GL_n の標準モデルの特異性・平坦性

九州大学大学院数理学研究院　三枝 洋一 (Yoichi Mieda)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

0　はじめに

本稿では Kisin による $R = T$ 定理の証明に用いられる Pappas-Rapoport の結果について解説する．この結果は，「GL_r の標準モデル」と名付けられた，特殊な志村多様体の局所モデルの特異性・平坦性に関するものであり，[PR] ではこれを足がかりとしてより一般の（EL 型の）志村多様体の局所モデルについて研究を進めている．

しかし，なぜ Pappas-Rapoport の結果が変形環に応用されるのかという理由を考えてみると，変形環を調べていく過程で出てくる線型代数的な条件が標準モデルの定義とたまたま一致したために応用が可能になったのであり，標準モデルが志村多様体の局所モデルであるという事情とは無関係であるように思われる（あくまで表面的な考察であり，より深い理由が隠れているのかもしれないが）．

そこで本稿では，論文 [PR] の背景の説明などは行わず，GL_r の標準モデルという特別なスキームの幾何を調べるという立場をとることにした．そのため，タイトルも勉強会の際の「志村多様体の局所モデルの理論」というものから，「GL_n の標準モデルの特異性・平坦性」と変更した．技術的な性格を持つ内容なので，定理の証明はできるだけ丁寧に与えるよう心がけたが，いくつか省いてしまったものがある．特に [MvdK] の結果（定理 5.3，定理 5.4）の証明に触れられなかったのは残念であるが，これを全て書くと大幅にボリュームアップしてしまうので割愛した．ご容赦いただきたい．

本稿で用いられる記号

- F_0：剰余体が完全な完備離散付値体.
- F_0^{sep}：F_0 の分離閉包（一つ固定）.
- F：F_0^{sep} に含まれる F_0 の e 次完全分岐分離拡大 $(e < \infty)$.
- $\pi \in \mathcal{O}_F$：F の素元（一つ固定）.
- $Q(T) = T^e + \sum_{i=0}^{e-1} b_i T^i \in \mathcal{O}_{F_0}[T]$：$\pi$ を根に持つ Eisenstein 多項式.
- K：F の F_0^{sep} 内での Galois 閉包.

- $\mathrm{Mat}_r(A)$：（環 A に対し）A の元を成分に持つ $r\times r$ 行列全体．$\mathrm{Id}\in\mathrm{Mat}_r(A)$ は単位行列.
- 環 A 上のスキーム X および A 代数 B に対し，$X\times_{\mathrm{Spec}\,A}\mathrm{Spec}\,B$ のことを $X\otimes_A B$ と書く．さらに省略して X_B と書くこともある（特に $A=\mathbb{Z}$ のとき).

1　GL_n の標準モデル

正の整数 d を固定する．V を d 次元 F ベクトル空間とし，$\Lambda\subset V$ をその $\mathcal{O}_F$ 格子とする．$\mathrm{Hom}_{F_0}(F,F_0^{\mathrm{sep}})=\mathrm{Hom}_{F_0}(F,K)$ の各元 φ に対し，$0\le r_\varphi\le d$ なる整数 r_φ をとる．その組 $(r_\varphi)_\varphi$ を $\mathbf{r}$ と書く．$F_0\subset K$ の中間体 E を

$$\mathrm{Gal}(K/E)=\bigl\{\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F_0)\bigm|\text{任意の }\varphi\text{ に対し }r_{\sigma\varphi}=r_\varphi\bigr\}$$

を満たすものとして定める．E を $\mathbf{r}$ の **reflex field** という.

定義 1.1
$\mathcal{O}_E$ 上のスキーム $M(\Lambda,\mathbf{r})$ を次で定め，$\mathbf{r}$ に伴う（GL_n の）**標準モデル**という：$\mathcal{O}_E$ 上のスキーム S に対し，$M(\Lambda,\mathbf{r})(S)$ は $\Lambda\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}\mathcal{O}_S$ の $\mathcal{O}_F\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}\mathcal{O}_S$ 部分加群 $\mathcal{F}$ であって次の 2 条件を満たすものの集合とする：

i) $\mathcal{F}$ は $\mathcal{O}_S$ 加群として S 上局所的に $\Lambda\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}\mathcal{O}_S$ の直和成分である.

ii) $a\in\mathcal{O}_F$ の多項式関数として，$\det_{\mathcal{O}_S}(a;\mathcal{F})=\prod_\varphi\varphi(a)^{r_\varphi}$.

より正確には，S にこのような $\mathcal{F}$ 全体の集合を対応させる関手が表現可能であり，それを表現する $\mathcal{O}_E$ 上のスキームを $M(\Lambda,\mathbf{r})$ と書くのであるが，記述の簡略化のため，今後も上記のような略記を行うことにする.

注意 1.2
上の定義中の条件 ii) についてもう少し正確に説明しておこう (以下の記述は [RZ, 3.23] を参考にした)．$\mathcal{O}_{F_0}$ 上のスキーム $\mathbf{O}_F$ を，$\mathbf{O}_F(A)=\mathcal{O}_F\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}A$ (A は $\mathcal{O}_{F_0}$ 代数)で定める．$\mathbf{O}_F\cong\mathbb{A}^e_{\mathcal{O}_{F_0}}$ である ($(a_0,\dots,a_{e-1})\in A^e$ と $a_0+a_1\pi+\cdots+a_{e-1}\pi^{e-1}\in\mathcal{O}_F\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}A$ を対応させる).

射 $\psi_1\colon\mathbf{O}_F\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}S\longrightarrow\mathbb{A}^1_S$ を次のように定める：S 上のアフィンスキーム $\mathrm{Spec}\,A$ に対し，$\mathbf{O}_F(A)\longrightarrow\mathbb{A}^1(A)$ すなわち $\mathcal{O}_F\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}A\longrightarrow A$ は $b\longmapsto\det_A(b;\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_S}A)$ で与えられる.

