平成１６年１１月１０日，１７日，（２４日）　数理・情報一般

でたらめの法則 —— 極限定理 ——

吉 田 朋 広 (東京大学大学院数理科学研究科)
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~ nakahiro/hp-naka

1　確率変数の分布

確率変数 (random variable): その値がいくつになるかが確率的に定まる量

例.

- さいころを投げたときにでる目の数
- 電車で隣に座った人の誕生日
- 来週この講義に出席する人の数
- 一ヶ月先の平均株価
- 来年８月の晴の日数

2 確率変数の分布

X: サイコロを投げたときにでる目の数（確率変数）
$\Rightarrow$

$X = 1$ となる確率 $= 1/6$,

$X = 2$ となる確率 $= 1/6$,

$X = 3$ となる確率 $= 1/6$,

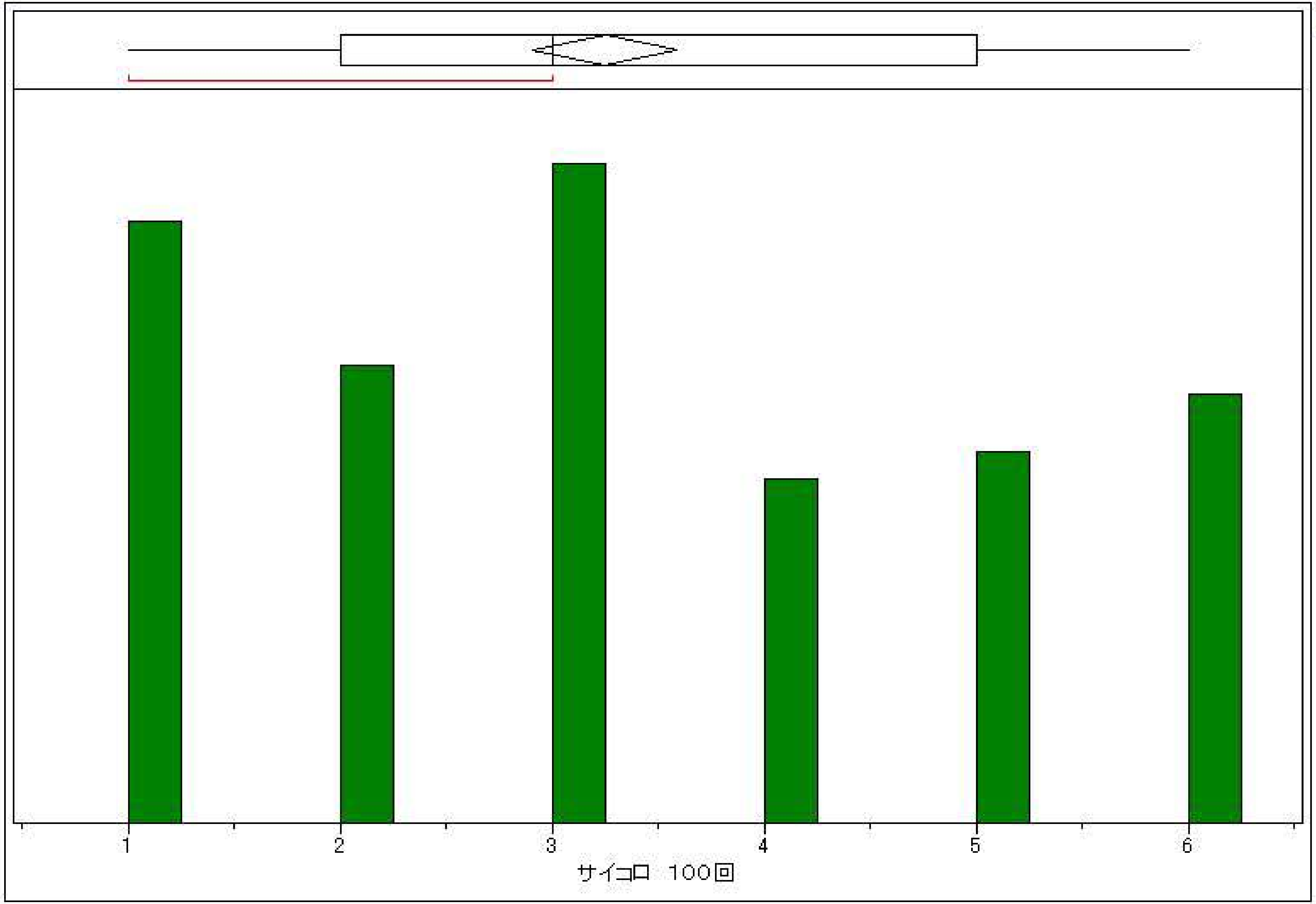
$X = 4$ となる確率 $= 1/6$,

$X = 5$ となる確率 $= 1/6$,

$X = 6$ となる確率 $= 1/6$. （先験的分布）

この事実を経験的に確かめる $\cdots$ モンテカルロ実験

列1



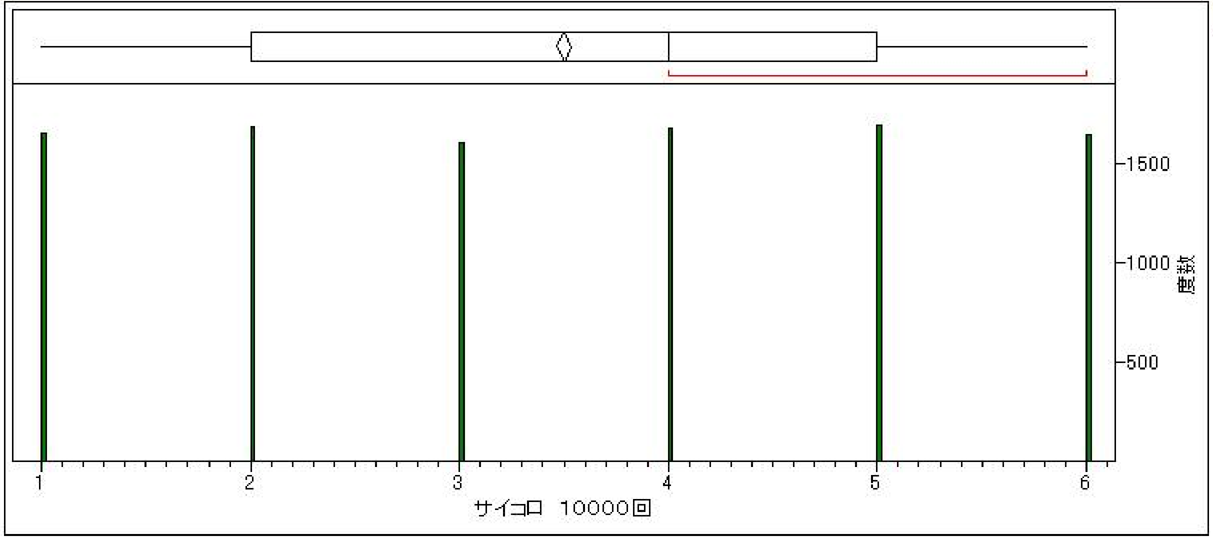
分位点

100.0%	最大値	6.0000
99.5%		6.0000
97.5%		6.0000
90.0%		6.0000
75.0%	4分位点	5.0000
50.0%	中央値(メディアン)	3.0000
25.0%	4分位点	2.0000
10.0%		1.0000
2.5%		1.0000
0.5%		1.0000
0.0%	最小値	1.0000

モーメント

平均	3.25
標準偏差	1.7196135
平均の標準誤差	0.1719614
平均の上側95%信頼限界	3.5912086
平均の下側95%信頼限界	2.9087914
N	100

列1



分位点

100.0%	最大値	6.0000
99.5%		6.0000
97.5%		6.0000
90.0%		6.0000
75.0%	4分位点	5.0000
50.0%	中央値(メディアン)	4.0000
25.0%	4分位点	2.0000
10.0%		1.0000
2.5%		1.0000
0.5%		1.0000
0.0%	最小値	1.0000

モーメント

平均	3.5026
標準偏差	1.7069518
平均の標準誤差	0.0170695
平均の上側95%信頼限界	3.5360597
平均の下側95%信頼限界	3.4691403
N	10000

確率変数 X の先見的な分布を知らないとしたら....

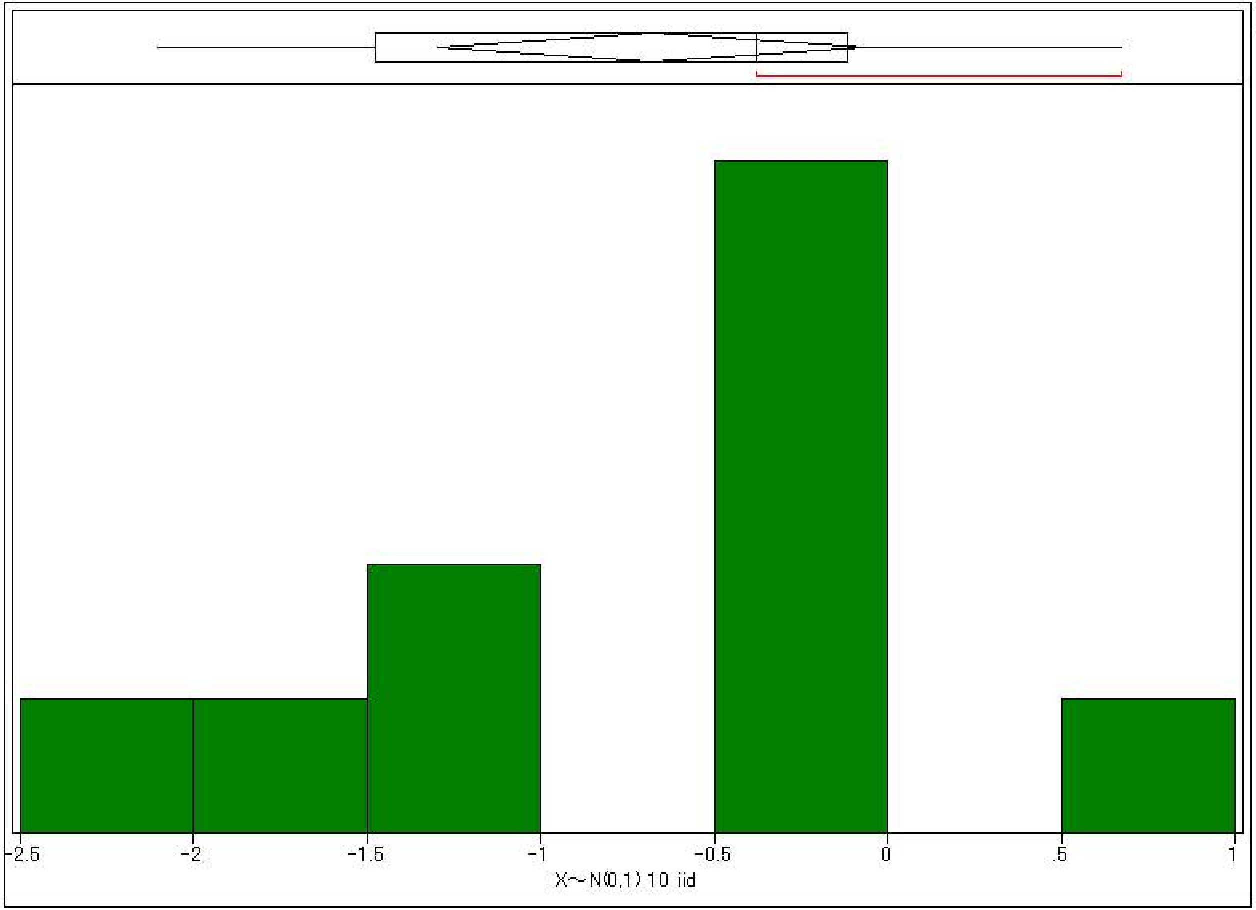
$\Rightarrow$

繰り返し実験してデータ $X_1, X_2, \ldots$ をとり，ヒストグラムを作る

$\Rightarrow$

データ数が多くなると本当の分布が見えてくる.

