5. On the subject of these theorems, we shall be obliged to study them *quantitatively* if we hope to be able to apply them widely.

We have thus explained the results obtained. On the other hand, we shall speak of the problem we have been led to, viz:

Problem (J). *Given an ideal with indeterminate domain, find a finite local pseudobasis.*

As for this problem, I know almost nothing about it, not even an idea of what might be the most favourable attitude in its study. We only know that this problem cannot always be solved, without further conditions as we have seen a counter example in No. 2.

Problem (K) which we solved above is just a special case of this problem. This was essential in establishing the theorems stated above. We shall return to the general problem in another case and prove that the problem can be solved without further conditions for *a geometric ideal with indeterminate domains*. This will be indispensable in treating the problems we have been studying since Memoir I when we allow points of ramification to appear. These two examples will already show the importance of this problem.

Commentaire de H. Cartan

Ce Mémoire a été écrit en 1948 et publié en 1950 (Bull. Soc. Math. de France). Il est le résultat des réflexions auxquelles s'est livré Oka après la lecture du travail de H. Cartan (J. de Math. 19, 1940, p. 1–26) dont il a dû

Springer版, OKA全集 VII, H. Cartanのコメント 2頁目.

avoir connaissance seulement après la guerre de 1939–1945. Il n'avait probablement pas connaissance à cette époque du travail de CARTAN sur les idéaux de fonctions analytiques (Ann. Ecole Normale Sup. 61, 1944, p. 149–197) où étaient notamment étudiés les "systèmes cohérents d'idéaux ponctuels". Les problèmes envisagés par CARTAN sont aussi considérés par OKA (quoique dans un langage différent), mais OKA va plus loin dans les résultats.

OKA introduit systématiquement la notion d'"idéaux de domaines indéterminés", notion qui est en substance équivalente à celle de faisceau d'idéaux introduite par CARTAN en 1949 (Bull. Soc. Math. de France 78, 1950, p. 29–64), laquelle a prévalu depuis.

OKA pose ici une série de problèmes fondamentaux. Le problème (J), en termes de faisceaux, est le suivant: "un faisceau analytique d'idéaux est-il cohérent?". OKA donne lui-même un contre-exemple. Il semble qu'à cette époque il savait que le faisceau d'idéaux défini par un sous-ensemble analytique est cohérent (cf. les 5 dernières lignes du Mémoire); mais il n'a pas publié de démonstration, ce résultat ayant été entre temps publié par CARTAN dans son article de 1950.

Le problème (K) est résolu ici: il s'agit de la cohérence du faisceau des relations linéaires entre un nombre fini de fonctions holomorphes (problème posé par CARTAN en 1944, mais que CARTAN n'avait pu résoudre).

L'ensemble des résultats démontrés dans ce Mémoire VII est condensé dans les théorèmes I, II, III, IV énoncés à la fin du Mémoire, et qui résolvent respectivement les problèmes (C_1), (C_2), (E) et (K). OKA énonce ces théorèmes pour un compact Δ, produit de disques compacts dans les plans de coordonnées.

Le *théorème I* dit que si l'on se donne des F_i holomorphes sur Δ, en nombre fini, et si une Φ holomorphe sur Δ appartient, en chaque point de Δ, à l'idéal ponctuel engendré par les F_i, alors Φ appartient à l'idéal engendré par les F_i dans l'anneau des fonctions holomorphes sur Δ. En termes de faisceaux, cela s'enonce comme suit: si on a un morphisme surjectif de faisceaux $\mathcal{O}^p \to J$ sur Δ, où $\mathcal{J}$ est un faisceau cohérent d'idéaux, le morphisme de sections $\Gamma(\Delta, \mathcal{O}^p) \to \Gamma(\Delta, \mathcal{J})$ est surjectif (ce qui résulte du théorème B appliqué au noyau de $\mathcal{O}^p \to \mathcal{J}$).

Le *théorème II* dit que si Δ est recouvert par des ouverts U_α dans chacun desquels on a une φ_α holomorphe, de façon qu'en tout point de $U_\alpha \cap U_\beta$ la différence $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ appartienne à l'idéal ponctuel engendré par les F_i, alors il existe une Φ holomorphe sur Δ telle que, en tout point de U_α, $\Phi - \varphi_\alpha$ appartienne à l'idéal ponctuel engendré par les F_i. Ceci, en termes de faisceaux, s'énonce comme suit: si $\mathcal{J}$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur Δ, l'homomorphisme de sections $\Gamma(\Delta, \mathcal{O}) \to \Gamma(\Delta, \mathcal{O}/\mathcal{J})$ est surjectif (conséquence du théorème B appliqué à $\mathcal{J}$).

Le *théorème III* dit que si Δ est recouvert par des ouverts U_α, et si, dans chaque U_α, on a un idéal de $\mathcal{O}(U_\alpha)$ engendré par un nombre fini de fonctions holomorphes, de façon qu'en tout point de $U_\alpha \cap U_\beta$ les idéaux attachés à U_α et à U_β engendrent le même idéal ponctuel, alors il existe un système fini de fonctions holomorphes sur Δ qui engendre en tout point l'idéal ponctuel donné. – Ceci, en termes de faisceaux, s'énonce comme suit: si $\mathcal{J}$ est un faisceau

88

Springer版 OKA全集[VIII] 最後の頁と H. Cartanのコメント

pseudobases, so also does (I). Now, the adjoint contains F_1 and the quotient contains $F_1^{\lambda-1}$. If $\lambda-1>1$, we apply the same procedure to the quotient, and so on. We proceed similarly with $F_2, F_3, \ldots, F_p$ successively, and arrive at a system $[(J_1), (J_2), \ldots, (J_q)]$ of ideals such that we can attain any (J_j) $(j=1,2,\ldots,q)$ from (I) by a finite number of operations of taking adjoints and quotients with respect to one of the functions (F_i) $(i=1,2,\ldots,q)$; further, if each (J_j) has a pseudobasis, so also does (I). In addition, each (J_j) contains (F).

Let (J) be an arbitrary ideal of this system and let Σ' be the set of its zeros. Two cases are possible: either $\Sigma'=\Sigma$, in which case (J) has (F) as a pseudobasis; or $\Sigma'\neq\Sigma$, in which case $\Sigma'\subset\Sigma$ as is easily seen. Let us consider the subsystem (S) consisting of all the (J) such that $\Sigma'\subset\Sigma$.

Let us consider, in general, a characteristic variety T passing through (x^0). According to Weierstrass, the portion of T in a neighbourhood of (x^0) consists of a finite number of branches. If the number of branches of dimension i is ν_i $(i=n-1, n-2, \ldots, 0)$, we make correspond to T the n-tuple $\alpha=(\nu_{n-1}, \nu_{n-2}, \ldots, \nu_0)$. Consider the set A of all the α (for a given n) and order it as follows: let $\alpha'=(\nu'_{n-1}, \nu'_{n-2}, \ldots, \nu'_0)$ be an element of A different from α; we shall say that $\alpha<\alpha'$ if either $\nu_{n-1}<\nu'_{n-1}$ or $\nu_{n-1}=\nu'_{n-1}, \ldots, \nu_i=\nu'_i$, $\nu_{i-1}<\nu'_{i-1}$ $(i=n-1, n-2, \ldots, 1)$.

We make correspond to the ideal (I) the element α of the set A associated to the set Σ of zeros of (I) at (x^0); and, to the system (S) if it is not empty, we make correspond the largest β of the elements of A similarly attached to the ideals of (S). Since $\Sigma'\subset\Sigma$, we have $\beta<\alpha$.

Now, each ideal (J) of (S) belongs to $(\mathfrak{F})$. We can therefore apply to it the same procedure and obtain a system of ideals which corresponds to the system (S) attached to (I). Let (S_1) be the union of these systems when (J) runs over (S_1). If (S_1) is non-empty, the element γ of A attached to (S_1) in the same way satisfies the inequality $\gamma<\beta<\alpha$. Consequently, we can only continue a finite number of times. (I) therefore possesses a pseudobasis at (x^0). Q.E.D.

Commentaire de H. Cartan

Ce Mémoire VIII, de lecture très difficile, est consacré à l'étude des fonctions holomorphes sur les "domaines intérieurement ramifiés". Il s'agit, en réalité, de l'étude des espaces analytiques *normaux* (i.e. dont l'anneau des germes de fonctions holomorphes en chaque point est intègre et intégralement clos), et plus généralement de la "normalisation" d'un espace analytique réduit.