一方，射 $\mathbf{O}_F\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}\mathcal{O}_K\longrightarrow\mathbb{A}^1_{\mathcal{O}_K}$ を次のように定める：$\mathcal{O}_K$ 代数 A に対し，$\mathbf{O}_F(A)\longrightarrow\mathbb{A}^1(A)$ すなわち $\mathcal{O}_F\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}A\longrightarrow A$ は $b\longmapsto\prod_\varphi((\varphi\otimes\mathrm{id}_A)(b))^{r_\varphi}$ で与えら

れる．この射は$\mathcal{O}_E$ 上の射 $\psi_2\colon \mathbf{O}_F\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}\mathcal{O}_E \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathcal{O}_E}$ から来ることが分かる（最も原始的な方法としては，$x_0,\dots,x_{e-1}$ の多項式 $\prod_\varphi(x_0+x_1\varphi(\pi)+\dots+x_{e-1}\varphi(\pi)^{e-1})^{r_\varphi}$ の係数が $\mathcal{O}_E$ に属することをチェックすればよい）．

条件 ii) は，射 $\psi_2\colon \mathbf{O}_F\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}\mathcal{O}_E \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathcal{O}_E}$ を構造射 $S\longrightarrow \operatorname{Spec}\mathcal{O}_E$ によって底変換して得られる射 $\mathbf{O}_F\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}S\longrightarrow \mathbb{A}^1_S$ が ψ_1 に一致することを主張するものである．特に，条件 ii) が成り立つならば $\operatorname{rank}\mathcal{F}=r$ である．

注意 1.3

この $M(\Lambda,\mathrm{r})$ は志村多様体の**局所モデル**の一種であり，その特異性などを調べることは志村多様体の幾何学の研究において重要である．

例えば，L を総実代数体とし，素数 p において $L/\mathbb{Q}$ が完全分岐であるとする．$\mathfrak{p}$ を p を割り切る L の素点とし，$F_0=\mathbb{Q}_p$, $F=L_\mathfrak{p}$, $d=2$, $\mathbf{r}=(1,\dots,1)$ である場合に $M(\Lambda,\mathbf{r})$ を考えると，これは L に伴う Hilbert モジュラー多様体 Sh の $\mathfrak{p}$ における局所モデルを与える．特に，$\mathit{Sh}_{\mathcal{O}_{L_\mathfrak{p}}}$ の特殊ファイバー上の任意の点 x に対し，$M(\Lambda,\mathbf{r})$ の特殊ファイバー上の点 y が存在し，$\mathit{Sh}_{\mathcal{O}_{L_\mathfrak{p}}}$ の x におけるエタール近傍と $M(\Lambda,\mathbf{r})$ の y におけるエタール近傍は同型となる．

なお，この事実は局所モデルの一般論から直ちに従うわけではない．Hilbert モジュラー多様体のモジュライ解釈には（Deligne-Pappas 流のものを用いるにしろ，Kottwitz 流のものを用いるにしろ）偏極化が現れる一方，標準モデルの条件には偏極化が出てこないからである．実は，$M(\Lambda,\mathbf{r})$ が Hilbert モジュラー多様体の局所モデルを与えることの証明には本稿の主結果を用いるのである！ 詳細は [V] を参照されたい．

志村多様体の局所モデルに関する話題は尽きないが，序文でも述べた通り，本稿では深入りしないことにする．

以下では簡単のため $M(\Lambda,\mathrm{r})$ のことを単に M と書く．まず手始めに，M の一般ファイバーと特殊ファイバーを調べてみよう．

一般ファイバー

M の F_0^{sep} 値点は $\Lambda\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}F_0^{\mathrm{sep}}$ の $\mathcal{O}_F\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}F_0^{\mathrm{sep}}$ 部分加群 $\mathcal{F}$ で定義 1.1 の条件 i), ii) を満たすものであった．$\mathcal{O}_F\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}F_0^{\mathrm{sep}}=F\otimes_{F_0}F_0^{\mathrm{sep}}\cong\prod_\varphi F_0^{\mathrm{sep}}$ であり，これに対応して $\Lambda\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}F_0^{\mathrm{sep}}=V\otimes_{F_0}F_0^{\mathrm{sep}}\cong\bigoplus_\varphi V_\varphi$（$V_\varphi=V\otimes_{F,\nearrow\varphi}F_0^{\mathrm{sep}}$）という直和分解がある．したがって，$\Lambda\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}F_0^{\mathrm{sep}}$ の $\mathcal{O}_F\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}F_0^{\mathrm{sep}}$ 部分加群 $\mathcal{F}$ を与えることは，各 φ に対し V_φ の F_0^{sep} 部分加群 $\mathcal{F}_\varphi$ を与えることと等価である．なお，対応 $\mathcal{F}\longmapsto(\mathcal{F}_\varphi)_\varphi$ は $\mathcal{F}_\varphi=\{x\in\mathcal{F}\mid (a\otimes1)x=(1\otimes\varphi(a))x\ (a\in\mathcal{O}_F)\}$ で，$(\mathcal{F}_\varphi)_\varphi\longmapsto\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}=\bigoplus_\varphi\mathcal{F}_\varphi$ で与えられる．

$\mathcal{F}$ に対する定義 1.1 の条件 ii) が $(\mathcal{F}_\varphi)_\varphi$ を用いてどのように記述されるかを考えよう（条件 i) は常に成り立つ）．上記の $\mathcal{F}\longmapsto(\mathcal{F}_\varphi)_\varphi$ の記述より，$a\in\mathcal{O}_F$ に対し，

$\det_{F_0^{\mathrm{sep}}}(a;\mathcal{F})=\varphi(a)^{\dim_{F_0^{\mathrm{sep}}}\mathcal{F}_\varphi}$ が分かる．これより，$\mathcal{F}$ に対して条件 ii) が成立するためには，$\dim_{F_0^{\mathrm{sep}}}\mathcal{F}_\varphi=r_\varphi$ が必要十分である．

以上で，M の F_0^{sep} 値点を与えることは，各 φ に対して d 次元 F_0^{sep} ベクトル空間 V_φ の r_φ 次元部分空間 $\mathcal{F}_\varphi$ を与えることと等価であることが分かった．この議論を少し一般化することで次が得られる：

命題 1.4

$M\otimes_{\mathcal{O}_E}F_0^{\mathrm{sep}}\cong\prod_\varphi \mathrm{Grass}_{r_\varphi}(V_\varphi)$ （$\mathrm{Grass}_r(V)$ は V の r 次元部分空間を分類する Grassmann 多様体）．特に $\dim M\otimes_{\mathcal{O}_E}E=\sum_\varphi r_\varphi(d-r_\varphi)$.