列1



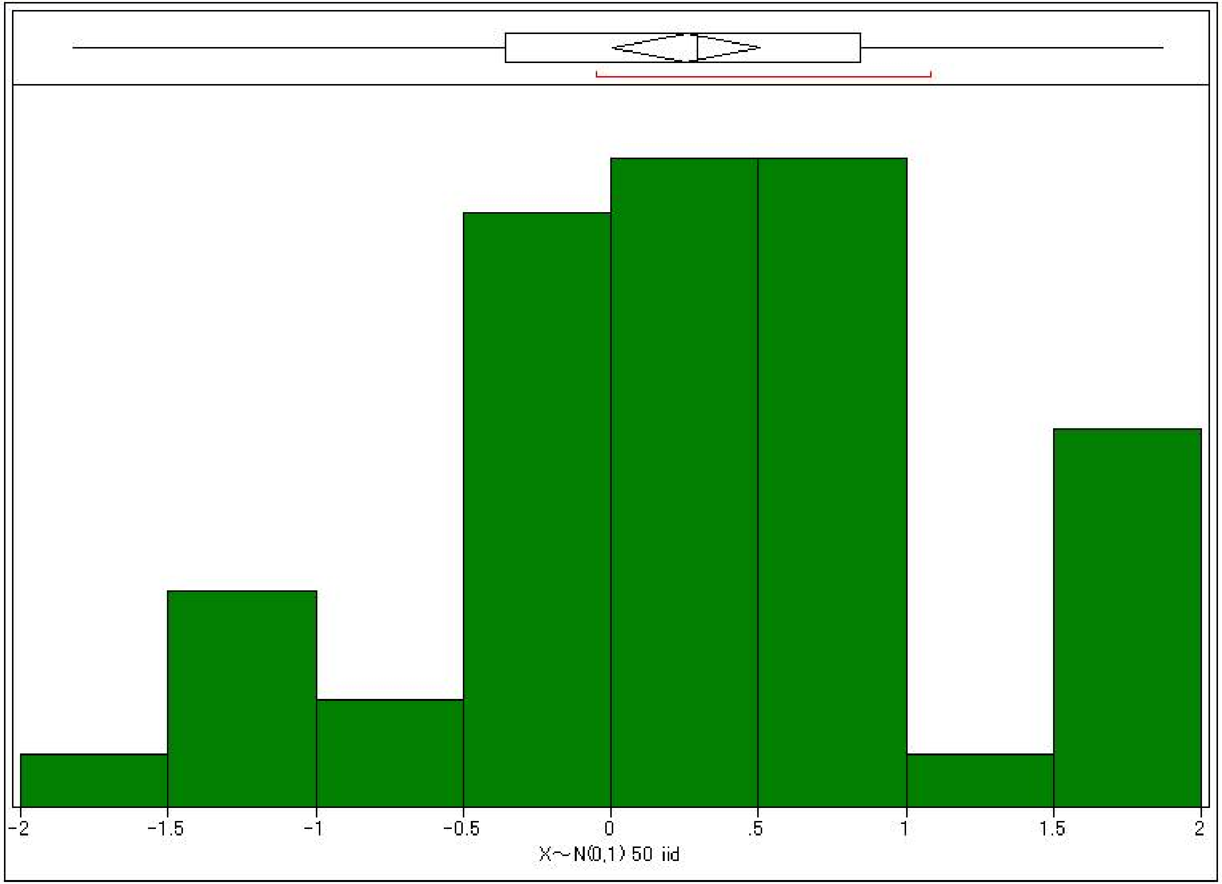
分位点

100.0%	最大値	0.671
99.5%		0.671
97.5%		0.671
90.0%		0.603
75.0%	4分位点	-0.115
50.0%	中央値(メディアン)	-0.379
25.0%	4分位点	-1.479
10.0%		-2.059
2.5%		-2.102
0.5%		-2.102
0.0%	最小値	-2.102

モーメント

平均	-0.67866
標準偏差	0.8639805
平均の標準誤差	0.2732146
平均の上側95%信頼限界	-0.060606
平均の下側95%信頼限界	-1.296715
N	10

列1



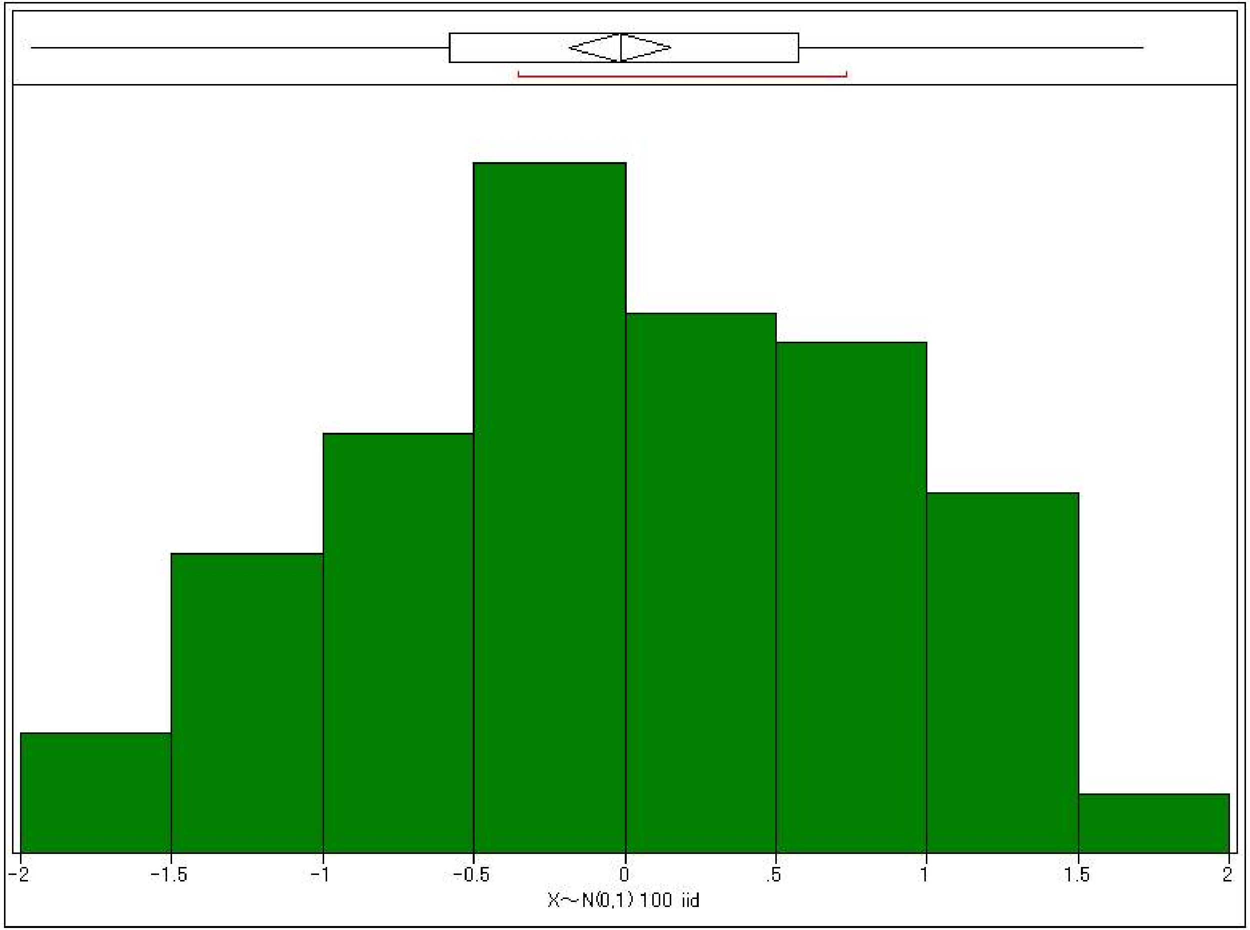
分位点

100.0%	最大値	1.870
99.5%		1.870
97.5%		1.817
90.0%		1.594
75.0%	4分位点	0.848
50.0%	中央値(メディアン)	0.291
25.0%	4分位点	-0.358
10.0%		-1.132
2.5%		-1.695
0.5%		-1.824
0.0%	最小値	-1.824

モーメント

平均	0.254226
標準偏差	0.8700583
平均の標準誤差	0.1230448
平均の上側95%信頼限界	0.5014939
平均の下側95%信頼限界	0.0069582
N	50

列1



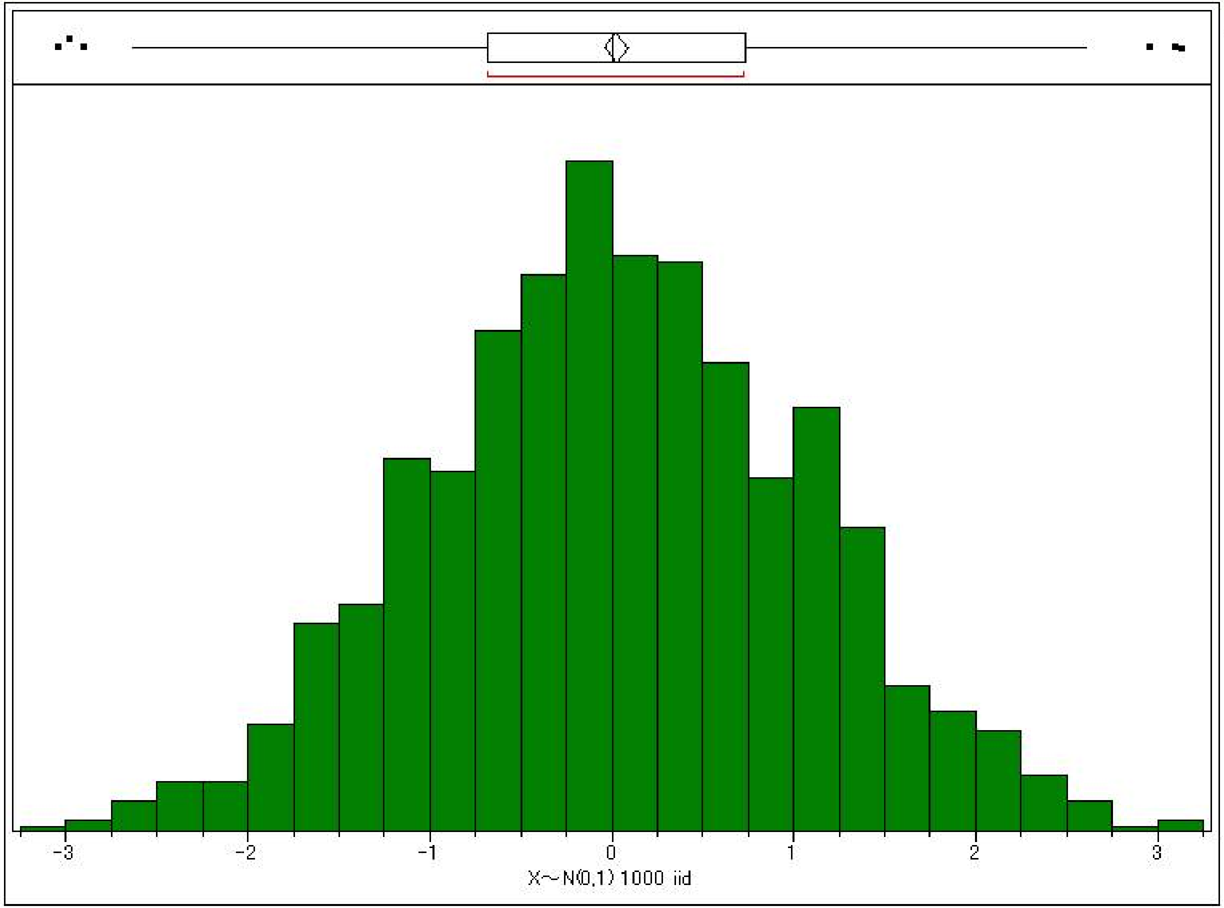
分位点

100.0%	最大値	1.714
99.5%		1.714
97.5%		1.577
90.0%		1.145
75.0%	4分位点	0.574
50.0%	中央値(メディアン)	-0.012
25.0%	4分位点	-0.581
10.0%		-1.250
2.5%		-1.705
0.5%		-1.964
0.0%	最小値	-1.964