Cette étude soulève des problèmes de nature locale; le théorème essentiel est le suivant (cf. Séminaire H. Cartan, 1953/54, exposé 11): étant donné un espace analytique réduit Σ, de faisceau structural $\mathcal{O}(\Sigma)$, le faisceau $\tilde{\mathcal{O}}(\Sigma)$ des clôtures intégrales $\tilde{\mathcal{O}}_x(\Sigma)$ des anneaux locaux $\mathcal{O}_x(\Sigma)$ est un faisceau cohérent sur Σ. C'est ce que, en fait, démontre Oka sans que ce résultat soit clairement énoncé. Comme conséquence immédiate, l'ensemble des points $x\in\Sigma$ où Σ n'est pas normal est un sous-ensemble analytique de Σ.

Springer版 岡全集[VIII] H. Cartan コメント 2頁目

La lecture de ce Mémoire VIII est encore compliquée par le fait que Oka mélange l'étude de ces problèmes de nature locale à des considérations globales, qui faisaient déjà l'objet du Mémoire VII. C'est la raison pour laquelle la partie I du présent Mémoire est consacrée à l'approfondissement technique de notions relatives aux faisceaux cohérents d'idéaux, notamment le théorème 1 qui a servi d'une manière essentielle dans la preuve du théorème 2 de la Partie II du Mémoire. Oka donne aussi une démonstration originale de la cohérence du faisceau d'idéaux attaché à un sous-ensemble analytique de $\mathbb{C}^n$ (qu'il appelle "théorème de H. Cartan"), et donne divers critères de cohérence, notamment le "corollaire 2". Il donnera aussi un critère de cohérence dans l'Appendice.

Mais le but essentiel d'Oka est l'étude des "domaines intérieurement ramifiés". Un tel domaine D est, par définition, un revêtement ramifié à un nombre fini ν de feuillets d'un domaine $\underline{D}$ de $\mathbb{C}^n$. On peut le considérer comme l'image d'un sous-ensemble analytique Σ de $\mathbb{C}^{n+m}$ par la projection p: $\mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^n$, p définissant une bijection de l'ensemble des points réguliers de Σ sur un ouvert dense de D. Oka définit alors ce qu'il entend par *fonction holomorphe* sur D (c'est une fonction continue qui est holomorphe aux points réguliers de D); en transportant cette définition à Σ, on obtient les fonctions holomorphes dans l'ouvert des points réguliers de Σ et qui ont une limite en chaque point singulier a lorsqu'on reste dans une composante irréductible de Σ au point a. Les germes de fonctions holomorphes en $a \in \Sigma$ ne sont autres que les éléments de la clôture intégrale de l'anneau $\mathcal{O}_a(\Sigma)$ induit par les germes de fonctions holomorphes de l'espace ambiant C^{n+m}. Autrement dit, lorsqu'on aura prouvé l'existence de l'espace *normalisé* $\tilde{\Sigma} \xrightarrow{q} \Sigma$ ($\tilde{\Sigma}$ étant considéré comme sous-ensemble analytique de $\mathbb{C}^{n+m+p}$, et q étant induit par la projection canonique $\mathbb{C}^{n+m+p} \to \mathbb{C}^{n+m}$, – tout ceci étant vrai au moins localement), alors les fonctions holomorphes sur D s'identifient aux fonctions holomorphes sur $\tilde{\Sigma}$ (c'est-à-dire induites localement par des fonctions holomorphes de l'espace ambiant $\mathbb{C}^{n+m+p}$). Bien sûr, une fonction holomorphe sur D, considérée comme fonction sur Σ (ou plutôt sur l'ensemble des composantes irréductibles aux points de Σ) n'est pas toujours induite localement par une fonction holomorphe de l'espace ambiant $\mathbb{C}^{n+m}$. Dans la terminologie d'Oka, les germes de fonctions holomorphes en un point $a \in \Sigma$ qui sont induits par des germes de fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}^{n+m}$ sont dits posséder la "propriété (H)". Le point a possède la propriété (H) si tout germe de fonction holomorphe en a possède la propriété (H); cela revient à dire que Σ, muni de la structure analytique induite par l'espace ambiant, est *normal* au point a.

Dans cette situation de revêtement ramifié p: $\Sigma \to \underline{D}$, Oka introduit la notion de *fonction* (W): c'est une F holomorphe dans l'espace ambiant $\mathbb{C}^{n+m}$ telle que la multiplication par F transforme toute fonction holomorphe sur Σ en une fonction possédant la propriété (H). Naturellement, cette notion peut se définir soit globalement, soit localement. L'existence locale de telles fonctions (W) est prouvée. Ces fonctions (W) sont ce que H. Cartan appelle *dénominateurs universels* pour le sous-ensemble analytique Σ de $\mathbb{C}^{n+m}$ (cf. Séminaire H. Cartan, 1953/54, exposé 9). Si une fonction holomorphe F de l'espace ambiant s'annule aux points singuliers de Σ sans être identiquement nulle dans un ouvert non vide de Σ, il existe une puissance F^λ qui est (localement) un

Étant donné un idéal (I) de domaines indéterminés, nous dirons qu'un système fini (F) de fonctions holomorphes est une pseudo-base de (I) *en un point*, si c'est une pseudo-base dans un voisinage de ce point. Un tel système sera parfois appelé une *pseudo-base locale*. Nous nous proposons encore le problème suivant :

PROBLÈME (J). — *Étant donné dans l'espace* (x) *un idéal* (I) *de domaines indéterminés et un point* P, *trouver une pseudo-base finie de* (I) *au point* P.

Le problème (J) est un cas particulier du problème (I). Entre ces deux problèmes il y a la relation suivante :

Soit, dans l'espace (x), *un idéal* (I) *de domaines indéterminés et un polycylindre borné fermé* E. *Supposons que le problème* (J) *soit résoluble pour l'idéal* (I) *et pour tout point* P *de* E, *et que de plus le problème* (C_1) *soit résoluble pour tout polycylindre fermé borné. Alors le problème* (I) *est résoluble pour l'idéal* (I) *et le polycylindre* E.

En effet, soit P un point quelconque de E; puisque le problème (J) est résoluble pour (I) au point P, il existe un polycylindre (γ), au voisinage de P, et un système fini de fonctions holomorphes (f) dans (γ), qui constitue une pseudo-base de (I) dans (γ). Considérons un couple de polycylindres (γ), (γ') d'intersection non vide; soient (f) et (f') les pseudo-bases correspondantes; elles sont équivalentes en chaque point de l'intersection $(\gamma)\cap(\gamma')$. Nous nous proposons de trouver un système fini (F) de fonctions holomorphes au voisinage de E, tel que $(F)\sim(f)$ en tout point P de E. Or ceci est un problème (E) pour le polycylindre fermé E; comme on a supposé que le problème (C_1) est résoluble pour tout polycylindre fermé, l'existence de (F) s'ensuit. Or un tel système (F) est une pseudo-base en tout point P de E, donc est une pseudo-base pour E. C. Q. F. D.

Le problème (I) est donc ramené au problème (J), moyennant le problème (C_1) pour les polycylindres fermés bornés. Or le problème (J) n'a pas toujours de solution, comme le montre le contre-exemple suivant :

Exemple 3. — Soient, dans l'espace de deux variables complexes x, y, deux hypersphères (C), (γ) de centre à l'origine, telles que $(C)\supset(\gamma)$. Désignons par Σ_0 la partie de la surface caractéristique $x=y$ qui est contenue (strictement) dans (C) et non strictement contenue dans (γ). Soit (I) l'ensemble des couples $(f,\ \delta)$ dont le δ est contenu dans (C) et tels que $\frac{f}{x-y}$ soit holomorphe en tout point de l'intersection $\Sigma_0\cap\delta$. Alors (I) est un idéal [qui possède les propriétés (T_1) et (T_2)]; mais, puisque l'ensemble des zéros de $(f,\ \delta)$ est $\Sigma_0\cap\delta$ pour tout élément $(f,\ \delta)$ de (I), cet idéal (I) ne peut posséder une pseudo-base locale finie en aucun point de la frontière de (γ).

On ne peut donc pas résoudre le problème (J) pour n'importe quel idéal de domaines indéterminés. Nous verrons ultérieurement d'autres contre-exemples.

Nous étudierons deux catégories d'idéaux de domaines indéterminés pour lesquels le problème (J) peut être résolu pour les polycylindres fermés bornés.