特殊ファイバー

E の剰余体を k とおき，$W=\Lambda\otimes_{\mathcal{O}_{F_0}}k$, $\Pi=\pi\otimes\mathrm{id}_k\in\mathrm{End}_k(W)$, $\overline{M}=M\otimes_{\mathcal{O}_E}k$ とおく．

命題 1.5

k 上のスキーム S に対し，$\overline{M}(S)$ は次の 2 条件を満たすような $W\otimes_k\mathcal{O}_S$ の $\mathcal{O}_S$ 部分加群 $\mathcal{F}$ 全体のなす集合となる：

- $\mathcal{F}$ は S 上局所的に直和成分であり，Π の作用で閉じている．
- $r=\sum_\varphi r_\varphi$ とおくと，$\det(T\cdot\mathrm{id}-\Pi|_{\mathcal{F}})=T^r$.

特に，$\overline{M}$ は $r=\sum_\varphi r_\varphi$ にしか依らない．

注意 1.6

π は Eisenstein 多項式 Q の根なので $\Pi^e=0$ となるから，Π は冪零である．したがって，例えば $S=\mathrm{Spec}\,k^{\mathrm{sep}}$ のときは 2 つ目の条件は $\mathrm{rank}\,\mathcal{F}=r$ と同値である．しかし，S が一般の場合にはこれは正しくない．（環 A 上の有限生成自由加群 M および $f\in\mathrm{End}_A(M)$ に対し，$\det(T\cdot\mathrm{id}-f)=T^{\mathrm{rank}\,M}$ ならば f は冪零であるが，逆は成り立たない．もちろん A が体ならばよい．）

命題 1.5 の証明については，命題中の 2 つ目の条件と定義 1.1 の条件 ii) の同値性のみが非自明である．これは次の補題に帰着される：

補題 1.7

A を k 代数とするとき，$X\in\mathrm{Mat}_r(A)$ に対する次の 2 条件は同値である：

i) T の多項式として，$\det(T\cdot\mathrm{Id}-X)=T^r$.

ii) $x_0,\dots,x_{r-1}$ の多項式として，$\det(x_0+x_1X+\cdots+x_{r-1}X^{r-1})=x_0^r$.

この補題の証明が書かれた文献を見つけることができなかったため，以下のようにしてむりやり証明してみた．よりよい証明をご存知の方はご教示いただきたい．

証明　条件 i), ii) はそれぞれ $\mathrm{Mat}_{r,k}$ の閉部分スキーム Y, Z を定める．条件 ii) は条件 i) を導くから，自然な閉埋め込み $Z \longhookrightarrow Y$ がある．A が体の場合は i), ii) とも X が冪零行列であることと同値であるから，$Z(\overline{k}) \longhookrightarrow Y(\overline{k})$（$\overline{k}$ は k の代数閉包）は全単射である．一方 Y は被約であることが知られている（冪零多様体の被約性．Kostant による）から，$Y = Z$ が従う．　■

$\overline{M}$ の次元については，次の結果がある：

命題 1.8（[PR], Proposition 3.1）
r を e で割った商を c, 余りを f とする（すなわち，(c, f) は $r = ce + f$, $0 \leq f < e$ を満たす唯一の整数の組である）．このとき，$\overline{M}$ は $(dr - ec^2 - (2c+1)f)$ 次元の既約スキームである．

この命題は，アフィン Grassmann 多様体の性質と関連付けることによって証明される．その方針を簡単に紹介しよう．

アフィン Grassmann 多様体 $\widetilde{\mathrm{Grass}}$ とは，$k((\Pi))^d$ の $K[[\Pi]]$ 格子を分類する k 上の ind スキームのことである．$\widetilde{\mathrm{Grass}}$ には k 値点の集合が $\mathrm{GL}_d(k[[\Pi]])$ となるような k 上の ind 群スキーム $\mathcal{G}$ が作用する．整数の組 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d)$ に対して $\Lambda_{\mathbf{s}} = \bigoplus_{i=1}^{d} \Pi^{s_i} k[[\Pi]] \subset k((\Pi))^d$ とし，$\Lambda_{\mathbf{s}}$ を含む $\widetilde{\mathrm{Grass}}$ の $\mathcal{G}$ 軌道を $\mathcal{O}_{\mathbf{s}}$ とおくと，$\mathbf{s} \longmapsto \mathcal{O}_{\mathbf{s}}$ によって $s_1 \geq \cdots \geq s_d$ なる整数の組 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d)$ と $\widetilde{\mathrm{Grass}}$ の $\mathcal{G}$ 軌道は一対一に対応する．さらに，次が知られている（証明は通常の Grassmann 多様体の場合とほぼ同様である）：

- $\dim \mathcal{O}_{\mathbf{s}} = \langle \mathbf{s}, 2\rho \rangle$（$\langle\ ,\ \rangle$ は標準内積，$2\rho = (d-1, d-3, \ldots, -d+1)$）．
- $\mathcal{O}_{\mathbf{s}'}$ が $\mathcal{O}_{\mathbf{s}}$ の閉包 $\mathrm{cl}(\mathcal{O}_{\mathbf{s}})$ に含まれることは，任意の $1 \leq i \leq d$ に対して $s'_1 + \cdots + s'_i \leq s_1 + \cdots + s_i$ であり，かつ $i = d$ のときに等号が成立することと同値である．なお，この条件が成り立つとき，$\mathbf{s}' \leq \mathbf{s}$ と書く．

k ベクトル空間の同型 $W \cong k[[\Pi]]/(\Pi^e)$ を固定する．$\mathcal{F} \in \overline{M}(k)$ に $k[[\Pi]] \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow k[[\Pi]]/(\Pi^e)$ での $\mathcal{F}$ の逆像を対応させることで，閉埋め込み $i\colon \overline{M} \longhookrightarrow \widetilde{\mathrm{Grass}}$ が得られる．i は $\mathcal{G}$ の作用と可換であるからその像はいくつかの $\mathcal{G}$ 軌道の合併であるが，容易に分かるように $\Lambda_{\mathbf{s}}$ が i の像に含まれることは $0 \leq s_i \leq e$ かつ $s_1 + \cdots + s_d = r$ と同値であるから，$i(\overline{M}) = \bigcup_{0 \leq s_i \leq e, s_1 + \cdots + s_d = r} \mathcal{O}_{\mathbf{s}}$ となる（閉集合としての等式）．ここで，$\{\mathbf{s} \mid 0 \leq s_i \leq e, s_1 + \cdots + s_d = r\}$ には上で定義した順序 $\leq$ に関する最大元 $\mathbf{s}_{\max} := (e, \ldots, e, f, 0, \ldots, 0)$ が存在することに注意すると，$i(\overline{M}) = \mathrm{cl}(\mathcal{O}_{\mathbf{s}_{\max}})$ が従