モーメント

平均	-0.017097
標準偏差	0.8417619
平均の標準誤差	0.0841762
平均の上側95%信頼限界	0.1499269
平均の下側95%信頼限界	-0.184121
N	100

列1



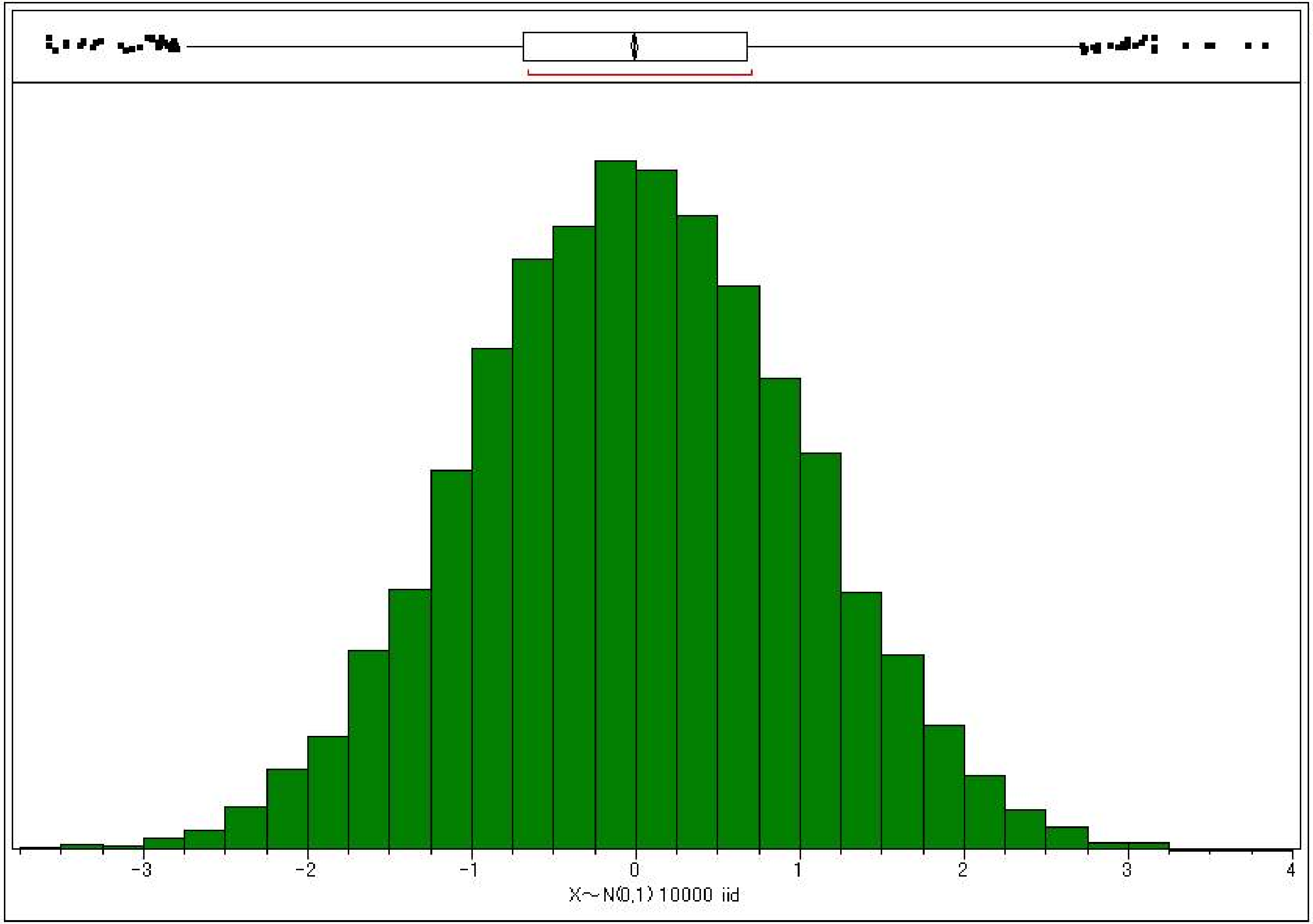
分位点

100.0%	最大値	3.137
99.5%		2.595
97.5%		2.142
90.0%		1.352
75.0%	4分位点	0.735
50.0%	中央値(メディアン)	0.00119
25.0%	4分位点	-0.679
10.0%		-1.310
2.5%		-1.989
0.5%		-2.571
0.0%	最小値	-3.031

モーメント

平均	0.0245931
標準偏差	1.0408722
平均の標準誤差	0.0329153
平均の上側95%信頼限界	0.0891841
平均の下側95%信頼限界	-0.039998
N	1000

列1



分位点

100.0%	最大値	3.842
99.5%		2.557
97.5%		1.949
90.0%		1.270
75.0%	4分位点	0.675
50.0%	中央値(メディアン)	-0.0088
25.0%	4分位点	-0.689
10.0%		-1.279
2.5%		-1.977
0.5%		-2.595
0.0%	最小値	-3.563

モーメント

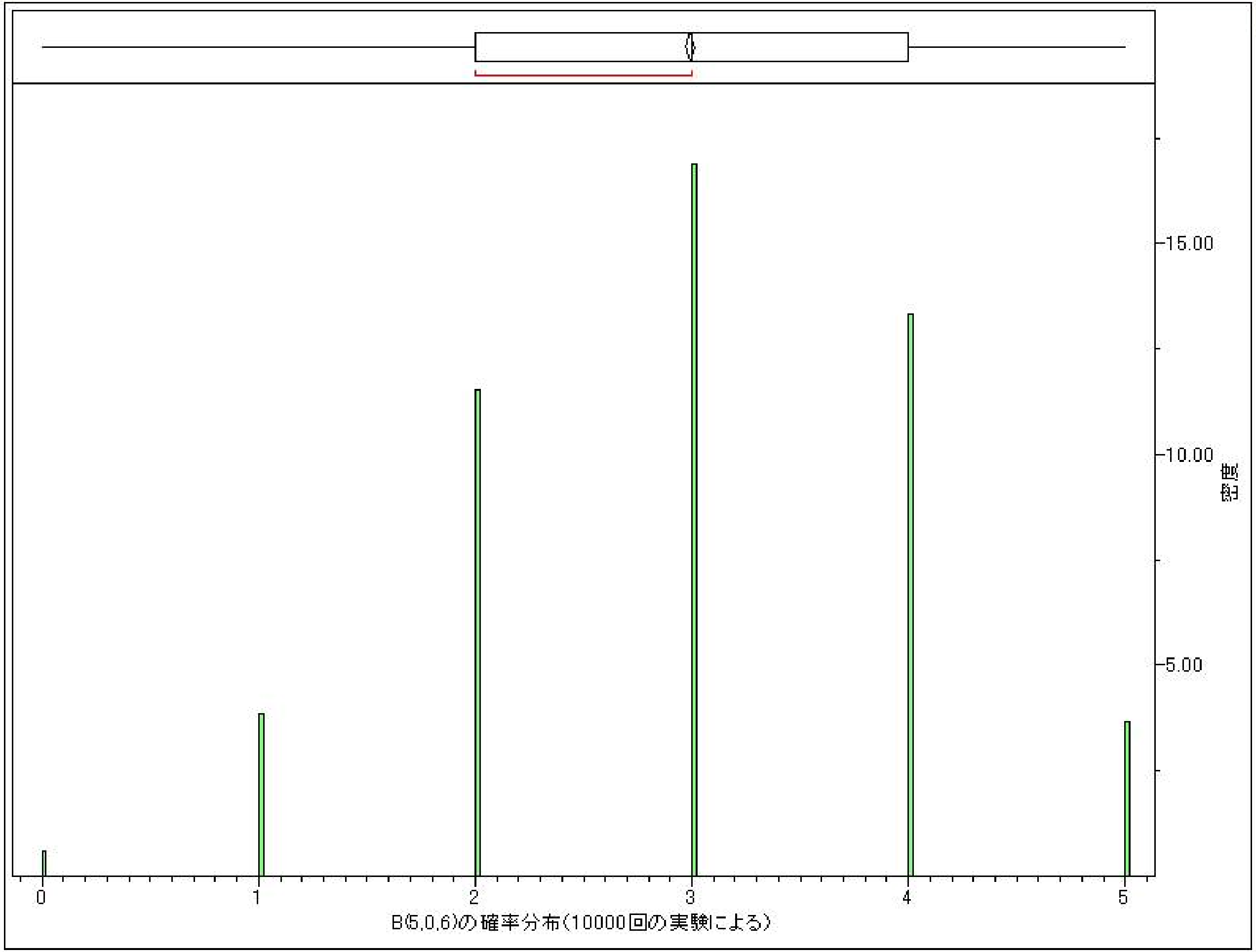
平均	-0.006698
標準偏差	1.0029827
平均の標準誤差	0.0100298
平均の上側95%信頼限界	0.0129625
平均の下側95%信頼限界	-0.026358
N	10000

3　いろいろな分布

２項分布 $B(n,p)$: 表が出る確率が p のコインを n 回投げたときの表の数 X の分布．**確率関数**

$$P\left[X=x\right]=\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix}p^x(1-p)^{n-x}, \quad (x=0,1,...,n)$$

列1



分位点

100.0%	最大値	5.0000
99.5%		5.0000
97.5%		5.0000
90.0%		4.0000
75.0%	4分位点	4.0000
50.0%	中央値(メディアン)	3.0000
25.0%	4分位点	2.0000
10.0%		2.0000
2.5%		1.0000
0.5%		0.0000
0.0%	最小値	0.0000

モーメント

平均	2.991
標準偏差	1.1026516
平均の標準誤差	0.0110265
平均の上側95%信頼限界	3.0126142
平均の下側95%信頼限界	2.9693858
N	10000