L'une d'elles va être étudiée dans le présent Mémoire. L'autre est celle des *idéaux géométriques de domaines indéterminés* (qui correspondent aux idéaux de polynomes attachés aux variétés algébriques), dont la considération deviendra indispensable quand nous aurons à nous occuper des domaines qui admettent des points de ramification. Pour pouvoir montrer que le problème (J) peut être résolu pour les idéaux de cette espèce (et pour les polycylindres bornés fermés), nous aurons besoin non seulement des résultats du présent Mémoire, mais de quelques notions concernant les domaines ramifiés. Nous réserverons donc cette étude pour un Mémoire ultérieur.

3. **Équations fonctionnelles linéaires homogènes; solutions formulaires.** — Nous allons scruter les environs du problème (C_1) grâce aux notions que nous venons d'introduire.

1° *Équations fonctionnelles linéaires homogènes.* — Soient p fonctions holomorphes F_i ($i=1, \ldots, p$) non identiquement nulles dans un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace (x). Considérons l'équation

$$(1) \qquad A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_p F_p = 0,$$

où les A_i désignent des fonctions inconnues; si un système de fonctions A_i holomorphes dans un domaine (connexe ou non) δ contenu dans $\mathcal{D}$ satisfait dans δ à l'équation (1), nous dirons que le système des A_i est une *solution* (*holomorphe*) de l'équation (1) pour δ. Toute équation de cette nature sera dite *équation fonctionnelle linéaire homogène*.

Considérons l'ensemble (I_1) des couples (A_1, δ) tels qu'il existe $A_2, \ldots, A_p$ holomorphes dans δ de manière que ($A_1, A_2, \ldots, A_p$) soit une solution de l'équation (1) pour δ. Je dis que :

(I_1) *est un idéal.*

En effet, si $(A_1, \delta) \in (I_1)$ et si α est une fonction holomorphe dans un domaine (connexe ou non) δ', on a $\alpha A_1 \in (I_1)$ pour $\delta \cap \delta'$; si $(A_1, \delta) \in (I_1)$ et $(A'_1, \delta') \in (I_1)$, on a $A_1 + A'_1 \in (I_1)$ pour $\delta \cap \delta'$.

Nous ne voyons pas immédiatement si (I_1) satisfait aux propriétés (T_1), (T_2) ou non.

C'est cette espèce d'idéaux que nous avions en vue à la fin du paragraphe précédent. Nous montrerons dans ce Mémoire que le problème (J) peut être résolu pour ces idéaux (et pour les polycylindres bornés fermés). Le problème (J) se formule comme suit :

Problème (K). — *Étant donné une équation fonctionnelle linéaire homogène dans un domaine* $\mathcal{D}$ *de l'espace* (x), *et un point* P *de* $\mathcal{D}$, *trouver une pseudobase finie de l'idéal* (I_1) *au point* P [en désignant par (I_1) l'idéal défini par l'équation, comme il a été expliqué ci-dessus].

2° *Solutions formulaires.* — Nous nous proposons maintenant de trouver une

On ne peut donc pas résoudre tous les problèmes (J) à la fois et sans condition. On apercevera encore divers sortes d'exemples contraires.

Nous verrons deux espèces d'idéaux de domaines indéterminés pour lesquelles le problème (J) est résoluble aux polycylindres fermés; dont l'une sera traitée dans le présent Mémoire.

L'autre espèce est *les idéaux géométriques de domaines indéterminés* (ce qui correspond aux idéaux géométriques au champ de polynomes), qui deviendront indispensables à nous, lorsque nous nous occupe domaines admettant des points de ramifications. La démonstration pour les idéaux de cette espèce (pour que le problème (J) soit résoluble aux polycylindre fermés) demande, outre les résultats du Mémoire actuel, quelque notions sur tels domaines. Nous le traiterons donc, dans un Mémoire ultérieur.

3. Equations fonctionnelles linéaires homogènes et ses solution formulaires. Nous allons scruter les environs du problème (C_1) à l'aide conceptions que nous venons de préparer.

1° *Equations fonctionnelles linéaires homogènes.* Considérons p fonctions holomorphes $F_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ différentes de zéro dans un domaine D à l'espace (x); concevons l'équation,

$$A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0, \tag{1}$$

où A_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ signifient des fonctions inconnues; nous appellerons tout système de fonctions holomorphes $[A_1(x), A_2(x), \ldots, A_p(x)]$ pour un domaine (connexe ou non) δ contenu dans D satisfaisant à cette équation identiquement d'être une *solution* (*holomorphe*) de 1'équation pour δ; et nous appellerons toute équation de cette nature *équation fonctionnelle linéaire homogène.*

Considérons, concernant 1'équation (1), l'ensemble (I_1) de (A_1, δ) de façon que $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ soit une solution pour δ; je dis que :

(I_1) *est un idéal.*

Car, si $(A_1, \delta) \in (I_1)$ et si $\alpha(x)$ est une fonction holomorphe pour un domaine (connexe ou non) δ', on a alors $\alpha A_1 \in (I_1)$ pour $\delta \cap \delta'$; si $(A_1, \delta) \in (I_1)$, $(A_1', \delta') \in (I_1)$, on a alors $A_1 + A_1' \in (I_1)$ pour $\delta \cap \delta'$.

Nous ne pouvons pas apercevoir immédiatement si (I_1) satisfait aux propriétés $(T_1), (T_2)$ ou non.

C'est pour cette espèce d'idéaux dont nous avons parlé à la fin du numéro précédant; et dont problème (J) est comme suivant :

Problème (K) *Etant donnés une équation fonctionnelle linéaire homogène dans un domaine D à l'espace (x), et un point P de D, trouver un*

Encyclopaedia of Mathematical Sciences

Volume 74

H. Grauert · Th. Peternell · R. Remmert (Eds.)

Several Complex Variables VII

Springer-Verlag

91

4. Extension Principle. Let Y denote a *closed* subspace of X and let $\iota: Y \to X$ be the inclusion. For every sheaf $\mathcal{T}$ of groups in Y the image sheaf $\iota_*\mathcal{T}$ is a sheaf of groups on X characterized by $\iota_*\mathcal{T}|Y = \mathcal{T}$ and $\iota_*\mathcal{T}|X\setminus Y = 0$; we call $\iota_*\mathcal{T}$ *the trivial extension of* $\mathcal{T}$ to X. If $\mathcal{B}$ is a sheaf of rings on Y and $\mathcal{T}$ an $\mathcal{B}$-module, then $\iota_*\mathcal{B}$ is a sheaf of rings on X and $\iota_*\mathcal{T}$ is a $\iota_*\mathcal{B}$-module. One easily verifies:

(6.14) *A $\mathcal{B}$-sheaf $\mathcal{T}$ on Y is $\mathcal{B}$-coherent if and only if $\iota_*\mathcal{T}$ is $\iota_*\mathcal{B}$-coherent on X.*

This is the Extension Principle in its simplest form. We need a refinement for $\mathbb{C}$-ringed spaces $(X, \mathcal{A}_X)$. Every ideal $J \subset \mathcal{A}_X$ gives rise to the $\mathbb{C}$-ringed space $(Y, \mathcal{A}_Y)$ where $Y := N(J)$ and $\mathcal{A}_Y := (\mathcal{A}_X/J)|Y$, cf. 4.1. Clearly $\mathcal{A}_X/J$ is the trivial extension of $\mathcal{A}_Y$. Thus the trivial extension $\iota_*\mathcal{T}$ of every $\mathcal{A}_Y$-module $\mathcal{T}$ is an $\mathcal{A}_X/J$-module. Hence (6.14) and (6.9) yield:

(6.15) *Let $\mathcal{A}_X$ be coherent and $J \subset \mathcal{A}_X$ a finite ideal. Then an $\mathcal{A}_Y$-module $\mathcal{T}$ is $\mathcal{A}_Y$-coherent if and only if the trivial extension $\iota_*\mathcal{T}$ is $\mathcal{A}_X$-coherent.*

Since structure sheaves of complex spaces are always coherent by Oka's Theorem, cf. § 7.2, we conclude:

Extension Principle for Coherent Analytic Sheaves 6.16. *Let $(Y, \mathcal{O}_Y)$ be a closed complex subspace of a complex space $(X, \mathcal{O}_X)$. Then an analytic sheaf $\mathcal{T}$ on Y is $\mathcal{O}_Y$-coherent if and only if the trivial extension $\iota_*\mathcal{T}$ of $\mathcal{T}$ to X is $\mathcal{O}_X$-coherent.*

This principle is applied again and again in Complex Analysis to reduce questions of coherence to domains in $\mathbb{C}^n$: The coherence of an $\mathcal{O}_X$-sheaf $\mathcal{S}$ is local. Hence one assumes X to be a model space in a domain D of $\mathbb{C}^n$ and proves that the trivial extension of $\mathcal{S}$ to D is $\mathcal{O}_D$-coherent.