う．よって $\overline{M}$ は既約であり, $\dim \overline{M} = \dim \mathcal{O}_{\mathbf{s}_{\max}} = \langle \mathbf{s}_{\max}, 2\rho \rangle = dr - ec^2 - (2c+1)f$ となる．

系 1.9（[PR], Proposition 3.2）
$\dim M \otimes_{\mathcal{O}_E} E \leq \dim M \otimes_{\mathcal{O}_E} k$ であり，$\mathbf{r}$ が（並べ換えを除いて）$\mathbf{r}_{\min} := (\underbrace{c+1, \ldots, c+1}_{f\text{ 個}}, c, \ldots, c)$ と一致する場合に限り等号が成立する．特に $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_{\min}$ のときは M は $\mathcal{O}_E$ 上平坦でない．

証明　$\dim M \otimes_{\mathcal{O}_E} E = \sum_\varphi r_\varphi(d - r_\varphi) = dr - \sum_\varphi r_\varphi^2$ である．$r = \sum_\varphi r_\varphi$ を固定して $\mathbf{r} = (r_\varphi)_\varphi$ を動かすと，$\sum_\varphi r_\varphi^2$ は $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\min}$ のとき，かつそのときに限り最小値 $(c+1)^2 f - c^2(e-f)$ をとるので，

$$\dim M \otimes_{\mathcal{O}_E} E \leq dr - (c+1)^2 f + c^2(e-f) = dr - c^2 e - (2c+1)f = \dim M \otimes_{\mathcal{O}_E} k$$

となりよい．∎

定義 1.10
$M \otimes_{\mathcal{O}_E} E \subset M$ のスキーム論的閉包を M^{loc} とおく．

M^{loc} は明らかに $\mathcal{O}_E$ 上平坦であるが，スキーム論的閉包をとっているのでモジュライ解釈が明らかでなく，したがってどのような特異性を有しているのか調べるのが困難である．以下では，次の 2 つを目標とする：

- M^{loc} の特異性を調べる．M^{loc} は正規かつ Cohen-Macaulay であり，その特殊ファイバー $\overline{M}^{\mathrm{loc}}$ は正規かつ（高々）有理特異点を持つことが分かる．
- いつ $M = M^{\mathrm{loc}}$ となるかについて，十分条件を与える．

2　冪零多様体との関係

ここでいう冪零多様体とは，冪零行列全体のなす代数多様体 **Nilp** やその部分多様体のことを指している．このような代数多様体は主に表現論との関係からよく調べられているので，M や M^{loc} の研究をそれに帰着させるのが本節の目標である．

定義 2.1
$\mathcal{O}_E$ 上のスキーム $N = N(\mathbf{r})$ を次で定める：$\mathcal{O}_E$ 代数 A に対し，

$$N(A) = \left\{ X \in \mathrm{Mat}_r(A) \;\middle|\; \det(T \cdot \mathrm{Id} - X) = \prod_\varphi \bigl(T - \varphi(\pi)\bigr)^{r_\varphi}, Q(X) = 0 \right\}.$$

N には GL_r が $(g,X) \longmapsto gXg^{-1}$ によって作用する．

以下では，この N と前節の M が比較される．前節と同様，一般ファイバーと特殊ファイバーをそれぞれ調べてみよう．

一般ファイバー

命題 2.2
$N \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ は既約かつ E 上滑らかであり，$\dim N \otimes_{\mathcal{O}_E} E = r^2 - \sum_\varphi r_\varphi^2$ である．

証明　$X_0 \in \mathrm{Mat}_r(K)$（$K$ は F の F_0^{sep} 内での Galois 閉包）を対角成分に $\varphi(\pi)$ が r_φ 回出てくる対角行列とする．このとき，K 代数 A に対し，$N(A) = \{gX_0g^{-1} \mid g \in \mathrm{GL}_r(A)\}$ である（中国剰余定理．$\{\varphi(\pi)\}_\varphi$ が相異なることを用いる）．このことから $N \otimes_{\mathcal{O}_E} K$ が K 上滑らかであることが容易に分かる（K 代数 A とその冪零イデアル I に対し $N(A) \longrightarrow N(A/I)$ の全射性をいう）ので，$N \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ は E 上滑らかである．また，GL_r の N への作用は可移的であるから，N は既約である．次元については $Z_G(X_0) = \{g \mid gX_0g^{-1} = X_0\} \subset \mathrm{GL}_r$ の形から容易に分かる．■

特殊ファイバー

スキーム $\mathbf{Nilp}$ を $\mathbf{Nilp}(A) = \{X \in \mathrm{Mat}_r(A) \mid \det(T \cdot \mathrm{Id} - X) = T^r\}$（$A$ は環）により定めると，$\overline{N} := N \otimes_{\mathcal{O}_E} k$ は $\mathbf{Nilp}_k$ の閉部分スキームである．実際，k 代数 A に対し $\overline{N}(A) = \{X \in \mathbf{Nilp}(A) \mid X^e = 0\}$ である．

M と N を比較したいのだが，これらの間に直接自然な射を構成することは難しい．そこで，これらの橋渡しをする中間的なスキーム $\widetilde{M}$ を導入する．

定義 2.3
$\mathcal{O}_E$ 上のスキーム $\widetilde{M}$ を次で定める：$\mathcal{O}_E$ 上のスキーム S に対し，

$$\widetilde{M}(S) = \bigl\{(\mathcal{F}, \psi) \bigm| \mathcal{F} \in M(S), \psi\colon \mathcal{F} \xrightarrow[\mathcal{O}_S\ \text{同型}]{\cong} \mathcal{O}_S^r\bigr\}.$$

$(\mathcal{F}, \psi)$ に $\mathcal{F}$ を対応させる射 $\widetilde{M} \longrightarrow M$ により，$\widetilde{M}$ は M 上の GL_r-torsor になる．特に，この射は滑らかかつ純相対次元 r^2 である．

定理 2.4（[PR], Theorem 4.1）
$(\mathcal{F}, \psi)$ に $\psi \circ (\pi|_{\mathcal{F}}) \circ \psi^{-1}$ を対応させることで得られる射 $\widetilde{M} \longrightarrow N$ は滑らかかつ純相対次元 rd である．