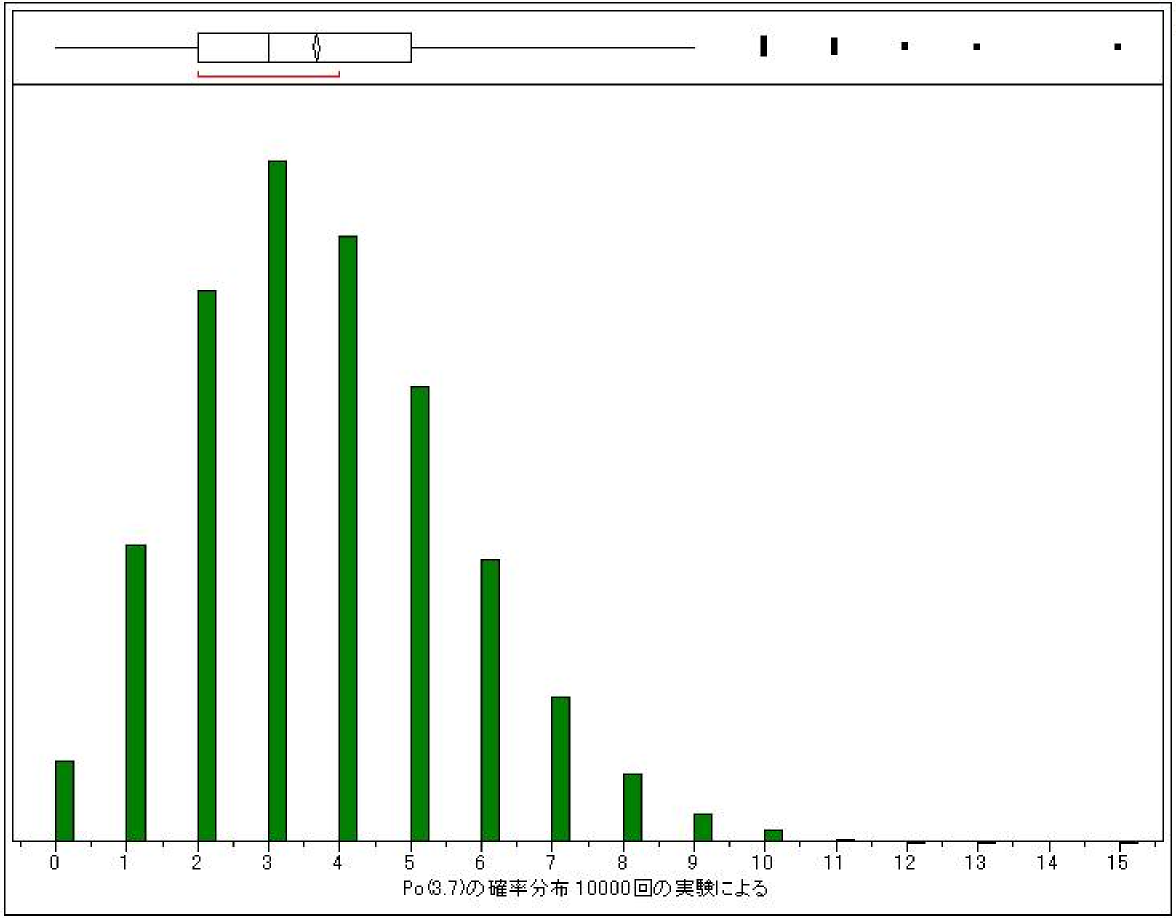
ポアソン分布 $P_o(\lambda)$: 確率関数

$$P[X=x] = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda x} \quad (x = 0, 1, ...)$$

例. 一定期間に起きる事故の数の分布

これらは離散分布の例.

列1



分位点

100.0%	最大値	15.000
99.5%		10.000
97.5%		8.000
90.0%		6.000
75.0%	4分位点	5.000
50.0%	中央値(メディアン)	3.000
25.0%	4分位点	2.000
10.0%		1.000
2.5%		0.000
0.5%		0.000
0.0%	最小値	0.000

モーメント

平均	3.6782
標準偏差	1.9235942
平均の標準誤差	0.0192359
平均の上側95%信頼限界	3.7159063
平均の下側95%信頼限界	3.6404937
N	10000

X が連続的な値を取るとき**連続分布**に従うという.

連続分布の例.

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$:

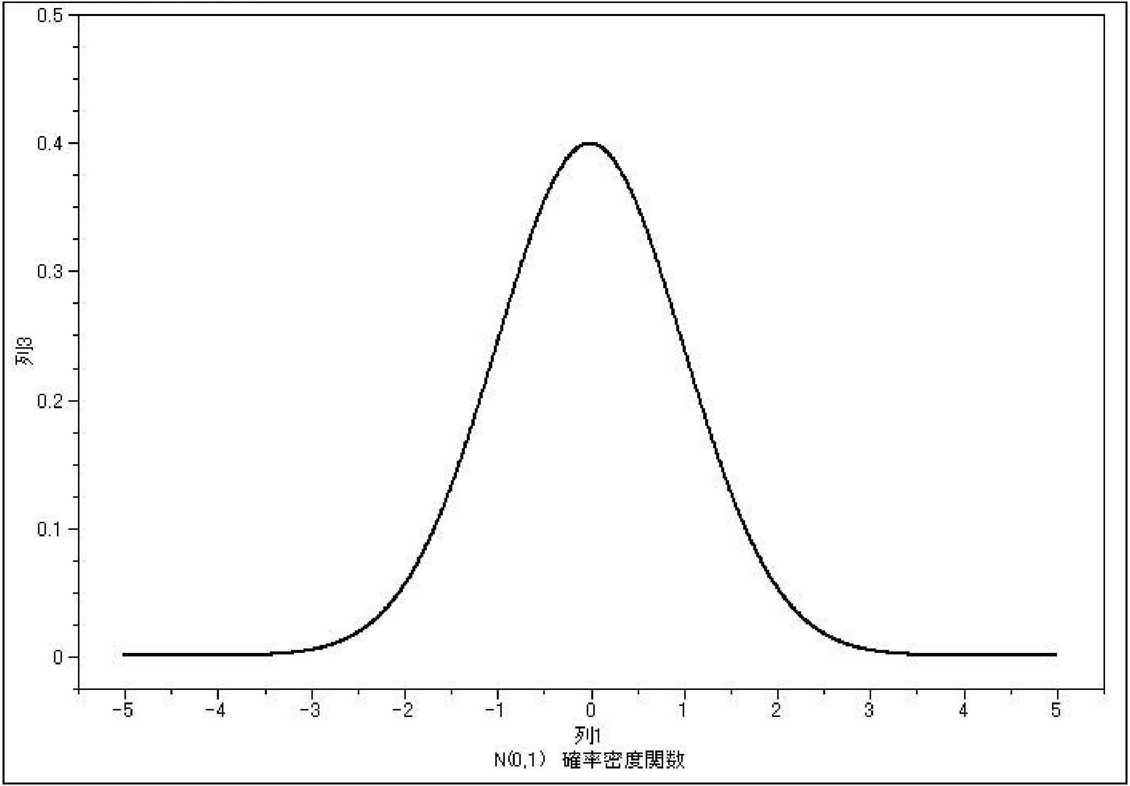
$$P[a < X \leq b] \;=\; \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\, dx$$
$$(-\infty < a < b < \infty)$$

連続確率変数 X の確率分布が

$$P[a < X \leq b] \;=\; \int_a^b f(x)\, dx$$
$$(-\infty < a < b < \infty)$$

で定まるとき, f を X の**確率密度関数**と呼ぶ.

列1と列3の二変量の関係



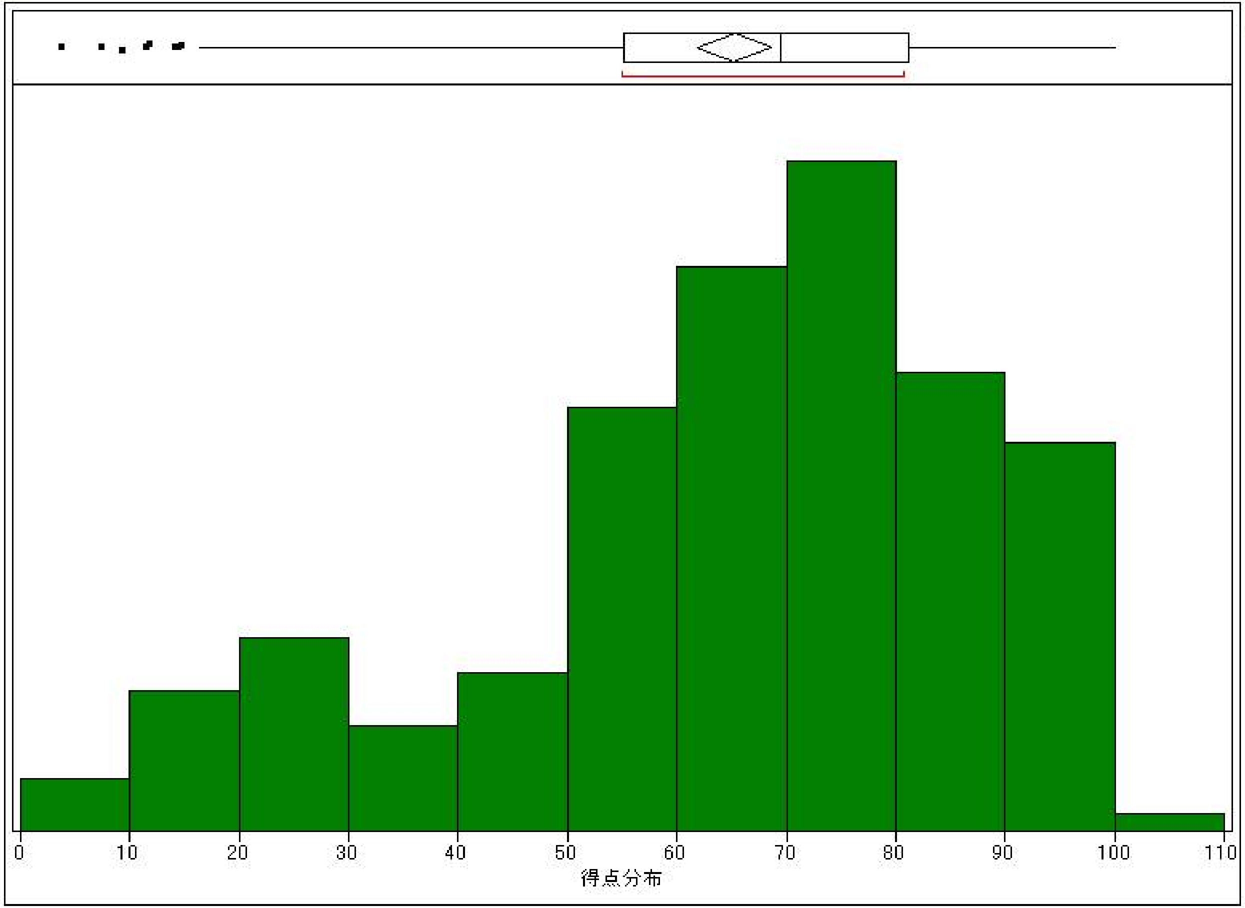
離散分布の例として 2 項分布，ポアソン分布,
連続分布の例として正規分布を見た.

分布はいろいろな形状のものがある.

世の中複雑！

データ $X_1, X_2, ..., X_n$ を前にして，どのように行動すべきか？
$\Rightarrow$
X の分布の様子を調べることが重要.

列1



分位点

100.0%	最大値	100.00
99.5%		100.00
97.5%		98.82
90.0%		92.49
75.0%	4分位点	81.12
50.0%	中央値(メディアン)	69.47
25.0%	4分位点	55.10
10.0%		27.11
2.5%		11.73
0.5%		3.93
0.0%	最小値	3.93

モーメント

平均	65.283243
標準偏差	22.830911
平均の標準誤差	1.7017157
平均の上側95%信頼限界	68.641248
平均の下側95%信頼限界	61.925238
N	180

例．コインを投げます．表が出る確率がp（値は未知）で一定. 表が出たら１００万円もらえます．裏がでたら１００万円支払います.

(賭け１）　100人の参加者のうち１人だけが表でした．あなたは参加しますか？

(賭け２）　100人の参加者のうち５０人が表でした．あなたは参加しますか？

(賭け３）　100人の参加者のうち９０人が表でした．あなたは参加しますか？

無意識のうちにpを推定したのでは？

教訓.

(1) 確率現象の統計モデル化とフィッティング

教訓.

(1) 確率現象の統計モデル化とフィッティング

(2) 学生は賭け事をしてはいけない：
(模範解答）どれも参加しない.

pの推定問題.

