数学基礎理論演習

担当：金井 雅彦

６月２０日実施演習 解説

問題１． (1) 関数 $f(x)$ は微分可能であるから，とくに連続である．さらに，$f(a)\cdot f(b)<0$ であるから，中間値の定理から，$f(\gamma)=0$ なる γ ($a<\gamma<b$) の存在が従う．一方，$f'(x)>0$ であるから，関数 $f(x)$ は狭義単調増加であり，したがって $f(\gamma)=0$ なる γ は一意的である．

(2) 点 $(c,f(c))$ における接線 ℓ の傾きは $f'(c)$ であるから，ℓ の方程式は,

$$y-f(c)=f'(c)(x-c)$$

である．この方程式に $(x,y)=(\sigma(c),0)$ を代入することにより,

$$\sigma(c)=c-\frac{f(c)}{f'(c)}$$

を得る．

(3) $f''(x)>0$ であるから，関数 $y=f(x)$ のグラフは下に凸である．したがって，関数 $y=f(x)$ のグラフは，その上の点 $(c,f(c))$ における接線 ℓ の上側にある（下図を参照のこと）．このことより，$f(\sigma(c))>0$ であることが従う．一方,

$$\begin{cases} a\le x<\gamma \quad \text{において} \quad f(x)<0, \\ \gamma<x\le b \quad \text{において} \quad f(x)>0 \end{cases}$$

である．よって，$\sigma(c)>\gamma$ でなければならないことが分かる．さらに，$c>\gamma$ より $f(c)>0$ である．よって $f'(x)>0$ とより,

$$\sigma(c)-c=-\frac{f(c)}{f'(c)}<0,$$

すなわち，$\sigma(c)<c$ を得る．

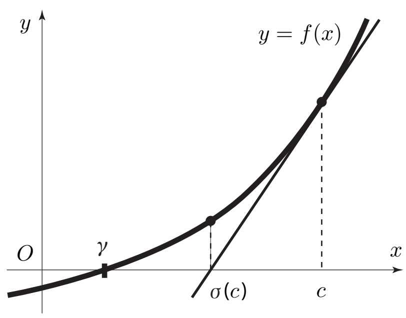

図 1:

(4) (3) によれば，$c_{n+1}=\sigma(c_n)<c_n$，かつ $c_n>\gamma$ である．すなわち，$\{c_n\}$ は下に有界な単調減少数列である．したがって，$\{c_n\}$ は収束する．その極限値を $\bar{\gamma}$ とすると，漸化式

$$c_{n+1}=c_n-\frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$$

において，$n \to \infty$ とすることにより，

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma} - \frac{f(\bar{\gamma})}{f'(\bar{\gamma})},$$

すなわち，$f(\bar{\gamma}) = 0$ を得る．これより直ちに $\bar{\gamma} = \gamma$ が従う．

(5) 関数 $f(x) = x^2 - 2$ $(1 \leq x \leq 2)$ に対し，

$$f(1) = -1 < 0, \qquad f(2) = 2 > 0, \qquad f'(x) = 2x \geq 2 > 0 \quad (1 \leq x \leq 2),$$
$$f''(x) = 2 > 0$$

であるから，関数 $f(x)$ はすべての条件を満たす．また，

$$\sigma(c) = c - \frac{c^2 - 2}{2c} = \frac{c}{2} + \frac{1}{c}$$

であるから，$c_0 = 2$ としたとき，

$$c_1 = \frac{3}{2}, \qquad c_2 = \frac{17}{12}, \qquad c_3 = \frac{577}{408}$$

である．

さらに，$c_3^2 - (\sqrt{2})^2 = (c_3 + \sqrt{2})(c_3 - \sqrt{2}) > 2\sqrt{2}(c_3 - \sqrt{2}) > 2(c_3 - \sqrt{2})$ であるから，

$$0 < c_3 - \sqrt{2} < \frac{c_3^2 - (\sqrt{2})^2}{2} = \frac{1}{332928}$$

を得る．すなわち，誤差は

$$\frac{1}{332928}$$

未満である．

問題２． (1) (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0$ (b) $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})\right)_{i,j=1,\cdots,n}$ (c) 極小

(d) 極大 (e) 極値をとらない (f) 任意の n 次元列ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ に対し，${}^t\mathbf{v}A\mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i v_j > 0$ (g) 任意の n 次元列ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ に対し，${}^t\mathbf{v}A\mathbf{v} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i v_j < 0$

(2) (i) 行列 A が正定値であるための必要十分条件は $ac - b^2 > 0$ かつ $a > 0$ が成り立つこと，(ii) 行列 A が負定値であるための必要十分条件は $ac - b^2 > 0$ かつ $a < 0$ が成り立つこと，(iii) 行列 A が正則ではあるが定値ではないための必要十分条件は $ac - b^2 < 0$ が成り立つことである．

(3) 関数 f は確かに原点を臨界点に持つ．しかも原点におけるヘッセ行列は，行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ に等しい．したがって，(i) $ac - b^2 > 0$ かつ $a > 0$ であるときには原点において極小，(ii) $ac - b^2 > 0$ かつ $a < 0$ であるときには極大，(iii) $ac - b^2 < 0$ のときには極値をとらないことが分かる．