有限平坦モデルのモジュライ空間について

今井 直毅*

東京大学大学院数理科学研究科

概要

本稿では，p 進体の Galois 表現の有限平坦モデルのモジュライ空間について説明し，そのモジュライの連結成分に関する Kisin 予想，及び p 進体の分岐とモジュライの間の関係について解説する．

0　はじめに

有限体上有限次元である p 進 Galois 表現の有限平坦モデルとは，p 進体上の群スキームと与えられた Galois 表現の間の同型とその群スキームを一般ファイバーに持つような p 進体の整数環上の有限平坦群スキームの組のことである．Galois 表現の有限平坦モデルのモジュライは変形環の研究において Kisin 氏によって導入された．Kisin 氏は有限平坦モデルのモジュライの連結成分を調べることで，変形環の情報が得られることを見出し，このモジュライの連結成分の関してある予想を述べた．この予想は，p 進体が完全分岐である場合には Kisin 氏本人によって証明がなされており，p 進体が一般で Galois 表現が自明表現の場合には Gee 氏によって，p 進体も Galois 表現も一般の場合は筆者によって証明された．本稿では，まずこの予想について解説する．

また，この有限平坦モデルのモジュライの大きさがどうなっているかというのは自然な問題である．本稿では，p 進体の分岐と有限平坦モデルのモジュライの次元の間の関係についても解説する．

謝辞

本稿は，第 6 回城崎新人セミナーにおける筆者の講演に基づいている．セミナーを企画して下さった運営委員の方々に感謝する．また筆者をセミナーに誘って下さった，長尾健太郎さん，森伸吾さんに感謝の意を表したいと思う．

記法

本稿では以下の記法を用いる．p は 3 以上の素数とする．一般に，環 R に対して，p に関する R 上の Witt ベクトルの環を $W(R)$ で表し，局所環 R に対して，その極大イデアルを $\mathfrak{m}_R$ で表す．k は $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大とし，その拡大次数を n とおく．$W = W(k)$，$K_0 = W[1/p]$ とおく．K は K_0 の有限次完全分岐拡大とし，その拡大次数を e とする．K の整数環を $\mathcal{O}_K$ で表し，$\mathcal{O}_K$ の素元 π を固定する．K の代数的閉包 $\overline{K}$ を固定し，K の絶対 Galois 群を G_K で表す．位相空間 X に対して，X の連結成分の集合を $\pi_0(X)$ で表す．

1　変形環と有限平坦モデルのモジュライ

この節では，変形環と有限平坦モデルのモジュライの関係について説明し，そのモジュライの連結成分に関する Kisin 予想を述べる．

* naoki@ms.u-tokyo.ac.jp

まず変形環について説明する．$V_{\mathbb{F}}$ を $\mathbb{F}$ 上の 2 次元連続 G_K 表現とし，その $\mathbb{F}$ 上の基底を一つ固定しておく．有限環上の G_K 表現は，$\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦群スキームの一般ファイバーと G_K 加群として同型である時，平坦であるという．以下 $V_{\mathbb{F}}$ は平坦であると仮定する．

$\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ を剰余体が $\mathbb{F}$ である Artin 局所有限 $W(\mathbb{F})$ 代数 A の圏とする．このとき $V_{\mathbb{F}}$ の $\mathfrak{AR}_{W(\mathbb{F})}$ 上の枠付き平坦変形は，完備局所 $W(\mathbb{F})$ 代数 $R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ で表現される．ここで枠付き変形とは基底の情報込みでの変形のことで，平坦変形とは表現として平坦である変形のことである．

次に p 進 Hodge 型が $\mathbf{v}$ がすべて 1 であるという条件で定まる変形環 $R^{\mathrm{fl},\square,\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}$ を定義する．$\bigl(R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]\bigr)^{\mathbf{v}}$ を次のような条件をみたす連結成分 $\mathrm{Spec}\bigl(R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]\bigr)^{\mathbf{v}} \subset \mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ によって定まる環とする．