コイン投げ．表を1, 裏を0であらわし，j回目の結果をX_jとする：

$$X_j = \begin{cases} 1 & j\text{回目に表がでたとき} \\ 0 & j\text{回目に裏がでたとき} \end{cases} \qquad (j = 1, 2, ..., n)$$

各回に表が出る確率がpとする：

$$P\left[X_j = 1\right] = p.$$

パラメータpは未知で，データ$X_1, X_2, ..., X_n$から推定したい.

pの推定量：

$$\begin{aligned} \hat{p}_n &= \frac{n\text{回のうち表が出た回数}}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j. \end{aligned}$$

自然な疑問：

pの推定量$\hat{p}_n$は妥当なものか？

大数の法則.

Y_j $(j = 1, 2, ...)$ を独立で同一の分布を持つ確率変数の列とする．このとき，確率１で,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j \ \rightarrow \ E[Y_1] \quad (n \rightarrow \infty).$$

ここで，$E[Y_1]$ は Y_1 の**期待値**である.（Y_1 の分布は何でもよいことに注意すべき.）

大数の法則を $Y_j = X_j$ に適用して，$n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} \hat{p}_n &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \\ &\rightarrow E[X_1] = p. \end{aligned}$$

したがって，$\hat{p}_n$ は漸近的に p に近づく（**推定量の一致性**）.

最尤原理.

- 上の例ではモデルが単純なため，p の推定量 $\hat{p}_n$ が容易に構成できた.
- 理論統計が提唱する最尤原理によって，一般の統計モデルに対して推定量が構成できる.
- データ $X_1, X_2, ..., X_n$ が独立に同一の分布に従い，その確率密度（あるいは確率関数）が $f(x, \theta)$ とする．ここで，θ は真の値は存在するが，その値は観測者に未知のパラメータである．我々は θ の真の値を推定したい.

尤度関数：

$$\Lambda_n(\theta) \;=\; f(X_1, \theta) \times \cdots \times f(X_n, \theta).$$

最尤法：$\Lambda_n(\theta)$ を最大にする θ を θ の推定量 $\hat{\theta}_n$ とする:

$$\Lambda_n(\hat{\theta}_n) \;=\; \max_{\theta} \Lambda_n(\theta).$$

$\hat{\theta}_n$ を θ の**最尤推定量**と呼ぶ.

コイン投げの例.

$$\begin{aligned} \Lambda_n(\theta) &= p^{X_1}(1-p)^{1-X_1} \times \cdots \times p^{X_n}(1-p)^{1-X_n} \\ &= p^{\sum_{j=1}^n X_j}(1-p)^{n-\sum_{j=1}^n X_j}. \end{aligned}$$

したがって，$\hat{p}_n = \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n}$ は最尤推定量.

最尤推定量の妥当性.

パラメータの真値を θ_0 で表す．θ_0 は存在する（と仮定する）が，その値を我々は知らない．真値が θ_0 であるから，X_j の確率密度関数は $f(x, \theta_0)$ で与えられる.

　対数尤度関数.

$$\log \Lambda_n(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \log f(X_j, \theta).$$

　大数の法則によって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \Lambda_n(\theta) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log f(X_j, \theta) \\ &\to E_{\theta_0}[\log f(X_1, \theta)] \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

ただし，E_{θ_0} は θ_0 のもとでの期待値で,

$$E_{\theta_0}[\log f(X_1, \theta)] = \int \log f(x, \theta)\, f(x, \theta_0) dx.$$

となる．離散分布のときも同様である.

つまり,

大数の法則.

$$\frac{1}{n}\log\Lambda_n(\theta) \;\to\; \int \log f(x,\theta)\, f(x,\theta_0)dx.$$

情報理論の不等式.（問：証明せよ.）

$$\int \log f(x,\theta)\, f(x,\theta_0)dx \le \int \log f(x,\theta_0)\, f(x,\theta_0)dx$$

等号は $f(\cdot,\theta) = f(\cdot,\theta_0)$ のときのみ.

したがって，標語的に,

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_n &= \frac{1}{n}\log\Lambda_n(\theta) \text{ を最大にする } \theta \\
&\approx \int \log f(x,\theta)\, f(x,\theta_0)dx \text{ を最大にする } \theta \\
&= \theta_0.
\end{aligned}$$

つまり,

(最尤推定量の一致性)　確率１で

$$\hat{\theta}_n \to \theta_0 \quad (n \to \infty).$$

まとめ.

- 確率変数の分布はデータを多く集めることでその形状が見えてくる.
- 世の中にはいろいろな分布がある．必ずしも単純な形をしているわけでもなく，取り扱いが容易なわけでもない.
- 統計モデルのフィッティング（未知パラメータの推定）がデータの持つ情報の抽出・加工において重要である.
- 未知パラメータの推定には最尤原理が有効である．一般の分布族に対して，最尤推定量が一致性を持つことを示した.
- 大数の法則が役に立った．このように極限定理は統計解析において不可欠のものである.


MATHEMATICA
$\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) \longrightarrow E(X)$
HELVETIA 80
BURKARD WALTENSPÜL
1994
COURVOISIER

4　中心極限定理

大数の法則.

Y_j $(j = 1, 2, ...)$ を独立で同一の分布を持つ確率変数の列とする．このとき，確率 1 で,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j \ \rightarrow \ E[Y_1] \quad (n \to \infty).$$

ここで，$E[Y_1]$ は Y_1 の**期待値**である.

しかし収束の速度（誤差の大きさと分布）については何も言っていない.

確率変数 X の確率密度関数が $f(x)$ であるとする.

X の分散：

$$\mathrm{Var}[X] = \int (x - E[X])^2 f(x)\, dx.$$

中心極限定理.

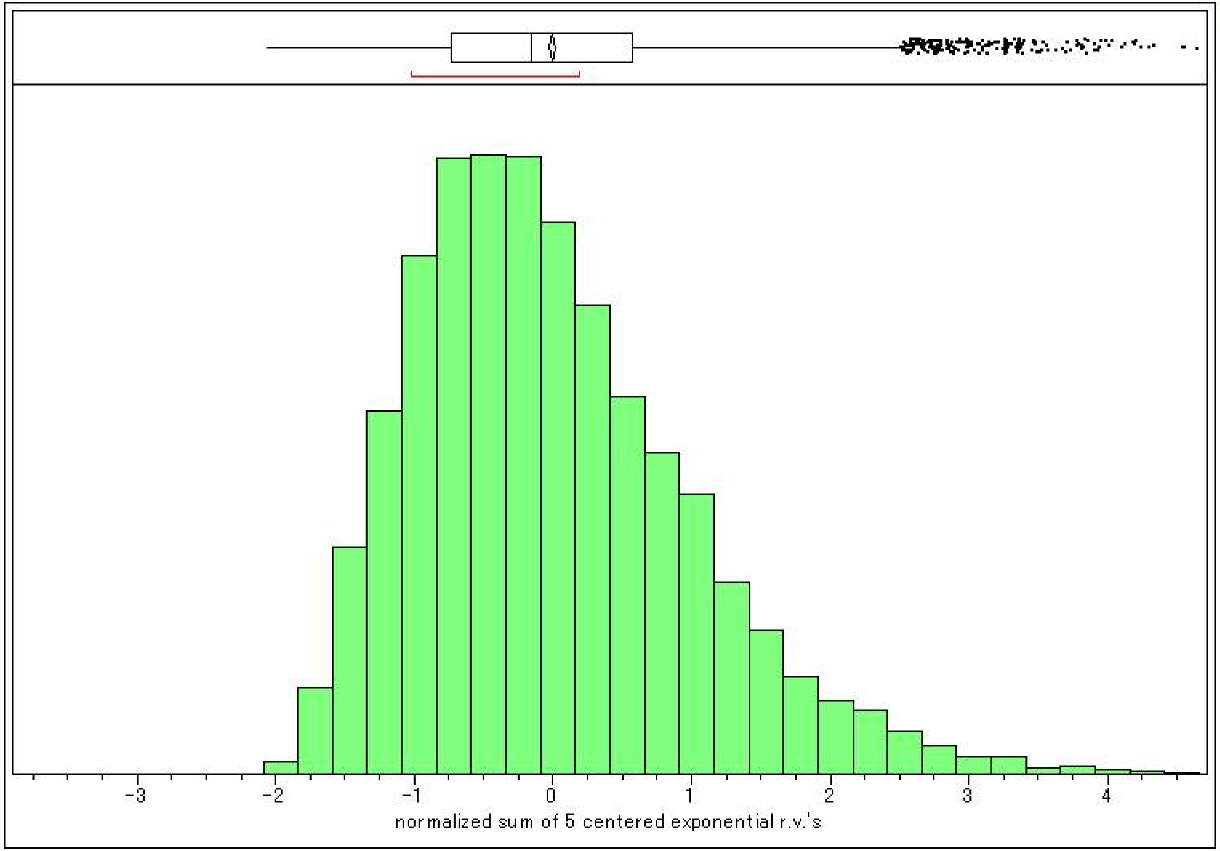
Y_j $(j = 1, 2, ...)$ を独立で同一の分布を持つ確率変数の列とする．このとき，確率変数 $n^{-1/2}(\sum_{j=1}^{n} Y_j - n\mathrm{E}[Y_1])$ の分布は正規分布 $N(0, \mathrm{Var}[Y_1])$ に収束する：

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^{n} Y_j - n\mathrm{E}[Y_1] \right) \ \to^d \ N\left(0, \mathrm{Var}[Y_1]\right) \quad (n \to \infty).$$

大雑把に言って,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j \quad \text{の分布} \quad \approx N\left(\mathrm{E}[Y_1], \frac{\mathrm{Var}[Y_1]}{n} \right).$$