証明　射 $\widetilde{M} \longrightarrow N$ は GL_r 同変であるから，代数スタックの射 $f\colon M \longrightarrow [N/\mathrm{GL}_r]$ を誘導する．これが滑らかであることを示せばよい．$\mathcal{O}_E$ 上のスキーム S に対して，$\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_S$ 加群 $\mathcal{F}$ で $\mathcal{O}_S$ 加群として階数 r 局所自由であり，条件 $\det(T\cdot\mathrm{id}-\pi;\mathcal{F}) = \prod_\varphi (T-\varphi(\pi))^{r_\varphi}$ を満たすもののなす圏（射は $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_S$ 加群の同型）を $\mathfrak{Mod}(S)$ と書くと，$\mathfrak{Mod}$ は $[N/\mathrm{GL}_r]$ と同型な $\mathcal{O}_E$ 上の代数スタックとなることが容易に分かる．さらに, 自然な同型 $\mathfrak{Mod} \cong [N/\mathrm{GL}_r]$ を通して f は $M \longrightarrow \mathfrak{Mod}$; $(\mathcal{F} \subset \Lambda \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_S) \longmapsto \mathcal{F}$ に対応することも分かる．こちらの射も f で表す．

$\mathcal{F}^{\mathrm{univ}}$ を $\mathfrak{Mod}$ 上の普遍 $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_{\mathfrak{Mod}}$ 加群とし，$\mathcal{O}_{\mathfrak{Mod}}$ 加群 $\mathcal{E}$ を

$$\mathcal{E} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_{\mathfrak{Mod}}}(\mathcal{F}^{\mathrm{univ}}, \Lambda \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_{\mathfrak{Mod}})$$

で定める．$\mathcal{E} \cong (\mathcal{F}^{\mathrm{univ}\vee})^d$ より $\mathcal{E}$ は局所自由 $\mathcal{O}_{\mathfrak{Mod}}$ 加群である．$\mathfrak{Mod}$ 上のベクトル束 $\mathbf{V}(\mathcal{E}^\vee) = \operatorname{Spec}\operatorname{Sym}\mathcal{E}^\vee$ を考えよう．$\mathcal{O}_E$ 上のスキーム S に対し，$\mathbf{V}(\mathcal{E}^\vee)(S)$ は組 $(\mathcal{H},\alpha)$：$\mathcal{H} \in \mathfrak{Mod}(S)$，$\alpha\colon g_{\mathcal{H}}^*\mathcal{E}^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_S$（$\mathcal{O}_S$ 準同型．$g_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ に対応する射 $S \longrightarrow \mathfrak{Mod}$）のなす圏である（[LM, Application 14.2.6]）．$\mathcal{H} \in \mathfrak{Mod}(S)$ を固定すると，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(g_{\mathcal{H}}^*\mathcal{E}^\vee, \mathcal{O}_S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_S}(g_{\mathcal{H}}^*\mathcal{F}^{\mathrm{univ}}, \Lambda \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_S)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_S}(\mathcal{H}, \Lambda \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_S)$ であるから，$\mathbf{V}(\mathcal{E}^\vee)(S)$ は $\mathcal{H} \in \mathfrak{Mod}(S)$ および $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_S$ 準同型 $\alpha'\colon \mathcal{H} \longrightarrow \Lambda \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_S$ の組 $(\mathcal{H},\alpha')$ のなす圏と圏同値であることが分かる．なお, 構造射 $p\colon \mathbf{V}(\mathcal{E}^\vee) \longrightarrow \mathfrak{Mod}$ は $(\mathcal{H},\alpha') \longmapsto \mathcal{H}$ で与えられる．

以上より，$f\colon M \longrightarrow \mathfrak{Mod}$ は $M \xrightarrow{j} \mathbf{V}(\mathcal{E}^\vee) \xrightarrow{p} \mathfrak{Mod}$ と分解する（j は $(\mathcal{F} \subset \Lambda \otimes_{\mathcal{O}_{F_0}} \mathcal{O}_S) \longmapsto (\mathcal{F}, \text{包含写像})$ で与えられる）．j は開埋め込み（像は組 $(\mathcal{H},\alpha')$ で α' が単射であるもののなす開部分スタックとなる）であり，p はベクトル束の構造射なので滑らかであるから，f も滑らかである．相対次元は $\mathcal{E}^\vee \cong (\mathcal{F}^{\mathrm{univ}})^d$ の階数に一致するので rd である．∎

定理 2.4 により，M と N は同様の特異性を有していることが分かる（例えば M が正規であることと N が正規であることは同値である）．次節では，N の方を詳しく調べることで M^{loc} の特異性に関する結果を導く．

3　M^{loc} の特異性

まず，N の明示的な特異点解消を構成する．$\mathrm{Hom}_{F_0}(F, F_0^{\mathrm{sep}})$ の元に順序を固定し $\mathrm{Hom}_{F_0}(F, F_0^{\mathrm{sep}}) = \{\varphi_1, \dots, \varphi_e\}$ とする．r_{φ_i} を r_i と書く．$r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_e$ と仮定してよい．$a_i = \varphi_i(\pi) \in K$ とおく．

定義 3.1
スキーム $\mathrm{Flag}(\mathbf{r})$（部分旗多様体）を次で定める：スキーム S に対し，$\mathrm{Flag}(\mathbf{r})(S)$ は $\mathcal{O}_S$ 部分加群の列 $0 = \mathcal{F}_e \subset \mathcal{F}_{e-1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_S^r$ であって条件

- $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{O}_S^r$ は S 上局所的に直和因子である
- $\operatorname{rank} \mathcal{F}_{i-1}/\mathcal{F}_i = r_i$

を満たすもの全体とする．

また，$(\mathrm{Mat}_r \times \mathrm{Flag}(\mathbf{r}))_{\mathcal{O}_K}$ の閉部分スキーム $\mathcal{N}$ を次で定める（A は $\mathcal{O}_K$ 代数）：

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ (X, \mathcal{F}_\bullet) \in \mathrm{Mat}_r(A) \times \mathrm{Flag}(\mathbf{r})(A) \;\middle|\; (X - a_i \cdot \mathrm{Id})\mathcal{F}_{i-1} \subset \mathcal{F}_i \right\}.$$