> $\mathrm{Spec}\bigl(R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]\bigr)^{\mathbf{v}}$ の閉点全体は，$\mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ の閉点 ξ のうち，ξ に対応する変形 V_ξ に対し $\mathrm{Fil}^0\, D_{\mathrm{crys}}\bigl(V_\xi[1/p]\bigr)_K$ が $k(\xi) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ 上階数 1 の自由加群になるような点全体である．ただし，ここで $k(\xi)$ は ξ の剰余体を表している．

平坦変形を考えていたことの帰結として，$V_\xi[1/p]$ は Barsotti-Tate 表現になっている．$R^{\mathrm{fl},\square,\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}$ を $R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}$ の $\bigl(R^{\mathrm{fl},\square}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]\bigr)^{\mathbf{v}}$ における像として定義する．

$\mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{fl},\square,\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ の連結成分の情報は，変形環と Hecke 環を比較する R=T 型の定理の証明において重要になる ([Kis, Theorem 3.4.11], [Im1, Theorem 3.1])．

次に有限平坦モデルのモジュライについて説明する．$V_{\mathbb{F}}$ の有限平坦モデルとは，$\mathbb{F}$ ベクトル空間の構造を持つような $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦群スキーム $\mathcal{G}$ と $\mathbb{F}[G_K]$ 加群としての同型 $V_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(\overline{K})$ の組のことをいう．このとき $\mathbb{F}$ 上射影的なスキーム $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ で次の命題を満たすものが構成できる．

命題 1.1. [Kis, Corollary 2.1.13] $\mathbb{F}$ の任意の有限次拡大体 $\mathbb{F}'$ に対して，$V_{\mathbb{F}'} = V_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'$ の有限平坦モデルの同型類の集合と $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F}')$ の間に自然な全単射がある．

さらに p 進 Hodge 型が全て 1 であるという条件で定まる $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ の連結成分 $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ を考える．ここで $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ の点に対する p 進 Hodge 型が全て 1 であるという条件の定義は与えないが，次の節で $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ の ϕ 加群による記述を与える．

上で説明した変形環と有限平坦モデルのモジュライには次のような関係がある．

命題 1.2. [Kis, Corollary 2.4.10] 自然な全単射

$$\pi_0(\mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{fl},\square,\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]) \cong \pi_0(\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0})$$

が存在する．

この命題によって $\mathrm{Spec}\, R^{\mathrm{fl},\square,\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}}}[1/p]$ の連結成分を調べることは，$\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ の連結成分を調べることに帰着される．

$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}_{V_{\mathbb{F}},0} \subset \mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ を対応する群スキームが通常であるような点全体のなす連結成分とする．$\pi_0(\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}_{V_{\mathbb{F}},0})$ は次のようになることが比較的容易にわかる．

命題 1.3. [Kis, Proposition 2.5.15] $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}_{V_{\mathbb{F}},0} \neq \emptyset$ とする．このとき，$V_{\mathbb{F}} \sim \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$ となる不分岐指標 χ_1, χ_2 が存在しなければ，$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ は 1 点である．もしそのような不分岐指標 χ_1, χ_2 が存在するならば，$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ は次のようになる．

1. $\chi_1 \neq \chi_2$ ならば，$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ は 2 点になる．
2. $\chi_1 = \chi_2$ ならば，$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ は $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ になる．

次に通常でない部分を考える．

$$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{non\text{-}ord}}_{V_{\mathbb{F}},0} = \mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0} \setminus \mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$$

とおく．このとき $\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{non\text{-}ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ が連結になるというのが Kisin 予想である．

2 Galois 表現と ϕ 加群

この節では Galois 表現と ϕ 加群の関係について述べる．$\mathfrak{S} = W(k)[[u]]$ とおき, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ を $\mathfrak{S}[1/u]$ の p 進完備化とする．ϕ の $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F} \cong k((u)) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$ への作用を $k((u))$ への p 乗写像から定まるものとする．$\Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}}$ を有限 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}$ 加群 M と誘導する線型写像 $\phi^* M \to M$ が全単射であるような ϕ 半線型写像 $\phi : M \to M$ の組のなす圏とする．