列5



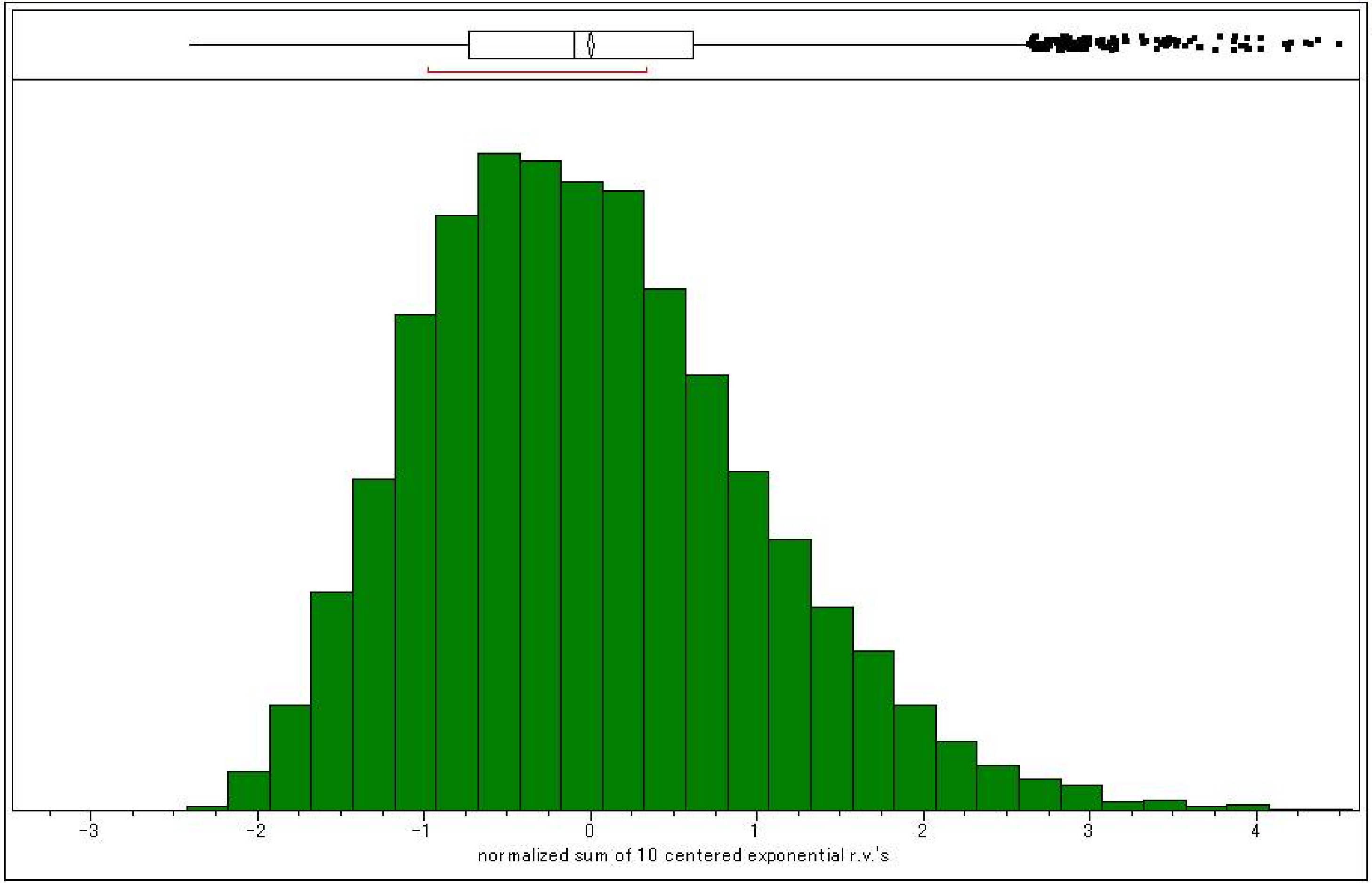
分位点

100.0%	最大値	6.135
99.5%		3.478
97.5%		2.392
90.0%		1.331
75.0%	4分位点	0.569
50.0%	中央値(メディアン)	-0.156
25.0%	4分位点	-0.734
10.0%		-1.160
2.5%		-1.527
0.5%		-1.755
0.0%	最小値	-2.058

モーメント

平均	-0.005922
標準偏差	1.0086347
平均の標準誤差	0.0100863
平均の上側95%信頼限界	0.0138493
平均の下側95%信頼限界	-0.025693
N	10000

列2



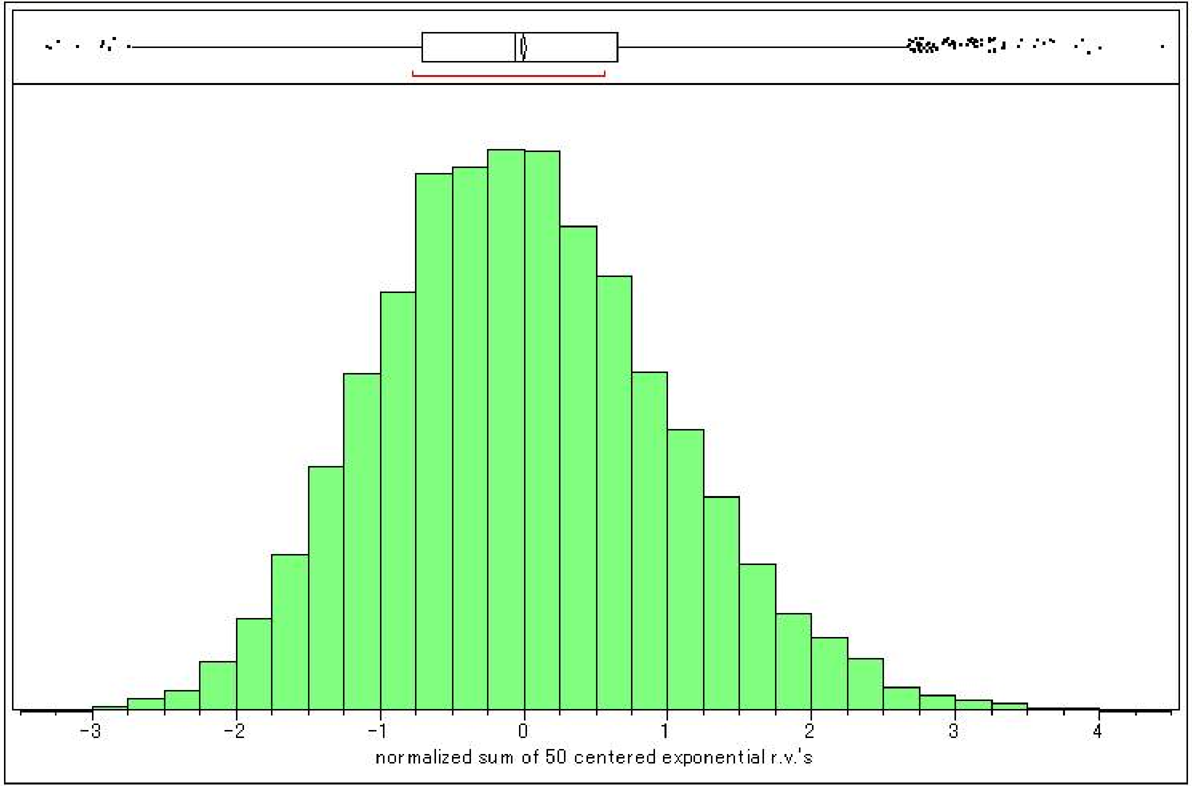
分位点

100.0%	最大値	5.379
99.5%		3.167
97.5%		2.259
90.0%		1.348
75.0%	4分位点	0.615
50.0%	中央値(メディアン)	-0.101
25.0%	4分位点	-0.734
10.0%		-1.200
2.5%		-1.652
0.5%		-2.003
0.0%	最小値	-2.407

モーメント

平均	0.0022346
標準偏差	1.0123503
平均の標準誤差	0.0101235
平均の上側95%信頼限界	0.0220787
平均の下側95%信頼限界	-0.017609
N	10000

列3



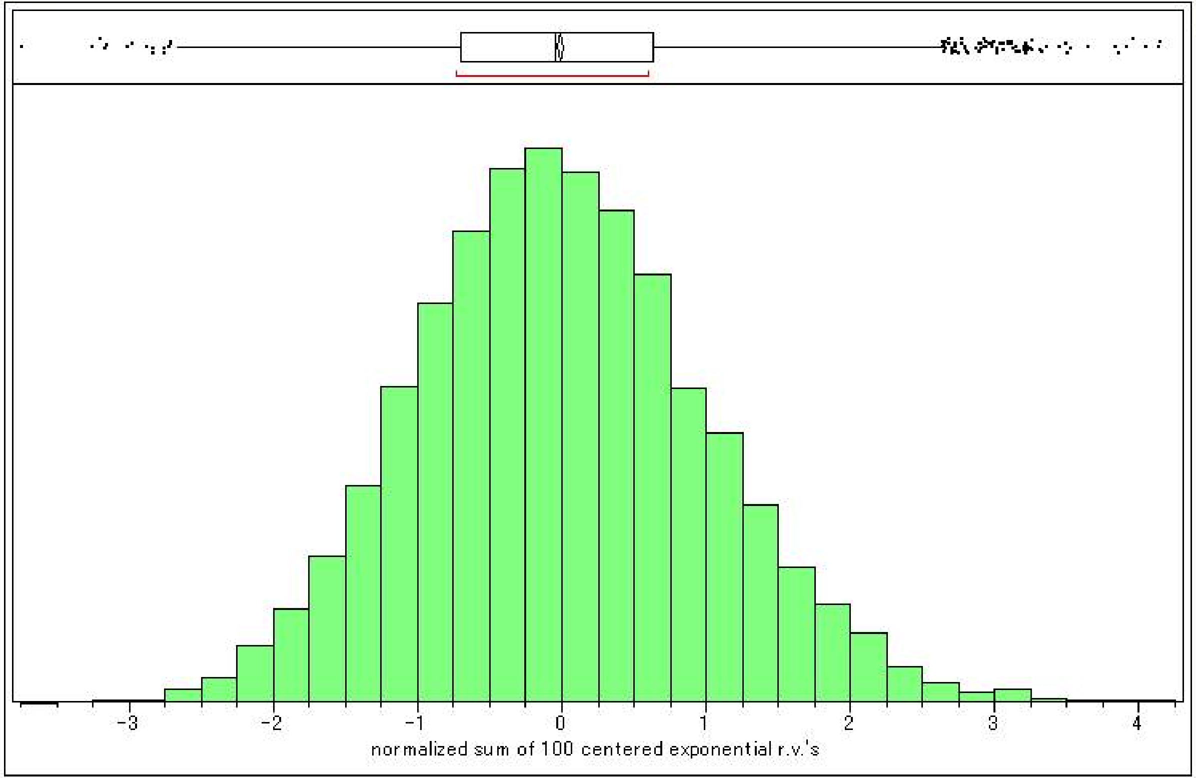
分位点

100.0%	最大値	4.446
99.5%		2.881
97.5%		2.143
90.0%		1.320
75.0%	4分位点	0.648
50.0%	中央値(メディアン)	-0.058
25.0%	4分位点	-0.706
10.0%		-1.255
2.5%		-1.849
0.5%		-2.320
0.0%	最小値	-3.311

モーメント

平均	-0.001953
標準偏差	1.0108955
平均の標準誤差	0.010109
平均の上側95%信頼限界	0.0178622
平均の下側95%信頼限界	-0.021769
N	10000

列4



分位点

100.0%	最大値	4.160
99.5%		2.934
97.5%		2.062
90.0%		1.295
75.0%	4分位点	0.634
50.0%	中央値(メディアン)	-0.047
25.0%	4分位点	-0.700
10.0%		-1.262
2.5%		-1.888
0.5%		-2.363
0.0%	最小値	-3.733

モーメント

平均	-0.008032
標準偏差	1.0058989
平均の標準誤差	0.010059
平均の上側95%信頼限界	0.0116859
平均の下側95%信頼限界	-0.027749
N	10000

最尤推定量の誤差分布.

パラメータの真値をθ_0で表す．θ_0は存在する（と仮定する）が，その値を我々は知らない．真値がθ_0であるから，X_jの確率密度関数は$f(x, \theta_0)$で与えられる.

尤度関数：

$$\Lambda_n(\theta) \;=\; f(X_1, \theta) \times \cdots \times f(X_n, \theta).$$

最尤法：$\Lambda_n(\theta)$を最大にするθをθの推定量$\hat{\theta}_n$とする:

$$\Lambda_n(\hat{\theta}_n) \;=\; \max_{\theta} \Lambda_n(\theta).$$

$\hat{\theta}_n$をθの最尤推定量と呼んでいた.