§ 7. Coherence Theorems

The calculus developed in section 6 might be a theory of the almost empty set as long as no convincing examples of coherent structure sheaves are given. It was the Japanese mathematician K. Oka (1901–1978) who, in 1948, proved (using another terminology) that the structure sheaf of *every* complex space is coherent. We outline a simple proof using yoga of coherent sheaves (formal part) and a Coherence Lemma for Weierstrass projections (analytic part).

In subsection 3 we define for every *reduced* space X the sheaf $\mathcal{M}$ of *meromorphic* functions on X. Locally these "functions" are quotients of holomorphic functions. Due to the existence of points of indeterminancy (like $0 \in \mathbb{C}^2$ for z_1/z_2) and singular points in the space we use sheaf language from the very beginning. Using Oka's theorem we collect basic properties of meromorphic functions.

The coherence of $\mathcal{O}$ implies the coherence of all sums $\mathcal{O}^n$, $1 \leq n < \infty$, and – more generally – the coherence of all *locally free sheaves*; such sheaves are discussed in subsection 4.

For any open set $U \subset X$ and any section $s \in \mathscr{A}(U)$, the sheaf of rings $\mathscr{A}_U/s\mathscr{A}_U$ on U is coherent at every point $x \in U$ where $s_x \neq 0$.

The proof is a nice application of sheaf yoga, cf. [CAS], p. 58/59.

Now it is fun to prove Oka's theorem for $\mathbb{C}^n$ by induction on n. The case $n = 0$ is clear. It suffices to verify the condition of the formal criterion. Let U be open in $\mathbb{C}^n$ and $s \in \mathcal{O}(U)$ and $x \in U$ such that $s_x \neq 0$. We may assume $x = 0$ and $s(x) = 0$. Choose coordinates (z, w) in $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ such that $s(0, w) \neq 0$. Then, by the Preparation Theorem, there is a neighborhood D of $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ and a monic polynomial $\omega = \omega(z, w) \in \mathcal{O}(D)[w]$ such that $s_x\mathcal{O}_x = \omega_x\mathcal{O}_x$. We consider in $D \times \mathbb{C}$ the Weierstrass model space $(W, \mathcal{O}_W)$ defined by ω and its Weierstrass projection $(W, \mathcal{O}_W) \to (D, \mathcal{O}_D)$. Since $\mathcal{O}_D$ is coherent by induction hypothesis, the sheaf $\mathcal{O}_W$ is coherent by (7.3). Then, by the *Extension Principle* (6.16), its trivial extension $\iota_*\mathcal{O}_W = \mathcal{O}_{D\times\mathbb{C}}/\omega\mathcal{O}_{D\times\mathbb{C}}$ is a coherent sheaf of rings. Since $\mathcal{O}_{D\times\mathbb{C}}/\omega\mathcal{O}_{D\times\mathbb{C}}$ and $\mathcal{O}_U/s\mathcal{O}_U$ coincide around x, the sheaf $\mathcal{O}_U/s\mathcal{O}_U$ is coherent at x. □

Oka's Theorem is at the bottom of all theory of coherent analytic sheaves. Its importance for Complex Analysis cannot be put into evidence in just a few lines. Here is a first application:

(7.6) *The support of every $\mathcal{O}_X$-coherent sheaf $\mathscr{S}$ is an analytic set in X.*

Proof. Since $\mathcal{O}_X$ is coherent, the annihilator ideal $\mathscr{A}n\,\mathscr{S}$ of $\mathscr{S}$ is coherent and $\operatorname{Supp}\mathscr{S} = N(\mathscr{A}n\,\mathscr{S})$, cf. (6.12). Clearly $N(An\,\mathscr{S})$ is analytic in X. □

It is no exaggeration to claim that Oka's theorem became a landmark in the development of function theory of several complex variables. By sheafifying one suddenly was able to obtain results one had not dared to dream of in 1950.

Historical Note. The problem of coherence was posed 1944 by Cartan, [C44], p. 572 and 603. In 1948, Oka proved the theorem for $\mathbb{C}^n$ by using the Weierstrass Division Theorem, cf. [O50], p. 87, and Cartan's comments to this paper. In algebraic geometry, Serre proved in 1955, cf. [FAC], that the structure sheaves of algebraic varieties are coherent. This result, however, is much easier to obtain than Oka's theorem.

3. The Sheaf of Meromorphic Functions and the Sheaf of Normalization. A complex space X is called *reduced* if all points of X are reduced, i.e. if no stalk $\mathcal{O}_x$ has nilpotent elements $\neq 0$. All locally irreducible spaces are reduced. In this subsection X always denotes a reduced space. The set $\mathscr{A}c_x$ of all non zero divisors in $\mathcal{O}_x$ is *multiplicative*, i.e. $1_x \in \mathscr{A}c_x$ and $g_x, g'_x \in \mathscr{A}c_x$ implies $g_xg'_x \in \mathscr{A}c_x$, $x \in X$. Germs in $\mathscr{A}c_x$ are also called *active*. By looking at the homothety $\mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $f \mapsto gf$, we obtain (using Oka's theorem and sheaf yoga):

(7.7) *For $g \in \mathcal{O}(X)$ the set $\{x \in X: g_x \notin \mathscr{A}c_x\}$ is the support of the coherent $\mathcal{O}$-sheaf $\mathscr{A}n\,g\mathcal{O}$ and hence analytic in X. In particular the set $\{x \in X: g_x \in \mathscr{A}c_x\}$ is open in X.*

Courant Institute of
Mathematical Sciences

Introduction to
Several Complex Variables

Lipman Bers

New York University

PREFACE

These notes reproduce almost verbatim a course taught during the academic year 1962/63. The original notes, prepared by Joan Landman and Marion Weiner, were distributed to the class during the year. The present edition differs from the original only in that many mistakes have been corrected. I am indebted to Miss Weiner who prepared this edition and to several colleagues who supplied lists of errata.

I intended the course as an introduction to the modern theory of several complex variables, for people with background mainly in classical analysis. The choice of material and the mode of presentation were determined by this aim. Limitations of time necessitated omitting several important topics.

Every account of the theory of several complex variables is largely a report on the ideas of Oka. This one is no exception.

L.B.

Zurich, July 8, 1964.

岡の３大連接定理。

- **岡の第１連接定理：$\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}$ の連接性定理 (1948)。**
- **岡の第２連接定理：幾何学的イデアル層の連接性定理。**
- **岡の第３連接定理：正規化層の連接性定理。**

第２連接定理については、H. Cartan がその間に、独自の証明を与えた。

連接性の重要性

新しい証明手法の発見・獲得。

通常の常識的アプローチ：

$$\text{局所理論} \Longrightarrow \text{準大域理論} \Longrightarrow \text{大域理論}$$

岡潔があるステップでとったアプローチ：

$$\begin{array}{llll} \textbf{1点究極局所理論} & \Longleftarrow & \text{局所理論} & \\ \Downarrow & & & \\ \Longrightarrow & \Longrightarrow & \Longrightarrow & \text{大域理論} \end{array}$$

- Cousin I, II 問題、
- Levi 問題（Grauert の証明、ふくらまし法）。

Gunning–Rossi (1965)

$(f \circ i^*)_x^{-1}(\mathscr{M})$ is a submodule of ${}_n\mathscr{O}^t$, $\mathscr{M}_0$ is closed by theorem II, D3. Thus $\mathscr{N} = H^0(\Delta(0; r), {}_n\mathscr{O}^t) - \mathscr{M}_0$ is open, and so $(f \circ i^*)(\mathscr{N})$ is open in $H^0(U, \mathscr{S})$. But $(f \circ i^*)(\mathscr{N})$ is the complement of $\mathscr{M}_U$, so $\mathscr{M}_U$ is closed.

