数学基礎理論演習

担当：金井 雅彦

7 月 4 日実施演習 解説

問題１．「数学 IB 講義録」問題 4.42 を参照のこと

問題２．「数学 IB 講義録」問題 4.43 を参照のこと

問題３．(1) この 2 次方程式のふたつの解を α,β としたとき，

$$\alpha+\beta=-2b, \qquad \alpha\beta=c$$

であった．したがって，(i) が成り立つための必要十分条件は，$b^2-c\geq 0$, かつ $b,c>0$ である．一方，(ii) が成り立つための必要十分条件は，$b^2-c\geq 0$, $b<0$, かつ $c>0$ である．

(2) 問題の 3 次方程式の 3 つの実解を α, β, γ とする．このとき，

$$\xi^3+a\xi^2+b\xi+c=(\xi-\alpha)(\xi-\beta)(\xi-\gamma)$$

が成り立つ．したがって，a, b, c は $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ のいくつかを掛け合わせたものをさらに加え合わせたものである．したがって，とくに α, β, γ が負，すなわち，$-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ が正であれば，a, b, c は正である．逆に $a,b,c>0$ であるとしよう．すると，3 次関数 $f(\xi)=\xi^3+a\xi^2+b\xi+c$ に対し，$\xi\geq 0$ であれば，$f(\xi)>0$ である．すなわち，$f(\xi)=0$ は非負の解を持たない．一方，$f(\xi)=0$ の 3 つの解はすべて実数であると仮定している．したがって，それらはすべて負でなければならない．(i) が成り立つための必要十分条件は，$a,b,c>0$ であることが以上から結論される．

一方，(ii) が成り立つための必要十分条件は，$a,c<0$ かつ $b>0$ が成り立つことである．これを示すには，$-f(-\xi)$ に対し (i) を適用すればよい．

(3) A の固有方程式に対し (2) を適用すればよい．

(4) 【第１段】まず，関数 f の点 (x,y,z) における勾配ベクトルを計算すると，

$$\nabla f=\begin{pmatrix} yz+2x+\ \ y+\ \ z \\ zx+\ \ x+2y+\ \ z \\ xy+\ \ x+\ \ y+2z \end{pmatrix}.$$

したがって，f の臨界点を決定するためには，次の連立方程式を解けばよい：

$$(\dagger\dagger) \qquad yz+2x+y+z=0, \qquad zx+x+2y+z=0, \qquad xy+x+y+2z=0.$$

まず，($\dagger\dagger$) の第 1 式と第 2 式の差をとることにより，$(x-y)(z-1)=0$ を得る．一方，($\dagger\dagger$) の第 2 式と第 3 式の差をとると，$(y-z)(x-1)=0$ となる．以上から，次の 4 つの場合のいずれかが成り立たねばならないことが分かる：

(a) $x-y=y-z=0$ の場合．このときには，(††) より $x=y=z=0,-4$ を得る．

(b) $x-y=x-1=0$ の場合，このときには，$x=y=1$ である．さらに，(††) の第 3 式とから，$z=-3/2$ を得る．

(c) $y-z=z-1=0$ の場合．このときには，$x=-3/2$, $y=z=1$ が従う．

(d) $x-1=z-1=0$ の場合．$x=z=1$, $y=-3/2$ である．

以上をまとめると，

$$(0,0,0),\ (-4,-4,-4),\ (1,1,-3/2),\ (1,-3/2,1),\ (-3/2,1,1)$$

が関数 f の臨界点として得られた．

【第 2 段】関数 f の点 (x,y,z) におけるヘッセ行列は

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & z+1 & y+1 \\ z+1 & 2 & x+1 \\ y+1 & x+1 & 2 \end{pmatrix}$$

で与えられる．したがって，原点 $(0,0,0)$ におけるその固有多項式は，

$$(\lambda-2)^3 - 2 - 3(\lambda-2) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4$$

である．その係数の符号は交互に変化するので，臨界点 $(0,0,0)$ において関数 f は極小であることが分かる．一方，臨界点 $(-4,-4,-4)$ におけるヘッセ行列の固有多項式は

$$(\lambda-2)^3 + 54 - 27(\lambda-2) = \lambda^3 - 6\lambda^2 - 15\lambda + 100$$

であるから，この点において f は極値をとらないことが分かる．最後に，残り 3 つの臨界点においては，ヘッセ行列の固有多項式は

$$(\lambda-2)^3 + 4 - 8(\lambda-2) - \frac{1}{4}(\lambda-2) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + \frac{4}{15}\lambda + \frac{25}{2}$$

であるから，関数 f はやはりこれらの臨界点においても極値をとらないことが結論される．