対数尤度関数:

$$\log \Lambda_n(\theta) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \log f(X_j, \theta).$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial}{\partial\theta}\log\Lambda_n(\theta_0) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial}{\partial\theta}\log\Lambda_n(\hat{\theta}_n) - \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial}{\partial\theta}\log\Lambda_n(\theta_0) \\ &\approx\; \frac{1}{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log\Lambda_n(\theta_0) \times \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \end{aligned}$$

大数の法則によって,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log\Lambda_n(\theta_0) \;&\approx\; E_{\theta_0}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X_1,\theta_0)\right]\\ &=\; -\int\left(\frac{\partial/\partial\theta f(x,\theta_0)}{f(x,\theta_0)}\right)^2 f(x,\theta_0)\,dx =: -I(\theta_0).\end{aligned}$$

したがって,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta_0) \;\approx\; I(\theta_0)^{-1}\times\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial/\partial\theta f(X_j,\theta_0)}{f(X_j,\theta_0)}.$$

中心極限定理によって,

最尤推定量の漸近正規性：

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta_0) \;\to^d\; N(0,I(\theta_0)^{-1}) \quad (n\to\infty).$$


DA1229104A9
DEUTSCHE BUNDESBANK
Banknote
10
ZEHN DEUTSCHE MARK
DA1229104A9
数学
日本数学会編集
岩波書店発売

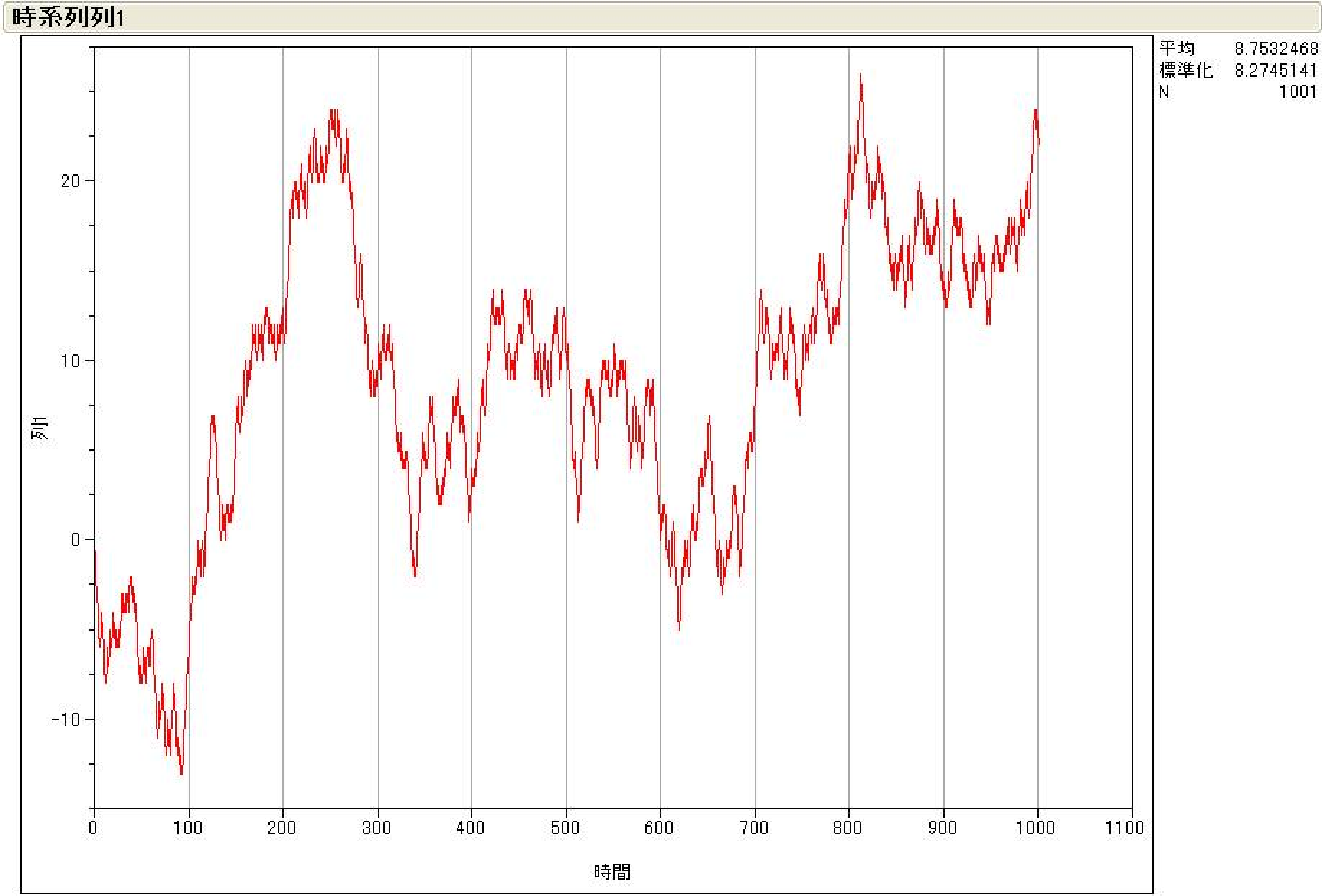
ランダムウォーク.

$X_1, X_2, \ldots$：独立,

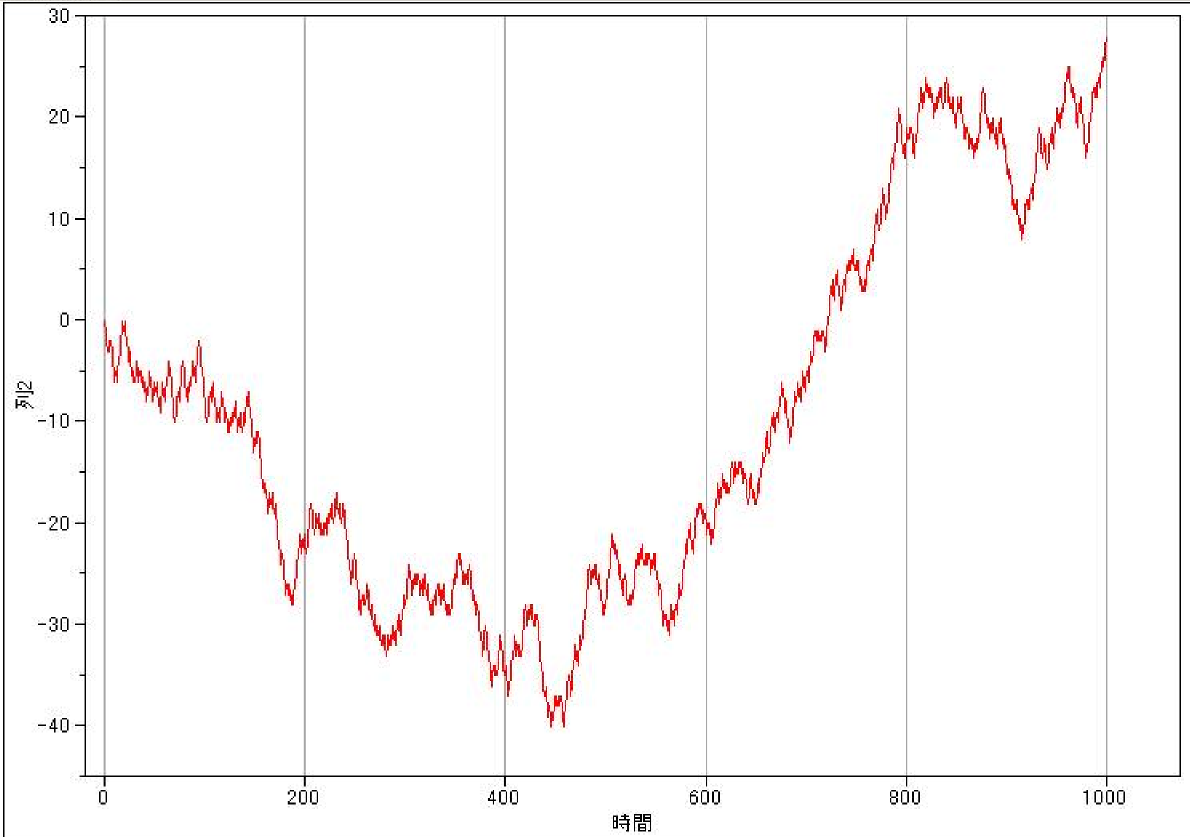
$$P[X_j = 1] = P[X_j = -1] = \frac{1}{2}.$$

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

とする.


時系列列1
平均 8.7532468
標準化 8.2745141
N 1001
列1
時間
20
10
0
-10
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100

時系列列2



平均	-9.956044
標準化	18.612996
N	1001

$X_1, X_2, ...$ を独立で，平均０，分散１の同一の分布に従う確率変数列とする．

$$Z_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nt]} X_j$$

とおくとき，関数 $t \mapsto Z_t^n$ はランダムな関数．

$Z^n = (Z_t^n), W = (W_t).$

Donskerの定理．：

$$Z^n \ \to^d \ W \quad (n \to \infty).$$

- $W_0 = 0$, $W_{t+h} - W_t \sim N(0, h)$.
- $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ に対して，

  $$W_{t_2} - W_{t_1},\ W_{t_3} - W_{t_2}, \cdots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$$

  は独立．
- 関数 $t \mapsto W_t$ は連続．

$W = (W_t)$ を**ウイナー過程**と呼ぶ．

非線形時系列モデル(確率差分方程式).

$$Y_n - Y_{n-1} = a(Y_{n-1}) + b(Y_{n-1})\epsilon_n,\ Y_0 = y_0.$$

ここで，(ϵ_n) は独立で平均 0 の同一分布に従う確率変数列.

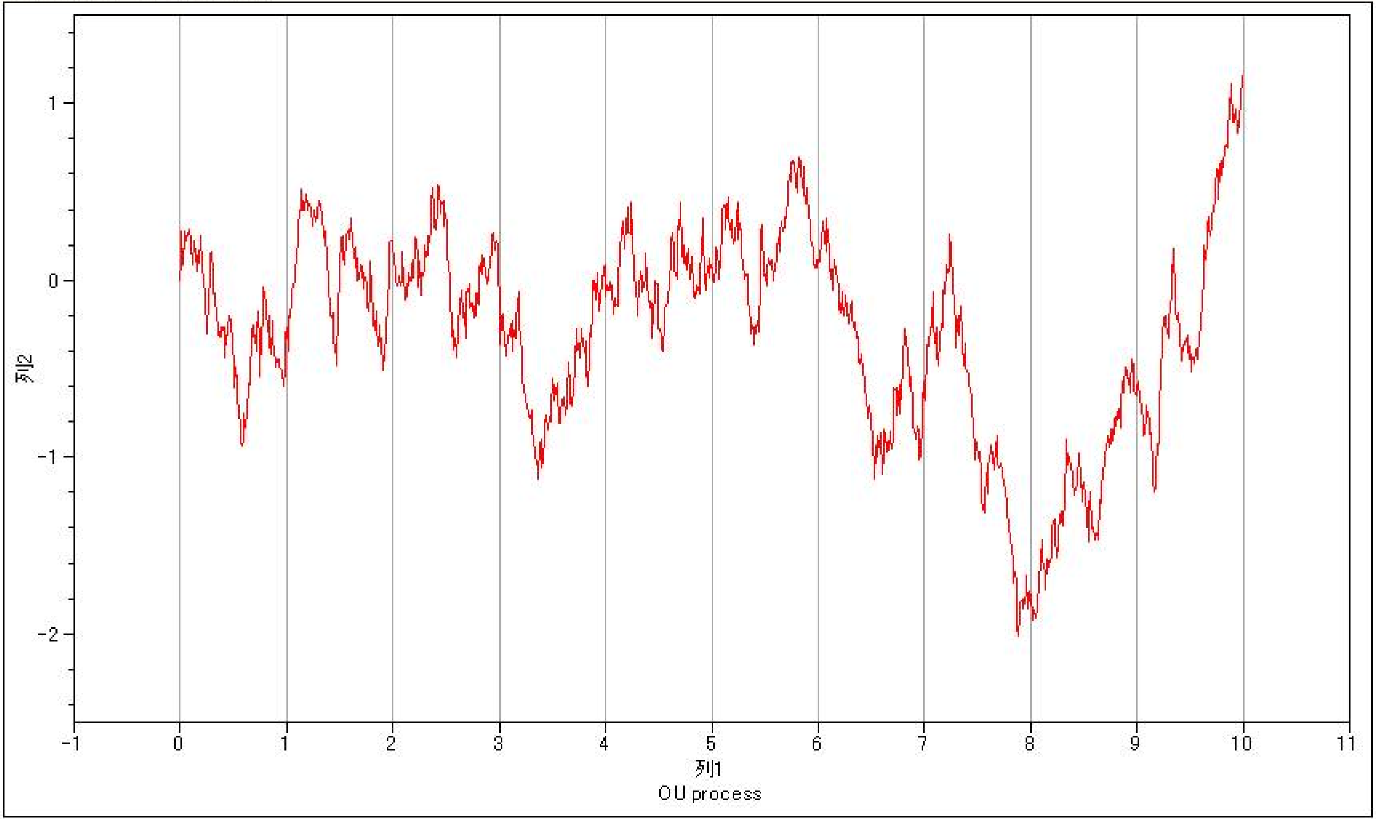
連続時間での類似：
確率微分方程式

$$dY_t = a(Y_t)dt + b(Y_t)dw_t,\ Y_0 = y_0.$$

例. オルンシュタイン・ウーレンベック過程.

$$dY_t = -Y_t dt + dw_t,\ Y_0 = 0.$$

時系列列2 vs. 変数列1



平均	-0.289433
標準化	0.5756683
N	1001

確率微分方程式の推定.

$$\begin{aligned} dX_t^\epsilon &= \theta g(X_t^\epsilon)dt + \epsilon dw_t,\ t \in [0,T] \\ X_0^\epsilon &= x_0. \end{aligned}$$

ϵ はノイズの大きさを表す既知のパラメータ. θ は未知のパラメータで，これを推定したい.