$\mathcal{N}$ について次が分かる：

- $\mathcal{N} \longrightarrow \mathrm{Flag}(\mathbf{r})_{\mathcal{O}_K}$; $(X, \mathcal{F}_\bullet) \longmapsto \mathcal{F}_\bullet$ は滑らかである．特に $\mathcal{N}$ は $\mathcal{O}_K$ 上滑らかである．
- $(X, \mathcal{F}_\bullet) \longmapsto X$ によって射 $\mu \colon \mathcal{N} \longrightarrow N \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K$ が定まる．実際，$(X, \mathcal{F}_\bullet) \in \mathcal{N}(A)$（$A$ は $\mathcal{O}_K$ 代数）とすると，$\mathcal{F}_{i-1}/\mathcal{F}_i$ 上 $X = a_i \cdot \mathrm{Id}$ なので X の固有多項式は $\prod_i (T - a_i)^{r_i}$ であり，また $Q(X) = \prod_{i=1}^{e} (X - a_k \cdot \mathrm{Id}) = 0$ であるから $X \in N(A)$ が従う．さらにこの射 μ は射影的である．
- $\mu_K \colon \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_K} K \longrightarrow N \otimes_{\mathcal{O}_E} K$ は同型である．実際, A を K 代数とし, $X \in N(A)$ をとると，命題 2.2 の証明中で述べたように X は対角化可能であり，その固有値は a_i（重複度 r_i）である．よって，A^r のフィルトレーション $\mathcal{F}_\bullet$ で $\operatorname{rank} \mathcal{F}_{i-1}/\mathcal{F}_i = r_i$, $(X - a_i \cdot \mathrm{Id})\mathcal{F}_{i-1} \subset \mathcal{F}_i$ を満たすものは固有空間によるフィルトレーション $\mathcal{F}_i = \bigoplus_{j=i+1}^{e} V_j$（$V_j \subset A^r$ は固有値 a_j の固有空間）に限られる．

次が [PR] の最も核心となる定理である：

定理 3.2（[PR], Proposition 5.2）

k' を $\mathcal{O}_K$ の剰余体とする．$N' = \mathrm{Spec}(\mu_* \mathcal{O}_{\mathcal{N}})$, $\overline{N}' = N' \otimes_{\mathcal{O}_K} k'$ とおく．

i) $\overline{N}'$ は正規かつ（高々）有理特異点を持つ（特に Cohen-Macaulay である）．

ii) N' は正規かつ Cohen-Macaulay であり，$\mathcal{O}_K$ 上平坦である．

この定理の証明の基礎となるのが，冪零多様体 **Nilp** の GL_r 軌道に関する Mehta-van der Kallen の定理である．

定理 3.3（[MvdK], Theorem 4.6）
k を代数閉体とする．r の分割 $\mathbf{r}$ に対し，$\mathbf{r}$ に対応する Jordan 行列を含む $\mathbf{Nilp}_k$ の GL_r 軌道を $N_{\mathbf{r}}$ と書く．$\mathrm{cl}(N_{\mathbf{r}})$ を $\mathbf{Nilp}_k$ における $N_{\mathbf{r}}$ の被約閉包とする．このとき，$\mathrm{cl}(N_{\mathbf{r}})$ は正規かつ（高々）有理特異点を持つ．

この定理の証明は第 5 節において紹介する．ここでは，この定理を認めて定理 3.2 を証明することにする．証明に用いる記号を少し準備しておこう：

- r の分割 $\mathbf{r}^\vee = (r_i^\vee)_{1\le i\le e}$ を $r_i^\vee = \#\{\varphi \mid r_\varphi \ge i\}$ によって定める（$\mathbf{r}$ の双対分割という．Young 図形で考えると転置にあたる）．
- $\mu\colon \mathcal{N} \longrightarrow N \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K$ を $\mathcal{N} \longrightarrow N' \longrightarrow \mu(\mathcal{N}) \hookrightarrow N \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K$ と分解しておく（$\mu(\mathcal{N})$ は $\mathcal{N}$ の μ によるスキーム論的像）．
- 同様に，$\overline{\mu}\colon \overline{\mathcal{N}} := \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_K} k' \longrightarrow \overline{N} \otimes_k k'$ を $\overline{\mathcal{N}} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\overline{\mu}_*\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{N}}}) \longrightarrow \overline{\mu}(\overline{\mathcal{N}}) \hookrightarrow \overline{N} \otimes_k k'$ と分解しておく．

定理 3.2 i) の証明
i) の証明は次の 2 つの主張に分けられる：

主張 A　$\mathrm{Spec}(\overline{\mu}_*\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{N}}}) \longrightarrow \overline{\mu}(\overline{\mathcal{N}})$ は同型であり，$\overline{\mu}(\overline{\mathcal{N}})$ は $N_{\mathbf{r}^\vee} \subset \overline{N} \otimes_k k'$ の被約閉包に一致する．さらに，$\mathrm{Spec}(\overline{\mu}_*\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{N}}})$ は正規かつ（高々）有理特異点を持つ．

$\overline{\mu}\colon \overline{\mathcal{N}} \longrightarrow \overline{\mu}(\overline{\mathcal{N}})$ は射影的かつ双有理的であることに注意する．実際，$\overline{\mathcal{N}}$ の開集合 $\{(X, \mathcal{F}_\bullet) \mid X\mathcal{F}_{i-1} = \mathcal{F}_i\}$ と $N_{\mathbf{r}^\vee} \subset \overline{N} \otimes_k k'$ は $\overline{\mu}$ によって同型となる．特に $N_{\mathbf{r}^\vee} \subset \overline{\mu}(\overline{\mathcal{N}})$ は稠密である．また，$\overline{\mathcal{N}}$ は k' 上滑らかなので被約であるから，$\overline{\mu}(\overline{\mathcal{N}})$ も被約である．したがって，$\overline{\mu}(\overline{\mathcal{N}})$ は $N_{\mathbf{r}^\vee}$ の被約閉包であることが分かり，定理 3.3 から $\overline{\mu}(\overline{\mathcal{N}})$ が正規かつ（高々）有理特異点を持つことが従う．
$\overline{\mu}(\overline{\mathcal{N}})$ の正規性と $\mathrm{Spec}(\overline{\mu}_*\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{N}}}) \longrightarrow \overline{\mu}(\overline{\mathcal{N}})$ が有限かつ双有理的であることから，$\mathrm{Spec}(\overline{\mu}_*\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{N}}}) \longrightarrow \overline{\mu}(\overline{\mathcal{N}})$ が同型であることも分かる．

