

数学基礎理論演習

担当：金井 雅彦

2019 年 7 月 4 日

問題 1 . 次の関数の 2 階偏微分係数 $f_{xy}(0, 0)$ および $f_{yx}(0, 0)$ を計算し, $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ であることを確かめよ :

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

問題 2 . 次の関数の極値を求めよ .

$$(1) f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1) \quad (2) f(x, y) = xy \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$$

問題 3 . (1) ξ を未知変数とする 2 次方程式

$$\xi^2 + 2b\xi + c = 0$$

に対し ,

- (i) それがふたつの負の実解を持つための必要十分条件, および
- (ii) ふたつの正の実解を持つための必要十分条件

を求めよ .

(2) 3 次方程式

$$\xi^3 + a\xi^2 + b\xi + c = 0$$

の 3 つの解がすべて実数であるとき ,

- (i) それらの解がすべて負であるための必要十分条件, および
- (ii) すべて正であるための必要十分条件

を求めよ .

(3) 3 次対称行列 A に対し ,

- (i) その固有値がすべて負であるための必要十分条件, および
- (ii) すべて正であるための必要十分条件

を述べよ . ただし, n 次正方行列に対し, 固有方程式 $\det(\xi I - A) = 0$ の解を固有値と呼ぶ . 対称行列の固有値はすべて実数であることが知られている .

(4) 次の関数の極値を決定せよ .

$$f(x, y, z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx.$$