13. Theorem (Cartan's Theorem A). *Let* $(X, {}_X\mathscr{O})$ *be a Stein space, and* $\mathscr{S}$ *a coherent sheaf on* X. *Then* $H^0(X, \mathscr{S})$ *generates* $\mathscr{S}_x$ *for all* $x \in X$.

Proof: Let $x \in X$, and let $\mathscr{M}$ be the submodule of $\mathscr{S}_x$ generated by $H^0(X, \mathscr{S})$. Let $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathscr{S}_x$. We can pick a holomorphically convex neighborhood of x and a representative $\sigma_0 \in H^0(U, \mathscr{S})$ of $\boldsymbol{\sigma}_0$. Now $H^0(X, \mathscr{S})$ is dense in $H^0(U, \mathscr{S})$. Thus $\mathscr{M}_U = \{\sigma \in H^0(U, \mathscr{S}); \boldsymbol{\sigma}_x \in \mathscr{M}\}$ is dense in $H^0(U, \mathscr{S})$. But by the previous lemma, $\mathscr{M}_U$ is closed; thus $\mathscr{M}_U = H^0(U, \mathscr{S})$. In particular, $\sigma_0 \in \mathscr{M}_U$. Thus $\mathscr{M} = \mathscr{S}_x$ and the theorem is proved.

14. Theoerm (Cartan's Theorem B). *Let* $(X, {}_X\mathscr{O})$ *be a Stein space. Let* $\mathscr{S}$ *be a coherent sheaf on* X. *Then* $H^q(X, \mathscr{S}) = 0$ *for all* $q \geq 1$.

Proof: Write $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$, where $\overline{W}_n \subset W_{n+1}$ and (W_n, φ_n) is an Oka-Weil domain. By shrinking the W_n slightly we may assume (using proposition 5) that $H^q(W_n, \mathscr{S}) = 0$ for all $q \geq 1$. Let $\mathfrak{U}$ be the covering $\{W_n\}$ of X. Since the intersection of any collection in $\mathfrak{U}$ is a W_n, $\mathfrak{U}$ is a Leray covering. Let $\mathfrak{U}^{(n)} = \{W_n, 1 \leq j \leq n\}$. Then $H^q(X, \mathscr{S}) = H^q(N(\mathfrak{U}), \mathscr{S})$, and $H^q(N(\mathfrak{U}^{(n)}), \mathscr{S}) = H^q(W_n, \mathscr{S}) = 0$ for $q \geq 1$.

Leray of $\mathfrak{U}$

$\mathfrak{U}^{(n)}$ is W_n's covering

Let $\sigma \in Z^q(N(\mathfrak{U}), \mathscr{S})$, $q \geq 1$. Let $\sigma^{(n)}$ be the restriction of σ to $N(\mathfrak{U}^{(n)})$. Then $\sigma^{(n)} \in Z^q(N(\mathfrak{U}^{(n)}), \mathscr{S})$ so there is an $\alpha^{(n)} \in C^{q-1}(N(\mathfrak{U}^{(n)}), \mathscr{S})$ such that $\delta\alpha^{(n)} = \sigma^{(n)}$. As an element of $C^{q-1}(N(\mathfrak{U}^{(n-1)}), \mathscr{S})$, $\delta\alpha^{(n)} = \delta\alpha^{(n-1)}$, and thus $\alpha^{(n)} - \alpha^{(n-1)} \in Z^{q-1}(N(\mathfrak{U}^{(n-1)}), \mathscr{S})$. The cases $q = 1$ and $q > 1$ are treated differently.

$q = 1$. In this case $\alpha^{(n)} - \alpha^{(n-1)}$ is in fact a section of $\mathscr{S}$ on W_{n-1}. We now choose, by induction, a sequence $\beta^{(n)} \in C^0(N(\mathfrak{U}^{(n)}), \mathscr{S})$ such that $\delta\beta^{(n)} = \sigma^{(n)}$ and $\|\beta^{(n)} - \beta^{(n-1)}\|_{\overline{W}_{n-2}} < 2^{-n}$. Choose $\beta^{(1)} = \alpha^{(1)}$. Suppose $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(n-1)}$ are chosen. Since $\delta\alpha^{(n)} = \delta\alpha^{(n-1)} = \delta\beta^{(n-1)}$ on $N(\mathfrak{U}^{(n-1)})$, $\alpha^{(n)} - \beta^{(n-1)}$ is a section of $\mathscr{S}$ on W_{n-1}. By the approximation theorem, theorem 11, there is thus a $\sigma \in H^0(W_n, \mathscr{S})$ such that

$$\|\sigma - (\alpha^{(n)} - \beta^{(n-1)})\|_{\overline{W}_{n-2}} < 2^{-n}.$$

Thus we can take $\beta^{(n)} = \alpha^{(n)} - \sigma$. Now $\lim_{n \geq k} \beta^{(n)}$ defines an element of $C^0(N(\mathfrak{U}^{(k)}), \mathscr{S})$, and clearly this limit is the same as the restriction to $N(\mathfrak{U}^{(k)})$ of $\lim_{n \geq m} \beta^{(n)}$ for any $m \geq k$. Thus $\lim \beta^{(n)} \in C^0(N(\mathfrak{U}), \mathscr{S})$, and $\delta(\lim_{n \geq k} \beta^{(n)}) = \lim \delta\beta^{(n)} = \sigma^{(k)}$ on $N(\mathfrak{U}^{(k)})$, for all k. Thus $\delta(\lim \beta^{(n)}) = \sigma$.

96

We have already shown that $\rho_1(\mathcal{S}('P)) = \mathcal{S}('P)\,|\,P_1$ is dense in $\mathcal{S}(P_1)$. Since σ is both surjective and continuous, it therefore follows that $\sigma\rho_1(\mathcal{S}('P)) = \mathcal{S}('P)\,|\,P$ is dense in $\mathcal{S}(P)$. $\square$

5. Exhaustions by Analytic Blocks are Stein Exhaustions. It is now relatively easy to prove the following essential result:

Theorem 5. *Every exhaustion $\{(P_\nu, \pi_\nu)\}_{\nu \geq 1}$ of a complex space X by analytic blocks is a Stein exhaustion of X.*

Proof: First, by Theorem 3.2, every set P_ν is a compact Stein set. On each module of sections $\mathcal{S}(P_\nu)$ we fix a good semi-norm $|\ \ |_\nu$. Then conditions b) and c) of Definition 1.6 are satisfied. Further we may assume that the restrictions $\mathcal{S}(P_{\nu+1}) \to \mathcal{S}(P_\nu)$ do not increase the semi-norms.

It remains to show that condition a) is also fulfilled (i.e. for every ν, $\mathcal{S}(X)\,|\,P_\nu$ is dense in $\mathcal{S}(P_\nu)$) and it is enough to verify this for $\nu := 1$. Thus let $s \in \mathcal{S}(P_1)$ and $\delta \in \mathbb{R}$ with $\delta > 0$ be given. We choose a sequence $\delta_i \in \mathbb{R}$, $\delta_i > 0$, with $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i < \delta$ and inductively determine by the Runge Theorem (Theorem 4) a sequence $s_i \in \mathcal{S}(P_i)$ with

$$s_1 := s \quad \text{and} \quad |s_{i+1}\,|\,P_i - s_i|_i < \delta_i, \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Then $(s_j\,|\,P_{i+1})_{j>i}$ is a Cauchy sequence in $\mathcal{S}(P_{i+1})$. By the Convergence Theorem (Theorem 3), the restricted sequence $(s_j\,|\,P_i)$ has a limit $t_i \in \mathcal{S}(P_i)$. Since all of the restriction maps $\mathcal{S}(P_{i+1}) \to \mathcal{S}(P_i)$ are bounded, $t_{i+1}\,|\,P_i$ is also the limit of the sequence $(s_j\,|\,P_i)$. The uniqueness part of Theorem 3 implies that $t_{i+1}\,|\,P_i^0 = t_i\,|\,P_i^0$. But the sets $\{P_\nu^0\}$ exhaust X. Thus the t_i's determine a global section $t \in \mathcal{S}(X)$ with $t|P_i = t_i$, $i \geq 1$. Since $|\ \ |_1 \leq |\ \ |_i$, the equation

$$t\,|\,P_1 - s = t_1 - s_j\,|\,P_1 + \sum_{i=1}^{j-1} (s_{i+1}\,|\,P_1 - s_i\,|\,P_1)$$

yields the estimate

$$|t\,|\,P_1 - s|_1 \leq |t_1 - s_j\,|\,P_1|_1 + \sum_{i=1}^{j-1} \delta_i.$$

Letting $j \to \infty$, $|t\,|\,P_1 - s|_1 < \delta$, and thus every section $s \in \mathcal{S}(P_1)$ can be approximated by global sections $t \in \mathcal{S}(X)$. $\square$

One can now combine Theorem 5 with Theorem 1.8 and Definition 3.8 and prove the main theorem of Stein theory:

G.-R. Stein Space

Fundamental Theorem. *Every holomorphically complete space $(X, \mathcal{O})$ is a Stein space. For every coherent analytic sheaf $\mathcal{S}$ on X, then holomorphic completeness implies the following:*

A) *The module of sections $\mathcal{S}(X)$ generates every stalk $\mathcal{S}_x$, $x \in X$, as an $\mathcal{O}_x$-module.*

B) *For all $q \geq 1$, $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$.*

Furthermore, the original axioms stated in Section 4 imply both A) *and* B).