尤度関数

$$\Lambda_\epsilon(\theta) = \exp\left(\int_0^T \theta g(X_t^\epsilon)dX_t^\epsilon - \frac{1}{2}\int_0^T \theta^2 g(X_t^\epsilon)^2 dt\right).$$

最尤推定量

$$\hat{\theta}_\epsilon = \frac{\int_0^T g(X_t^\epsilon)dX_t^\epsilon}{\int_0^T g(X_t^\epsilon)^2 dt}.$$

θ_0 をパラメータ θ の真値として，最尤推定量の誤差は

$$\epsilon^{-1}\left(\hat{\theta}_\epsilon - \theta_0\right) = \frac{\int_0^T g(X_t^\epsilon)dw_t}{\int_0^T g(X_t^\epsilon)^2 dt}.$$

$\epsilon \downarrow 0$ のときの漸近分布（漸近正規性）

$$\begin{aligned} \epsilon^{-1}\left(\hat{\theta}_\epsilon - \theta_0\right) &\to^d \frac{\int_0^T g(X_t^0)dw_t}{\int_0^T g(X_t^0)^2 dt} \\ &\sim N(0, I(\theta_0)^{-1}). \end{aligned}$$

ここで,

$$I(\theta_0) = \int_0^T g(X_t^0)^2 dt$$

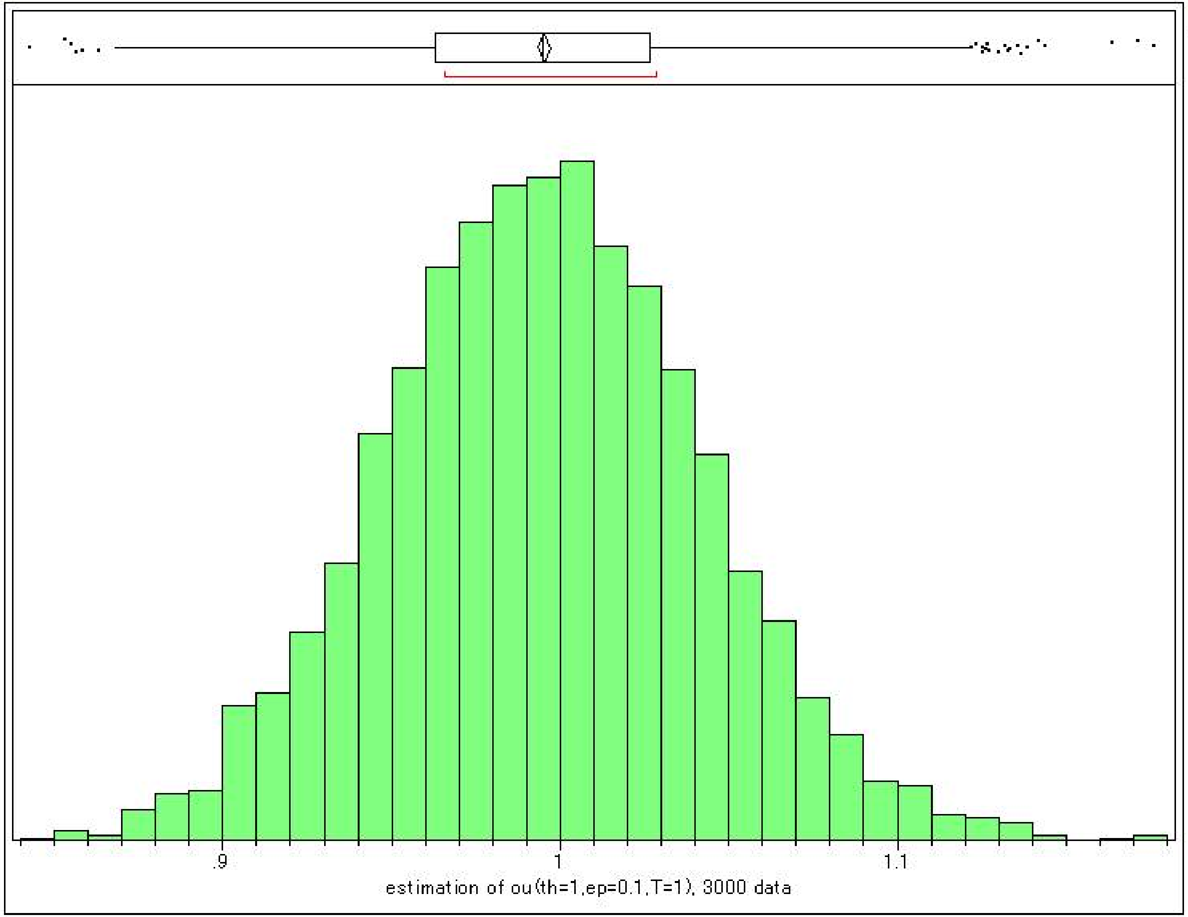
は Fisher 情報量. 分子の収束は中心極限定理の一つと思える.

グラフはオルンシュタイン・ウーレンベック過程

$$
\begin{aligned}
dX_t^\epsilon &= -\theta X_t^\epsilon dt + \epsilon dw_t,\ t \in [0,1] \\
X_0^\epsilon &= x_0.
\end{aligned}
$$

のデータ$(X_t^\epsilon)_{t\in[0,1]}$から$\hat{\theta}_\epsilon$を求め，それを3000回繰り返して作った$\hat{\theta}_\epsilon$の分布である．パラメータは$\epsilon = 0.1, \theta = 1$である．

列1



分位点

100.0%	最大値	1.1766
99.5%		1.1264
97.5%		1.0901
90.0%		1.0547
75.0%	4分位点	1.0268
50.0%	中央値(メディアン)	0.9949
25.0%	4分位点	0.9632
10.0%		0.9357
2.5%		0.9038
0.5%		0.8794
0.0%	最小値	0.8430

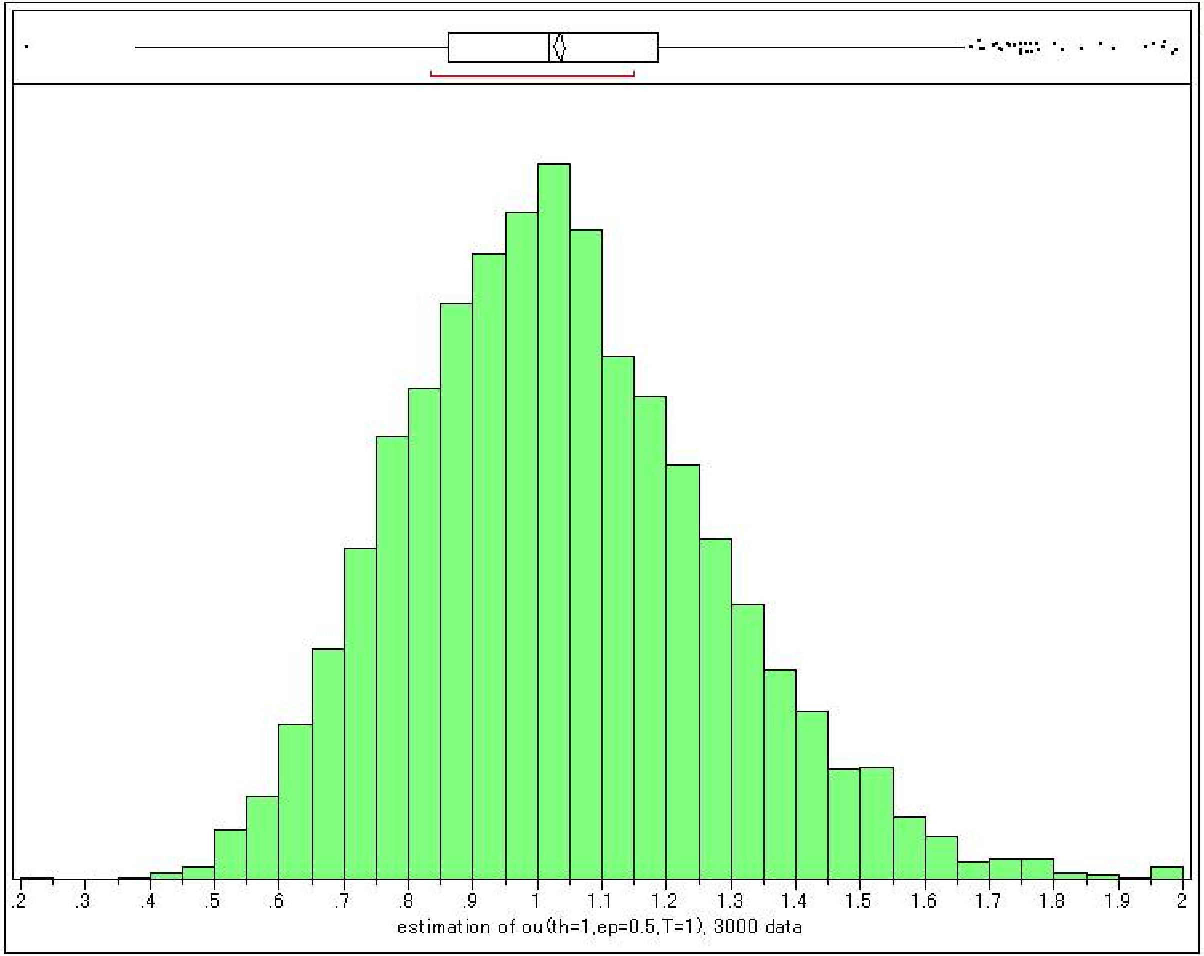
モーメント

平均	0.9952607
標準偏差	0.047191
平均の標準誤差	0.0008616
平均の上側95%信頼限界	0.9969501
平均の下側95%信頼限界	0.9935714
N	3000

$\epsilon = 0.5$ とすると正規近似はよくないようである.

$\Rightarrow$ 漸近展開.

列1



分位点

100.0%	最大値	1.9913
99.5%		1.7646
97.5%		1.5529
90.0%		1.3525
75.0%	4分位点	1.1864
50.0%	中央値(メディアン)	1.0169
25.0%	4分位点	0.8630
10.0%		0.7374
2.5%		0.6097
0.5%		0.5177
0.0%	最小値	0.2116

モーメント

平均	1.0345511
標準偏差	0.2416309
平均の標準誤差	0.0044116
平均の上側95%信頼限界	1.0432011
平均の下側95%信頼限界	1.0259012
N	3000

その他の話題.[1]

1. 高次の漸近分布論（漸近展開）
2. 統計科学における漸近分布理論の応用
3. ファイナンスと漸近分布論

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~ nakahiro/hp-naka

[1]興味のある方は，拙著「Malliavin 解析と数理統計」数学，**55**, 3, 225-244, 岩波 (2003) とその文献表をご覧ください.