主張 B　$\mathrm{Spec}(\overline{\mu}_*\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{N}}})$ は $\overline{N}' = \mathrm{Spec}(\mu_*\mathcal{O}_{\mathcal{N}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k')$ と同型である．

$\mathcal{O}_K$ の素元 ϖ を固定する．$\overline{N} \otimes_k k'$ 上の層についての次の可換図式に注目する：

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{\mu(\mathcal{N})}/\varpi\mathcal{O}_{\mu(\mathcal{N})} & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_{\overline{\mu}(\overline{\mathcal{N}})} \\
\downarrow & & \downarrow \cong \\
\mathcal{O}_{N'}/\varpi\mathcal{O}_{N'} & \xrightarrow{(*)} & \overline{\mu}_*(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{N}}}).
\end{array}$$

右の縦の矢印が同型であることは主張 A で示した．これより，$(*)$ の全射性が従う．一方，$\mathcal{N}$ は $\mathcal{O}_K$ 上滑らかであるから，$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{N}} \xrightarrow{\varpi} \mathcal{O}_{\mathcal{N}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{N}}} \longrightarrow 0$ は完全系

列である．したがって $0 \longrightarrow \mu_*\mathcal{O}_{\mathcal{N}} \xrightarrow{\varpi} \mu_*\mathcal{O}_{\mathcal{N}} \longrightarrow \overline{\mu}_*\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{N}}}$ も完全系列であるから，$\mu_*\mathcal{O}_{\mathcal{N}}/\varpi\mu_*\mathcal{O}_{\mathcal{N}} \longrightarrow \overline{\mu}_*\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{N}}}$ は単射である．これと $\mathcal{O}_{N'} = \mu_*\mathcal{O}_{\mathcal{N}}$ より $(*)$ の単射性が従う．これで $\mu_*\mathcal{O}_{\mathcal{N}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k' = \mathcal{O}_{N'}/\varpi\mathcal{O}_{N'} \cong \overline{\mu}_*(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{N}}})$ となり主張が示された．∎

定理 3.2 ii) の証明

まず $N' \longrightarrow \mu(\mathcal{N})$ が同型であることを証明する．i)，主張 B の証明中の図式から，$\mathcal{O}_{\mu(\mathcal{N})}/\varpi\mathcal{O}_{\mu(\mathcal{N})} \longrightarrow \mathcal{O}_{N'}/\varpi\mathcal{O}_{N'}$ は全射であることが分かる．よって，$N \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K$ の特殊ファイバー $\overline{N} \otimes_k k'$ 上の任意の点 x に対し，$(\mathcal{O}_{\mu(\mathcal{N})})_x \longrightarrow (\mathcal{O}_{N'})_x$ は全射である．$\mathcal{O}_{\mu(\mathcal{N})} \otimes_{\mathcal{O}_K} K \longrightarrow \mathcal{O}_{N'} \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ は同型であるから，$\mathcal{O}_{\mu(\mathcal{N})} \longrightarrow \mathcal{O}_{N'}$ は全射であることが分かる．一方，$\mu(\mathcal{N})$ は N' のスキーム論的像であるから，$\mathcal{O}_{\mu(\mathcal{N})} \longrightarrow \mathcal{O}_{N'}$ は単射である．以上より $\mathcal{O}_{\mu(\mathcal{N})} \cong \mathcal{O}_{N'}$ が分かるので，$N' \longrightarrow \mu(\mathcal{N})$ は同型である．

N' についての諸性質を導く．$\mathcal{N}$ が $\mathcal{O}_K$ 上滑らかであることと $N' \cong \mu(\mathcal{N})$ から，N' の特殊ファイバー上には極小点が存在しないことが分かる．これと $\overline{N}'$ の被約性（定理 3.2 i)）より，N' は $\mathcal{O}_K$ 上平坦であることが従う（EGA IV, Lemme 3.4.6.1 を用いる）．この平坦性と $\overline{N}'$ が Cohen-Macaulay であることから N' も Cohen-Macaulay である．N' の一般ファイバーは滑らかであり，特殊ファイバーは k' 上 generically smooth であるから，N' は余次元 1 正則である．これと Cohen-Macaulay 性より，N' が正規であることが分かる（Serre 判定）．∎

定理 3.2 から次の系を導くことができる：

系 3.4（[PR], Proposition 5.3）
N^{loc} を $N \otimes_{\mathcal{O}_E} E \subset N$ のスキーム論的閉包とすると，N^{loc} は正規かつ Cohen-Macaulay であり，$\overline{N}^{\mathrm{loc}} := N^{\mathrm{loc}} \otimes_{\mathcal{O}_E} k$ は正規かつ（高々）有理特異点を持つ．

証明　$N^{\mathrm{loc}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K \subset N \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K$ は $\mathcal{O}_K$ 上平坦であり，一般ファイバー $N \otimes_{\mathcal{O}_E} K$ を持つので，定理 3.2 ii) より $N^{\mathrm{loc}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_K \cong N'$ である．正規性，Cohen-Macaulay 性は fpqc 局所的な性質であるから，これらについての主張は定理 3.2 から従う．$\overline{N}^{\mathrm{loc}}$ が有理特異点を持つことも定理 3.2 i) に帰着される．∎

この系と定理 2.4 を合わせることで，次が導かれる：

系 3.5（[PR], Theorem 5.4）
M^{loc} は正規かつ Cohen-Macaulay であり，$\overline{M}^{\mathrm{loc}}$ は正規かつ（高々）有理特異点を持つ．

4　$M = M^{\mathrm{loc}}$ となるための条件

次の命題において $M = M^{\mathrm{loc}}$ となるための十分条件が与えられる：

命題 4.1（[PR], Corollary 5.9）
$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\min}$ かつ $\overline{N}$ が被約であるならば，$M = M^{\mathrm{loc}}$ が成り立つ．

証明　定理 2.4 より，$\overline{N}$ が被約ならば $\overline{M}$ も被約である．$\overline{M}$ が被約かつ既約であること（命題 1.8），$\dim \overline{M} = \dim M \otimes_{\mathcal{O}_E} E = \dim \overline{M}^{\mathrm{loc}}$ となること（最初の等号で $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\min}$ を用いた），および $\overline{M}^{\mathrm{loc}} \subset \overline{M}$ より，$\overline{M}^{\mathrm{loc}} = \overline{M}$ が従う．明らかに $M^{\mathrm{loc}} \otimes_{\mathcal{O}_E} E = M \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ であるから, M^{loc} の平坦性と合わせると $M = M^{\mathrm{loc}}$ が従う．（A を $\mathcal{O}_E$ 代数とし, I を A の有限生成イデアルとするとき, $A \otimes_{\mathcal{O}_E} E \longrightarrow A/I \otimes_{\mathcal{O}_E} E$, $A \otimes_{\mathcal{O}_E} k \longrightarrow A/I \otimes_{\mathcal{O}_E} k$ が同型であり，A/I が平坦 $\mathcal{O}_E$ 代数ならば $A \longrightarrow A/I$ も同型である.）∎