$m \geq 1$ に対して $\pi_m \in \overline{K}$ を $\pi_1^p = \pi$，$\pi_{m+1}^p = \pi_m$ となるようにとり，$K_\infty = \bigcup_{m \geq 1} K(\pi_m)$ とおく．$\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}}(G_{K_\infty})$ を $\mathbb{F}$ 上の有限次元連続 G_{K_∞} 表現のなす圏とする．

このとき関手

$$T : \Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}}(G_{K_\infty});\ M \mapsto \left(\overline{k((u))} \otimes_{k((u))} M\right)^{\phi=1}$$

はアーベル圏の圏同値を与える．この圏同値で G_{K_∞} 表現 $V_{\mathbb{F}}(-1)$ に対応する $M_{\mathbb{F}} \in \Phi\mathrm{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}}$ をとる．ここで，(-1) は Tate 捻りの逆を表している．

以下では $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}$ と仮定する．$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\mathrm{non\text{-}ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ が連結であることを示す時には，$\mathbb{F}$ を拡大してから示せば十分なので，この仮定は問題にならない．埋め込み $k \hookrightarrow \mathbb{F}$ を固定する．同型

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F} \cong k((u)) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(k/\mathbb{F}_p)} \mathbb{F}((u))\ ;\ \left(\sum a_i u^i\right) \otimes b \mapsto \left(\sum \sigma(a_i) b u^i\right)_\sigma$$

を考え, $\epsilon_\sigma \in k((u)) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$ を σ に対応する冪等元とする．$\sigma_{i+1} = \sigma_i \circ \phi^{-1}$ となるような $\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \mathrm{Gal}(k/\mathbb{F}_p)$ をとる．ここで ϕ は p 乗 Frobenius として考えており，また $\sigma_{n+i} = \sigma_i$ とみなしている．以下でもしばしば, n を法として添え字を考える．すると $\phi(\epsilon_{\sigma_i}) = \epsilon_{\sigma_{i+1}}$ となるので，$\phi : M_{\mathbb{F}} \to M_{\mathbb{F}}$ は $\phi : \epsilon_{\sigma_i} M_{\mathbb{F}} \to \epsilon_{\sigma_{i+1}} M_{\mathbb{F}}$ を定める．$(A_i)_{1 \leq i \leq n} \in GL_2\big(\mathbb{F}((u))\big)^n$ に対し，$\phi\begin{pmatrix} e_1^i \\ e_2^i \end{pmatrix} = A_i \begin{pmatrix} e_1^{i+1} \\ e_2^{i+1} \end{pmatrix}$ となるような $\epsilon_{\sigma_i} M_{\mathbb{F}}$ の $\mathbb{F}((u))$ 上の基底 $\{e_1^i, e_2^i\}$ があるとき

$$M_{\mathbb{F}} \sim (A_1, A_2, \ldots, A_n) = (A_i)_i$$

と書くことにする．部分格子 $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}} \subset M_{\mathbb{F}}$ に対しても同様の記法を使うことにする．この節で部分格子といえば, $\mathfrak{S} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}$ 加群になっているものを指すことにする．

部分格子 $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}} \subset M_{\mathbb{F}}$ とその基底 $\{e_1^i, e_2^i\}_{1 \leq i \leq n}$ と

$$B = (B_i)_{1 \leq i \leq n} \in GL_2\big(\mathbb{F}((u))\big)^n$$

に対して，$\left\langle B_i \begin{pmatrix} e_1^i \\ e_2^i \end{pmatrix} \right\rangle$ の成分を基底とする加群を $B \cdot \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ で表す．$B \cdot \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ は $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ の基底の選び方によっていることに注意.