Cartan's Theorem A
Cartan's Theorem B: $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$, $q \geq 1$

という言い方は、歴史を反映していないので、良くない。
一番難しく重要な $H^1(X, \mathcal{S}) = 0$ は、岡の定理である。

Oka-Cartan's Fundamental Theorem: $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$, $q \geq 1$.

Oka(-Cartan)'s Fundamental Theorem: $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$, $q \geq 1$.

実体としては、
Oka's Fundamental Theorem formulated by Cartan: $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$, $q \geq 1$.

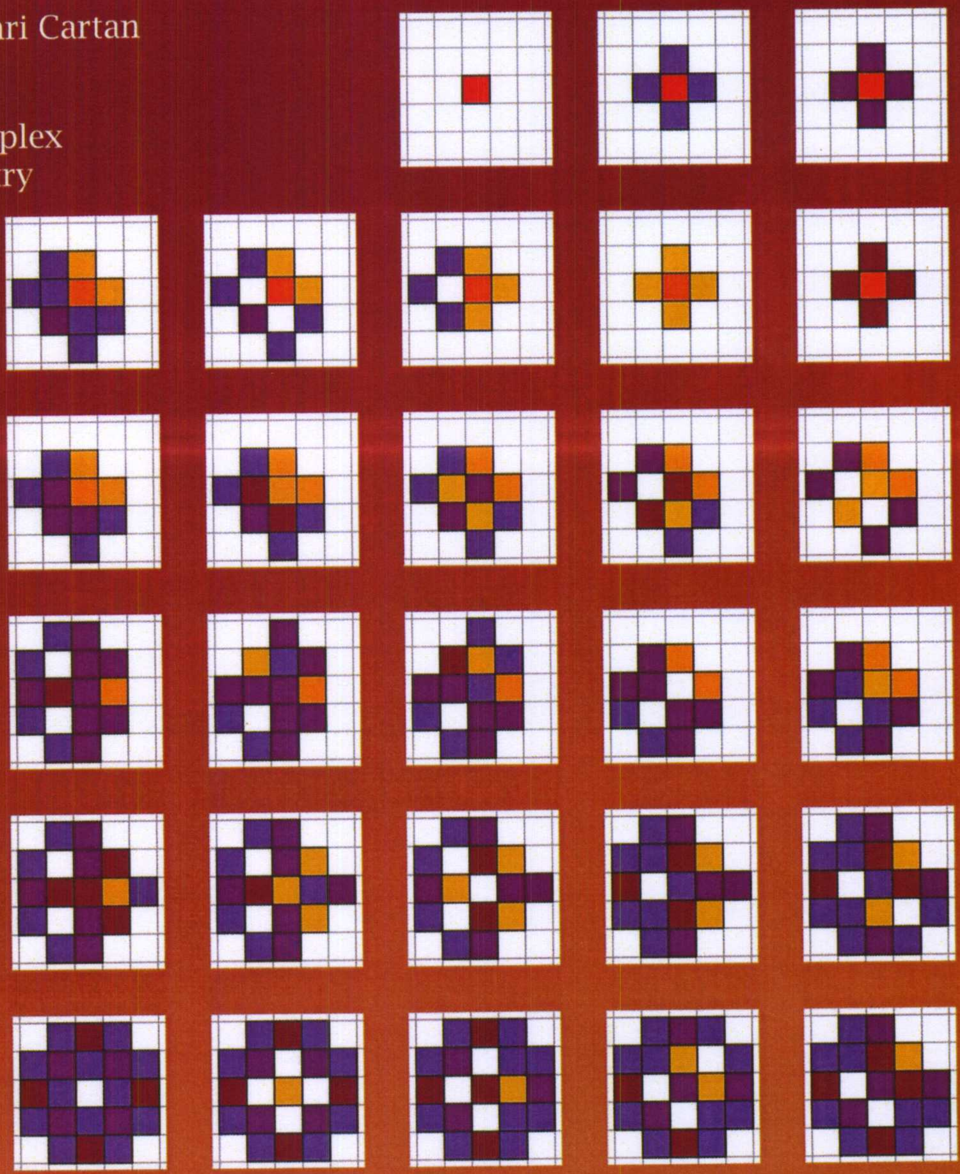
ISSN 0002-9920

Notices

of the American Mathematical Society

September 2010

Volume 57, Number 8



About the Cover: Sandpile
(see page 960)

99

A Tribute to Henri Cartan

This collection of articles paying tribute to the mathematician Henri Cartan was assembled and edited by Pierre Cartier, IHÉS, and Luc Illusie, Université Paris-Sud 11, in consultation with Jean-Pierre Serre, Collège de France. The collection begins with the present introductory article, which provides an overview of Cartan's work and a short contribution by Michael Atiyah. This overview is followed by three additional articles, each of which focuses on a particular aspect of Cartan's rich life.

—Steven G. Krantz

Jean-Pierre Serre

Henri Cartan
8 July 1904–13 August 2008

Henri Cartan was, for many of the younger generation, the symbol of the resurgence of French mathematics after World War II. He died in 2008 at the age of 104 years.

Personal Life

Henri was the eldest son of the mathematician Élie Cartan (1869–1951), born in Dolomieu (Isère), and of his wife Marie-Louise Bianconi, of Corsican origin.

Born in Nancy in 1904, he entered the École Normale Supérieure (ENS, 45 rue d'Ulm) in 1923. It was there that he forged the friendships with mathematicians who were to play a major role in his life, beginning with André Weil, who had entered the ENS a year before; others included Jean Dieudonné, Jean Delsarte, René de Possel, and Charles Ehresmann. He left the ENS in 1926, supported by a grant until the completion of his thesis in 1928, and briefly became a teacher at the Lycée Malherbe de Caen. He was then appointed to positions at the University of Lille and subsequently the University of Strasbourg, where he taught from 1931 to 1939. The year 1935 was a particular high point of both his professional and his personal life: with his friends Weil, Dieudonné, de Possel, and others, he founded the Bourbaki group, which he left only at the statutory age of fifty years; and he married the young and charming Nicole Weiss, daughter of one of his physics colleagues at Strasbourg University. This happy marriage, which lasted until his death (followed, a few months later, by that of his wife), produced five children: Jean, Françoise, Étienne, Mireille, and Suzanne.

In September 1939, at the beginning of the war, he moved to Clermont-Ferrand, where the University of Strasbourg had been evacuated. A year later he got a chair at the Sorbonne, where he was given the task of teaching the students of the ENS. This was a providential choice that allowed the "normaliens" (and many others) to benefit for more than twenty-five years (1940–1965) from his courses and seminars. In fact there was a two-year interruption when he returned to Strasbourg from 1945 to 1947—alas for me, because I was then a student at the ENS and could not make his acquaintance until my final year.

He left the ENS in 1965 and, a few years later, to escape the internal disputes between the component parts (Paris VI and Paris VII) of the former Sorbonne, he accepted a chair at Orsay, where he taught until his retirement in 1975. A lecture theatre in the mathematics building has recently been named after him.

Further details on the life of Henri Cartan can be found in two interviews (Schmidt 1990, Jackson 1999).

Mathematical Work

Henri Cartan worked on many subjects but there was one to which he was particularly attached, and that was the theory of functions of several complex variables (which later became the theory of complex varieties and also "analytic geometry"). I will begin with this topic.

