数学基礎理論演習

担当：金井 雅彦

2019 年 6 月 20 日

問題１（S1 タームへの補足）. 関数 $f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ について，以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ が微分可能で，しかも

$$f(a) < 0, \qquad f(b) > 0, \qquad f'(x) > 0 \quad (a \leq x \leq b)$$

を満たすとする．このとき，

$$f(\gamma) = 0 \quad (a < \gamma < b)$$

を満たす γ がただひとつ存在することを示せ．

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの点 $(c, f(c))$（ただし，$a \leq c \leq b$）における接線と x-軸の交点の x-座標 $\sigma(c)$ を求めよ．

(3) 以降 $f(x)$ は 2 階微分可能であり，

$$f''(x) > 0 \quad (a \leq x \leq b)$$

を満たすと仮定する．もし $\gamma < c \leq b$ であるならば，

$$f(\sigma(c)) > 0 \quad \text{かつ} \quad \gamma < \sigma(c) < c$$

が成り立つことを示せ．

(4) 数列 $\{c_n\}$ を，

$$c_0 = b, \qquad c_{n+1} = \sigma(c_n) \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

により定義する．このとき，数列 $\{c_n\}$ が収束することを証明せよ．また，

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \gamma$$

を示せ．

(5) とくに，関数

$$f(x) = x^2 - 2 \quad (1 \leq x \leq 2)$$

を考える．$c_0 = 2$ として，c_1, c_2, c_3 を求めよ．ただし，$c_0 = 2$ である．また， c_3 を $\sqrt{2}$ の近似値と見なしたとき，その誤差を評価せよ．

問題２． (1) 以下の文章は，多変数関数に対する極値問題の解法をまとめたものである．$\boxed{}$ の中に適当な言葉や式を入れよ．

多変数関数に対する極値問題の解法． 以下，X を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の開集合，f をその上で定義された C^2 級実数値関数とする．

【第１段】関数 f の臨界点をすべて求める．ただし，f の臨界点とは，連立方程式

$$\boxed{\text{(a)} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

を満たす点 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in X$ のことである．

【第２段】関数 f の各臨界点 $\mathbf{x}$ において，ヘッセ行列 $(\nabla^2 f)(\mathbf{x}) = \boxed{\text{(b)} \qquad\qquad\qquad}$ を計算し，以下を適用する：

(i) もしその点における関数 f のヘッセ行列 $(\nabla^2 f)(\mathbf{x})$ が正定値であれば f は $\mathbf{x}$ において $\boxed{\text{(c)} \qquad\qquad}$，

(ii) ヘッセ行列 $(\nabla^2 f)(\mathbf{x})$ が負定値であれば f は $\mathbf{x}$ において $\boxed{\text{(d)} \qquad\qquad}$，そして，

(iii) ヘッセ行列 $(\nabla^2 f)(\mathbf{x})$ が正則ではあるが正定値でも負定値でもないとき，f は $\mathbf{x}$ において $\boxed{\text{(e)} \qquad\qquad\qquad}$．

ただし，実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対し，それが正定値であるとは

$$\boxed{\text{(f)} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

が成り立つことを，また負定値であるとは

$$\boxed{\text{(g)} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

が成り立つことである．

(2) 2 次対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ に対し，(i) 正定値であること，(ii) 負定値であること，および (iii) 正則ではあるが正定値でも負定値でもないことの必要十分条件を成分 a, b, c, d を用いて述べよ．

(3) 以下の関数が原点において極大あるいは極小であるかを判定せよ．ただし，a, b, c は $ac - b^2 \neq 0$ なる定数であるとする．

$$f(x, y) = x^2 y + x y^2 + \frac{1}{2}\left(a x^2 + 2bxy + c y^2\right) - 1.$$