このとき $\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ の点は ϕ 加群を用いて次のように記述される．

補題 2.1. $\mathbb{F}'$ を $\mathbb{F}$ の有限次拡大体とすると，$\mathscr{GR}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F}')$ の元は，以下の条件をみたすような階数 2 の自由 $k[[u]] \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}'$ 部分加群 $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'} \subset M_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'$ と自然に対応する．

1. $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'}$ は ϕ の作用で安定である．
2. $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'}$ の $k[[u]] \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}'$ 上のある基底と，各 $\sigma \in \mathrm{Gal}(k/\mathbb{F}_p)$ に対して，射

$$\phi : \epsilon_\sigma \mathfrak{M}_{\mathbb{F}'} \to \epsilon_{\sigma \circ \phi^{-1}} \mathfrak{M}_{\mathbb{F}'}$$

の行列式はある $\alpha \in \mathbb{F}'[[u]]^\times$ に対して αu^e となる．

3 Kisin 予想

この節では Kisin 予想の証明の概略について説明する．証明において $M_{\mathbb{F}}$ の構造に関する次の補題が必要となる．

補題 3.1. $V_{\mathbb{F}}$ が絶対既約であるとする．$\mathbb{F}'$ が $\mathbb{F}$ の 2 次拡大ならば，ある $\alpha_i \in (\mathbb{F}')^{\times}$ と $(q+1) \nmid s$ となるようなある正の整数 s に対して

$$M_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}' \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 u^s & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha_n & 0 \\ 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \right)$$

となる．

$\mathscr{G}\mathscr{R}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ が連結であることは，任意に取った 2 点をいくつかの $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ をつなげて結ぶことによって示される．$\mathscr{G}\mathscr{R}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ 上の 2 点を $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ で結ぶ際には次の補題を用いる．

補題 3.2. $x_1, x_2 \in \mathscr{G}\mathscr{R}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F})$ をとり，それぞれに対応する $(\mathrm{Mod}/\mathfrak{S})_{\mathbb{F}}$ の対象 $\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}, \mathfrak{M}_{2,\mathbb{F}}$ とする．$M_2\big(\mathbb{F}((u))\big)^n$ のある冪零元 $N = (N_i)_{1 \leq i \leq n}$ に対して $\mathfrak{M}_{2,\mathbb{F}} = (1+N) \cdot \mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}$ となるとする．$A = (A_i)_{1 \leq i \leq n}$ を $GL_2\big(\mathbb{F}((u))\big)^n$ の元で $\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}} \sim A$ となるようなものとする．もし全ての i に対し $\phi(N_i) A_i N_{i+1} \in M_2\big(\mathbb{F}[[u]]\big)$ となるならば，射 $\mathbb{P}^1 \to \mathscr{G}\mathscr{R}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ で，0 を x_1 に送り，1 を x_2 に送るものが存在する．

証明. $\mathscr{G}\mathscr{R}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ の点の $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ の変数 t による媒介変数表示を

$$t \mapsto (1+tN) \cdot \mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}$$

によって与える．条件 $\phi(N_i) A_i N_{i+1} \in M_2\big(\mathbb{F}[[u]]\big)$ により，この媒介変数表示が $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ からの射を与えることがわかる．$\mathscr{G}\mathscr{R}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ は $\mathbb{F}$ 上固有なので，この射は $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ 上に延びる． □

定理 3.3. $\mathscr{G}\mathscr{R}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}$ は連結である．

証明. $n=1$ の場合は [Kis]，$n \geq 2$ の場合は [Im1] を参照．ここでは $n \geq 2$ で $V_{\mathbb{F}}$ が絶対既約である場合の証明の概略を説明する．

$\mathbb{F}$ の有限次拡大体 $\mathbb{F}'$ と $x_1, x_2 \in \mathscr{G}\mathscr{R}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F}')$ をとり，それぞれに対応する $(\mathrm{Mod}/\mathfrak{S})_{\mathbb{F}'}$ の対象を $\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}'}, \mathfrak{M}_{2,\mathbb{F}'}$ とする．x_1 と x_2 が同じ連結成分の点であることを示せばよい．$V_{\mathbb{F}}$ を $V_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'$ で置き換えることによって $\mathbb{F} = \mathbb{F}'$ としてよい．$e < p-1$ の時は [Ray, Theorem 3.3.3] より $\mathscr{G}\mathscr{R}^{\mathbf{v}}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F}')$ は 1 点なので，$e \geq p-1$ としてよい．