His thesis ([Oe], no. 3)[1] dealt with analytic functions of one variable, one of the most popular topics of the period in France. Cartan continued the work of André Bloch and Rolf Nevanlinna,

This is a slightly edited version of the memoir that originally appeared in Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, *Volume 55 (2009), and it is published here with permission of the Royal Society.*

Jean-Pierre Serre is professor emeritus at the Collège de France. His email address is `serre@noos.fr`.

[1]*References in this form refer to the bibliography at the end of the text.*

100

studying in particular the properties of analytic curves in complex projective spaces of any dimension (for example, curves not meeting a given family of hyperplanes). This sort of topic was highly fashionable at the time, but it became less so in later years (despite the work of Lars Ahlfors and H. and J. Weyl). It finally came back into the limelight thanks to the work of Shoshichi Kobayashi on hyperbolic manifolds (1970–1980) (see Demailly 1997) and also to that of Paul Vojta (around 1980), who created an astonishing dictionary relating Nevanlinna invariants to the heights of rational points on algebraic varieties.

Shortly after writing his thesis, his eyes were opened, by Weil, to the charms of functions of several complex variables. Cartan was definitely seduced by this new field. Between 1930 and 1940 he published many articles in collaboration with the German school (Heinrich Behnke and Peter Thullen), with whom he made great bonds of friendship that withstood World War II. A summary can be found in [An], sections 2–5. In particular, we can note the following:

- the introduction in ([Oe], no. 23), with Thullen, of the notion of "convexity" relative to a family of holomorphic functions.

- the following result ([Oe], no. 32), related to the work of Élie Cartan: the group of automorphisms of a bounded domain in $\mathbf{C}^n$ is a real Lie group, and the subgroup that fixes a point is compact and embeds into $\mathbf{GL}(n,\mathbf{C})$.

Starting in 1940 it was the "Cousin problems" that attracted him most ([An], section 6). This involves the construction of functions whose local singularities (additive or multiplicative) are given. Is this possible, and if not what are the conditions that need to be met? The problem is reasonable only if one works in a domain of holomorphy, which is what Cartan assumes. He gets very close to his aim, thanks to a theorem on invertible holomorphic matrices ([Oe], no. 35), but he lacked two auxiliary results (which he later interpreted as statements of "coherence"). It was the Japanese mathematician K. Oka who proved the first of these two results. He published the proof and sent it to Cartan, who immediately saw how the same methods led at once to the second result ([Oe], nos. 36 and 38). The first Cousin problem was thereby solved, at least for domains of holomorphy. L OKA solved 36/37

The second Cousin problem, in contrast, does not always have a solution. There are obstructions of a topological nature: the problem should have continuous solutions (a minimal requirement if one is searching for holomorphic solutions). How can one concretely exhibit these obstructions and, moreover, show that there are no others? I suppose (I never thought of asking him) that this was one of the reasons[2] that led Cartan to become interested in algebraic topology around 1945–1950. There were some striking analogies—for those who could see them—between certain concepts introduced by Oka (the "ideals of indeterminate domains") and the theory of sheaves, which was being created by Jean Leray. In his first seminars at the ENS (1948–1951), Cartan took up Leray's theory in a slightly modified form that was easier to use. In a subsequent seminar (1951/1952) he reaped the fruits of his labors. He began by clarifying the notion of "coherence", implicit in Oka's work, defined "coherent analytic sheaves", and proved a vast generalization of the Cousin-type theorems: the famous "Theorems A and B".

Henri Cartan, at his home desk in Paris, 1961.

The stronger statement is "Theorem B", which says that the higher cohomology groups of a coherent analytic sheaf are zero; in other words that every reasonable problem (of additive type) has a solution (provided the underlying manifold is a "Stein manifold", the natural generalization of a domain of holomorphy).

Theorems A and B are very powerful tools. Cartan and I described several applications of them in a colloquium in Brussels in 1952; apparently these theorems made a strong impression on the participants because one of them (a German) said to his neighbor, "The French have tanks (Panzern); we only have bows and arrows" (see Remmert 1995). Indeed the idea of applying the (algebro-topological) theory of sheaves to objects relevant to analysis (holomorphic functions) was a new idea; it was used later in many other situations (for example, solutions of partial differential equations) and has now become standard.

Another original idea of Cartan (now equally standard) was that, developed in the 1953/1954 seminar, of defining a complex analytic space (possibly with singularities) as a topological space

[2] *Another reason may have been the translation by Weil of the Cousin problems in terms of holomorphic fiber bundles with additive structure group (for the first problem) and multiplicative structure group (for the second problem)—see ([Oe], no. 39, section 5).*

solved by OKA '39

101

Cartan's theorem suggested to him that it might be possible to classify bounded homogeneous domains in $\mathbb{C}^n$. He succeeded in doing this for $n = 2$ and $n = 3$, and he classified all bounded *symmetric* domains in $\mathbb{C}^n$ for $n \geq 4$. He found that all bounded homogeneous domains in $\mathbb{C}^2$ and $\mathbb{C}^3$ are symmetric and raised the question of whether this was true in general (without really expressing an opinion). We now know, thanks to the work of I. Piatetski-Shapiro, that, for $n \geq 4$, there exist bounded homogeneous domains in $\mathbb{C}^n$ which are not symmetric.

A Theorem on Holomorphic Matrices

As mentioned earlier, the work of Cartan and Oka transformed the study of global problems on Stein manifolds into an extensive theory with powerful tools. There are two major results that are crucial in this theory. One, due to Oka, is the coherence of the structure sheaf of $\mathbb{C}^n$. The other, chronologically the first, is a theorem on holomorphic matrices published by Cartan in 1940.

Let R be a closed rectangle, $a_k \leq Re z_k \leq b_k$, $c_k \leq Im\, z_k \leq d_k (k = 1, 2, \cdots, n, z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n)$. Let $R_1 = \{z \in R | Re z_1 \geq 0\}$, $R_2 = \{z \in R | Re z_1 \leq 0\}$ and set $R_0 = R_1 \cap R_2$. We assume that $R_0 \neq \emptyset$, and, as usual, denote by $GL(q, \mathbb{C})$ the group of invertible $q \times q$ matrices with entries in $\mathbb{C}$ ($q \geq 1$ being a given integer).

Cartan's theorem is as follows.

Let f_0 be a holomorphic map of a neighborhood of R_0 into $GL(q, \mathbb{C})$. Then, there exist holomorphic maps f_ν of neighborhoods of R_ν into $GL(q, \mathbb{C})$ $[\nu = 1, 2]$ such that $f_0 = f_1 \cdot f_2^{-1}$ on some neighborhood of R_0.

It is this result that makes it possible to pass from the local to the global in the theory of coherent analytic sheaves on Stein spaces.

It is natural to try to prove this result as an implicit function theorem by solving the linearized problem $h_1 - h_2 = h_0$ (in a neighborhood of R_0). Today, one does this by working with bounded holomorphic functions on open rectangles and an implicit function theorem in Banach spaces. Cartan deals directly with Fréchet spaces. The solution of the linearized problem (with bounds) involves shrinking the domain of definition of the functions h_ν. In general, implicit function theorems in Fréchet spaces involve the loss of some kind of smoothness at each stage of the iteration, and a smoothing operator is required to restore fast convergence (so-called Nash-Moser technique). Cartan's iteration scheme produces fast convergence without the need for a smoothing operator and compensates for the shrinking of the domain of definition.

Thus, as early as 1940, Cartan had recognized the use of fast convergence in studying iteration in Fréchet spaces.

I believe that Cartan's work and the standards of quality and precision in mathematics that he set have influenced most mathematicians in the second half of the twentieth century.

Yum-Tong Siu

Tribute to Henri Cartan from a Complex Analyst

Henri Cartan was an intellectual giant in the world of mathematics in the twentieth century. His fundamental contributions spanned a wide range of fields: complex variables, algebraic topology, potential theory, homological algebra, and many others. This tribute is from the point of view of a complex analyst and touches only the field of complex variables. Even within complex analysis the work of Henri Cartan is very broad. We choose here only two areas.

The first area is value distribution theory in which he wrote his thesis [2]. His thesis, though written so long ago, is still one of the most fundamental and most elegant results in value distribution theory in higher dimension. To the general mathematical community this result of his, being overshadowed by his many other achievements, is not as well known. In recent years, because of the parallelism with diophantine approximation pointed out by Vojta [18], value distribution theory has taken on a new dimension. Cartan's thesis is being highlighted here to make the general mathematical community aware of this very beautiful piece of work.