まず，補題 3.1 を用いることによって，$s_i + t_i = e$ を満たすような $0 \leq s_i, t_i \leq e$ と $\alpha_i \in \mathbb{F}^{\times}$ に対して

$$M_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}' \sim \left(\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & u^{s_1} \\ u^{t_1} & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 \begin{pmatrix} u^{s_2} & 0 \\ 0 & u^{t_2} \end{pmatrix}, \dots, \alpha_n \begin{pmatrix} u^{s_n} & 0 \\ 0 & u^{t_n} \end{pmatrix} \right)$$

となるような $M_{\mathbb{F}}$ の基底を見つけることができる．ただし，ここで必要なら $\mathbb{F}$ を 2 次拡大で取り替える．この基底によって定まる部分格子を $\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ とおく．$\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ は $\mathscr{G}\mathscr{R}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F})$ の点に対応している．

以下では，$\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ と $\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}$ がいくつかの $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ をつなげて結べることを示す．$\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ と $\mathfrak{M}_{2,\mathbb{F}}$ についても同様に示される．

岩澤分解と行列式の条件を用いて，$\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}} = B \cdot \mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ となる $B = (B_i)_{1 \leq i \leq n} \in GL_2\big(\mathbb{F}((u))\big)^n$ で $B_i =$

$\begin{pmatrix} u^{-a_i} & v_i \\ 0 & u^{a_i} \end{pmatrix}$ の形のものが取れる．ただし $a_i \in \mathbb{Z}$, $v_i \in \mathbb{F}((u))$ である．$r_i = v_u(v_i)$ とおく．計算すると

$$\phi(B_1)\begin{pmatrix} 0 & u^{s_1} \\ u^{t_1} & 0 \end{pmatrix} B_2^{-1} = \begin{pmatrix} \phi(v_1)u^{t_1+a_2} & u^{s_1-pa_1-a_2} - \phi(v_1)v_2u^{t_1} \\ u^{t_1+pa_1+a_2} & -v_2u^{t_1+pa_1} \end{pmatrix},$$
$$\phi(B_i)\begin{pmatrix} u^{s_i} & 0 \\ 0 & u^{t_i} \end{pmatrix} B_{i+1}^{-1} = \begin{pmatrix} u^{s_i-pa_i+a_{i+1}} & \phi(v_i)u^{t_i-a_{i+1}} - v_{i+1}u^{s_i-pa_i} \\ 0 & u^{t_i+pa_i-a_{i+1}} \end{pmatrix}$$

となる．ただし $2 \le i \le n$．部分格子 $\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}$ は ϕ の作用で安定なので，右辺の行列の成分は全て $\mathbb{F}[[u]]$ に入る．

まず $t_1 + pa_1 + a_2 \le e$ となる場合を考える．このときは

$$\mathfrak{M}_{3,\mathbb{F}} = \left(\begin{pmatrix} u^{-a_i} & 0 \\ 0 & u^{a_i} \end{pmatrix}\right)_i \cdot \mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$$

とおくと，$\mathfrak{M}_{3,\mathbb{F}}$ は ϕ の作用で安定となり，$\mathscr{GR}^{\mathbf{v},\text{non-ord}}_{V_{\mathbb{F}},0}(\mathbb{F})$ の点を定める．すると

$$\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}} = \left(\begin{pmatrix} 1 & v_iu^{-a_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)_i \cdot \mathfrak{M}_{3,\mathbb{F}}$$

となるので，$\mathfrak{M}_{1,\mathbb{F}}$ と $\mathfrak{M}_{3,\mathbb{F}}$ が $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ で結べることが，補題 3.2 からわかる．さらに $\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ と $\mathfrak{M}_{3,\mathbb{F}}$ がいくつかの $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ をつなげて結べることも，比較的容易にわかる．

あとは，$t_1 + pa_1 + a_2 > e$ となる場合を，$t_1 + pa_1 + a_2 \le e$ となる場合に帰着すればよい．次のような操作を考える．

$B \cdot \mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ の ϕ 安定性を保ったまま，ある i に関して，a_i を $a_i - 1$ に，v_i を uv_i に取り替える．