The second area is what is now known as the theory of Cartan and Oka concerning Stein manifolds. In his interview with Allyn Jackson in March 1999 [11], to the question posed by Jackson, "You have worked in many areas of mathematics. Do you feel equally at home in analysis, in algebra, in geometry...?" Cartan replied, "Geometry—not exactly geometry. Topology, I would say. But I could also see the relations between them. One day I discovered that topological notions, and in particular sheaf theory, could be applied to analytic functions of several variables. This was very important. One can use results from topology in order to get some important results for analytic functions. I think that is interesting." When Cartan recalled his wide-encompassing work in many fields of mathematics, this second area seems to occupy a special position.

As a way of paying tribute to one of the first-ranked mathematicians of the twentieth century, without going too much into the technical details we explain here his contributions to the two areas

---

Yum-Tong Siu is William Elwood Byerly Professor of Mathematics at Harvard University. His email address is `siu@math.harvard.edu`.

102

the condition that global holomorphic functions on it separate any pair of distinct points.

Cartan's seminal contribution is the incorporation of sheaf theory from topology into his work on complex variables to introduce the very important notion of a coherent sheaf [5, 6]. He finally crowned the success of his work in this direction by proving Theorems A and B for coherent sheaves on Stein manifolds [7]. Theorem B states that the cohomology group $H^p(X, \mathcal{F})$ of degree p over a Stein manifold X with coefficients in a coherent sheaf $\mathcal{F}$ over X vanishes if $p > 0$. Theorem A states that at every point P of X global sections of $\mathcal{F}$ generate $\mathcal{F}$ at P over the ring of holomorphic function germs on X at P.

On an open subset Ω of $\mathbb{C}^n$ a coherent sheaf is locally described as consisting of the set of all p-tuples of holomorphic function germs on Ω modulo those in the range of the homomorphism given by a $p \times q$ matrix of holomorphic functions on Ω. A global coherent sheaf on a complex manifold is obtained by piecing together locally defined coherent sheaves. In Theorem B the vanishing of $H^p(X, \mathcal{F})$, for example, when $p = 1$, means that, for an open cover $\{U_\alpha\}$ of X by Stein open subsets, local sections $f_{\alpha\beta}$ of $\mathcal{F}$ over $U_\alpha \cap U_\beta$ with $f_{\alpha\beta} = -f_{\beta\alpha}$ and $f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha} = 0$ on $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ can be expressed as $f_{\alpha\beta} = f_\beta - f_\alpha$ with f_α being a section of $\mathcal{F}$ over U_α. The case of $\mathcal{F}$ being the sheaf of holomorphic function germs of X and $f_{\alpha\beta}$ being the difference of the locally given meromorphic function F_α on U_α and the one on U_β would solve immediately the additive first Cousin problem with the global meromorphic function given by $F_\alpha - f_\alpha$ on U_α.

One crucial ingredient in the proofs of Theorems A and B is the following important gluing lemma of Cartan [4]. Denote by $R_{a,b;c,d}$ the rectangle in $\mathbb{C}$ with coordinate $z = x + \sqrt{-1}\, y$ defined by $a < x < b$ and $c < y < d$. When $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$, let $D_j = R_{a_j,b_j;c,d} \times G$ for some polydisk G and $D = D_1 \cap D_2$. Cartan's gluing lemma enables him to write a nonsingular matrix A of holomorphic functions given on the topological closure $\overline{D}$ of D as the product $A_1 A_2$ on D, where A_j is a nonsingular matrix of holomorphic functions on D_j.

Oka [13, 14] contributed to Cartan's program by proving the existence of local "pseudobases" for the kernel defined by a $p \times q$ matrix A of holomorphic functions on a domain Ω in $\mathbb{C}^n$. It means that any point P of Ω admits some open neighborhood U and a finite number of q-tuples $f_1, \cdots, f_k$ of holomorphic functions on U with $Af_j \equiv 0$ for $1 \le j \le k$ such that any q-tuple g of holomorphic function germs at any point Q of U with $Ag \equiv 0$ can be written as $\sum_{j=1}^k h_j f_j$ for some holomorphic function germs $h_1, \cdots, h_k$ at Q. Oka also showed that, for the common zero-set V of a finite number of local holomorphic functions, similar local "pseudobases" exist for the ideal of function germs defined by their restrictions to V being identically zero.

Serre [17] later transported the theory of coherent sheaves to algebraic geometry. It has since become a very powerful indispensable tool in algebraic geometry.

In the early 1970s I had the good fortune of meeting Cartan in person on two occasions when I was at a relatively early stage of my career. One occasion was when I gave a talk in a seminar in the École Normale Supérieure and had dinner with him and a couple of other mathematicians afterward. Another occasion was at a big party he hosted in his house on Boulevard Jourdan. He was very kind, caring, warm, and inspiring. I still vividly remember how in mathematical discussions he chose very thoughtful and insightful questions posed with an encouraging tone to point to thought-provoking new ideas and directions.

As time goes by with further involvement in complex analysis on my part, my admiration for Cartan's work is ever elevated to higher planes. Even after eighty years of value distribution theory in higher dimension, his thesis is still being used as a starting point in lectures given in conferences on the subject. Both the result and the presentation of his thesis are so very elegant and natural.

As for the theory of Cartan and Oka, it will always be a shining gem in the crown of mathematics.

References

[1] Lars V. Ahlfors, The theory of meromorphic curves, *Acta Soc. Sci. Fennicae*, Nova Ser. A. **3** (1941), no. 4, 31 pp.

[2] Henri Cartan, Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **45** (1928), 255–346.

[3] ———, Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes, *Bull. Soc. Math. France* **59** (1931), 46–69.

[4] ———, Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, *J. Math. Pures Appl.* **19** (1940), 1–26.

[5] ———, Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **61** (1944). 149–197.

[6] ———, Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, *Bull. Soc. Math. France* **78** (1950), 29–64.

[7] ———, Faisceaux analytiques sur les variétés de Stein: Démonstration des théorèmes fondamentaux, *Séminaire Henri Cartan*, tome **4** (1951/1952), exp. no. 19, pp. 1–15.

[8] Henri Cartan and Peter Thullen, Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen, *Math. Ann.* **106** (1932), no. 1, 617–647.

[9] Pierre Cousin, Sur les fonctions de n variables complexes, *Acta Math.* **19** (1895), no. 1, 1–61.

[10] Fritz Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch

103

Part III
岡の連接定理を学部４年生に教えたい

岡の連接定理（第１連接定理)。
基本定理（正則凸領域・正則領域)。

§2. 岡の連接定理と基本定理

岡・カルタン理論の学部授業としての位置づけ

（3 回生後半）4 回生向け講義［**半年講義**］：

- 実解析：ルベーグ積分論・フーリエ解析 —— 関数解析・偏微分方程式論の基礎。
- 複素解析：岡の連接定理と基本定理 —— （1 変数・多変数）複素解析・微分方程式論・佐藤超関数論・複素幾何・複素多様体論・代数幾何。

半年講義でできる新方式。

岡の連接定理から始める。

第１章　正則関数

1. １変数正則関数
2. 多変数正則関数
3. 層の定義

第２章　岡の第一連接定理

1. ワイエルストラスの予備定理
2. 正則局所環 $\mathcal{O}_{\Omega,a}$
3. 岡の第一連接定理

第３章　層のコホモロジー

1. チェック コホモロジー
2. ルレイの被覆定理
3. ド・ラーム コホモロジー
4. ドルボー コホモロジー
5. 複素多様体、解析的部分集合

第４章　正則凸領域上の基本定理

1. 正則凸領域
2. カルタンの融合定理
3. 正則凸領域上の基本定理（岡・カルタン理論）
4. クザン I 問題（岡の元祖基本定理）、クザン II 問題（岡の原理）

―― ここまでで、半年。

§1　1変数複素解析（関数論）の授業：

1. 共通事項として、概ね留数定理まではやる。
   ［2 回生後半講義・演習;　半年講義］—— 共通
   理工学的応用：電磁気学など。
2. 正則写像（等角写像）・リーマンの写像定理。
   理工学的応用：流体力学（今井功氏の著作など)。
3. Mittag-Leffler, Weierstrass (Runge) の定理。
   理工学的応用：サンプリング・補間問題（Whittaker の式など）
4. 楕円関数論（二重周期有理型関数)。［以上 3 回生前半］
   理工学的応用：振り子の力学・天体力学（萩原雄祐氏の著作など）——　［更に半年]。

ご静聴ありがとうございました。