この操作を行ったあとの点は，操作を行う前の点と $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}}$ で結べることが補題 3.2 からわかる．よってこの操作を行った後の $B \cdot \mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ と $\mathfrak{M}_{0,\mathbb{F}}$ について主張を示せばよい．

これらの操作を続けることができれば，$t_1 + pa_1 + a_2 \le e$ となる場合に帰着できることがわかる．よって全ての i について，上記の操作ができないようになって，かつ $t_1 + pa_1 + a_2 > e$ であると仮定する．この仮定から，初等的な議論によって，B の可能性を絞り込み，矛盾を導くことができる．これによって証明が完了する． □

4 p 進体の分岐と有限平坦モデルのモジュライ

この節では有限平坦モデルのモジュライの大きさと p 進体の分岐の関係について述べる．有限平坦モデルと p 進体の分岐の間の関係としては，Raynaud による次の古典的な結果がある．

定理 4.1. [Ray, Theorem 3.3.3] $e < p - 1$ ならば，$V_{\mathbb{F}}$ の有限平坦モデルは唯一つである．

Raynaud の結果は，有限平坦モデルのモジュライの言葉で言うと，$e < p - 1$ ならば $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ が 0 次元かつ連結であることを意味している．分岐が一般の場合には，有限平坦モデルのモジュライの次元と分岐の間に次のような関係がある．

定理 4.2. [Im2, Theorem 2.5] $n = 1$ ならば

$$0 \le \dim \mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0} \le \left[\frac{e+2}{p+1}\right]$$

となり，$n \ge 2$ ならば

$$0 \le \dim \mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0} \le \left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{e}{p+1}\right] + \left[\frac{n-2}{2}\right]\left[\frac{e+1}{p+1}\right] + \left[\frac{e+2}{p+1}\right]$$

となる．ただし $x \in \mathbb{R}$ に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数とする．

さらに，任意の p 進数 K に対して上に出てきた不等号はどれも等号になりうる．

この定理において $e < p-1$ とすると，$\dim \mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0} = 0$ となることがわかる．つまりこの定理は 2 次元表現に対して，Raynaud の結果の次元に関する一般化を与えている．また $e \geq p-1$ の場合，連結性は一般には全く成り立たない．

定理の証明は次のようにして行われる．まず $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ をいくつかの部分スキームに分け，一つ一つの部分スキームが有理点レベルで $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{d}$，$\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{(d-1)} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{F}}$，$\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{(d-2)} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{F}}^{2}$ のいずれかと同型になることを示す．次に一つ一つの部分スキームについて，上に出てくる d を具体的に求める．最後に全ての部分スキームを考えた時の d の最大値を求める．d はある連立不等式の整数解の個数を用いて表示されるため，この解の個数を評価する部分が主要な部分となる．証明から，$\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ のゼータ関数がどのような形になるかも決定される．

また，K が $\mathbb{Q}_p$ 上完全分岐で $V_{\mathbb{F}}$ が自明表現の場合に $\mathscr{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}$ のゼータ関数を具体的に計算することによって，階数 2 の定数群スキームに対して $\mathcal{O}_K$ 上のモデルの個数を絶対分岐指数 e を用いて表すことができる ([Im3, Theorem 2.1])．

参考文献

[Gee] T. Gee, *A modularity lifting theorem for weight two Hilbert modular forms*, Math. Res. Lett. **13** (2006), no. 5, 805–811.

[Im1] N. Imai, *On the connected components of moduli spaces of finite flat models*, arXiv:0801.1948, to appear in Amer. J. of Math.

[Im2] N. Imai, *Ramification and moduli spaces of finite flat models*, arXiv:0811.3219.

[Im3] N. Imai, *Extensions of Raynaud schemes with trivial generic fibers*, arXiv:0812.0490.

[Kis] M. Kisin, *Moduli of finite flat group schemes, and modularity*, to appear in Ann. of Math.

[Ray] M. Raynaud, *Schémas en groupes de type* $(p, \ldots, p)$, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 241–280.