[PR] では，$\overline{N}$ は常に被約であろうと予想している（Conjecture 5.8）．この予想が正しければ，$M = M^{\mathrm{loc}}$ は $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\min}$ と同値であるということになる．現在のところ，$\overline{N}$ の被約性が確かめられているのは次の場合である：

定理 4.2
以下のいずれかの条件のもとで $\overline{N}$ は被約である：

i) $r \leq e$.

ii) $e = 2$.

iii) $\mathrm{char}\, k = 0$.

i) の場合，$\overline{N} = \mathbf{Nilp}_k$ であり，$\mathbf{Nilp}_k$ の被約性は古典的結果としてよく知られている（Kostant, Springer 等による）．ii), iii) は Weyman ([W]) によって証明された.

この定理と系 3.5 を組み合わせることで，Kisin の論文（[K, Corollary 2.5.16]）において用いられる次の結果が得られる．変形環への応用にはこの定理しか用いられない（はずである).

定理 4.3
任意の φ に対し $r_\varphi = 1$ ならば，GL_r の標準モデル $M = M(\Lambda, \mathbf{r})$ は正規かつ Cohen-Macaulay であり，$\mathcal{O}_K$ 上平坦である．また，$\overline{M} = M \otimes_{\mathcal{O}_E} k$ は正規かつ（高々）有理特異点を持つ.

5　Frobenius 分裂と定理 3.3 の証明について

ここでは，定理 3.3 の証明の概略を述べる．まず，標準的な特殊化の手法により，k の標数が正である場合に帰着できることに注意する．正標数の場合を証明するには，Frobenius 分裂という技術を用いる．まずこれについて紹介する．以下では k を標数 $p > 0$ の代数閉体とする．

定義 5.1

X を k 上の代数多様体（k 上分離かつ有限型の整スキーム）とし，その（絶対）Frobenius 射を $F\colon X \longrightarrow X$ とする．X の **Frobenius 分裂**とは，$\mathcal{O}_X$ 加群の準同型 $\varphi\colon F_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ であって，自然な準同型 $\mathcal{O}_X \longrightarrow F_*\mathcal{O}_X$ に引き続いて合成すると $\mathrm{id}_{\mathcal{O}_X}$ となるもののことである．

Frobenius 分裂を持つ代数多様体に対しては，様々なよい性質が成立することが知られている（[BK] 等を参照）．ここでは，正規性を導く次の命題を用いる：

命題 5.2（[MR], Lemma 1）

X, Y を k 上の代数多様体とし，$f\colon Y \longrightarrow X$ を k 上の射とする．次の 4 条件が成り立つならば，X は正規である：

i) f は固有かつ全射である．

ii) f の任意のファイバーは連結である．

iii) Y は正規である．

iv) X は Frobenius 分裂を持つ．

証明　$\pi\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ を X の正規化とすると，Y は正規であるから，f は $Y \xrightarrow{f'} \widetilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ と分解する．π が底空間に全単射を誘導することを示そう．$x \in X$ を任意にとると，π は有限射であるから，$\pi^{-1}(x)$ は有限個の点 $x_1, \ldots, x_m$ からなる．条件 ii) より $f^{-1}(x) = \bigcup_{i=1}^m f'^{-1}(x_i)$ は連結であり，一方条件 i) より f' は全射であるから $f'^{-1}(x_i) \neq \varnothing$ である．これより $m = 1$ が従い，π が全単射であることが分かる．

このことと条件 iv) を用いて π が同型であることを導く．もう主張は局所的であるから，次を示せば十分である：

> A を有限生成 k 代数で整域であるものとし，B を $K = \operatorname{Frac} A$ の部分 A 代数で A 上有限なものとする．自然な射 $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ が全単射であり $\operatorname{Spec} A$ が Frobenius 分裂を持つならば，$A = B$ である．

$\varphi\colon A \longrightarrow A$ を A の Frobenius 分裂とする．すなわち，φ はアーベル群の準同型で $a\varphi(b) = \varphi(a^p b)$, $\varphi(1) = 1$ を満たす．φ は $\varphi(a^{-1}b) = a^{-1}\varphi(a^{p-1}b)$ によって $\varphi\colon K \longrightarrow K$ に拡張することができる．

$I = \mathrm{Ann}_A B/A = \{a \in A \mid aB \subset A\}$ とおく．これは A のイデアルであるが，B のイデアルでもあることが分かる．このとき，$\varphi(I) = I$ が成り立つ．実際，$\varphi(I) \supset I$ は $\varphi(a^p) = a$ $(a \in I)$ から従い，$\varphi(I) \subset I$ は $a \in I$, $b \in B$ に対して $\varphi(a)b = \varphi(ab^p) \in \varphi(A) \subset A$ となることより従う．さらに，$\varphi(I) = I$ より $\sqrt{I} = I$（$\sqrt{I}$ は B における I の根基）であることが導かれる．実際，$b \in \sqrt{I}$ ならば $b^{p^n} \in I$ となる自然数 n が存在するので，$b = \varphi^n(b^{p^n}) \in \varphi^n(I) = I$ となる．以上より，A/I, B/I は被約であることが分かった．

さて，目標である $A = B$ を証明するためには $I = A$ を示せばよい．$I \subsetneq A$ と仮定し，I を含む素イデアルのうち極小なもの $\mathfrak{p}$ をとる．このとき，$(A/I)_{\mathfrak{p}}$, $(B/I)_{\mathfrak{p}} = B/I \otimes_{A/I} (A/I)_{\mathfrak{p}}$ は被約な Artin 局所環である（後者が局所環であることに $\mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ が全単射であるという条件を用いた）．よって $(A/I)_{\mathfrak{p}}$ は体であり，$(B/I)_{\mathfrak{p}}$ は $(A/I)_{\mathfrak{p}}$ の非自明な有限拡大体である（$\mathfrak{p} \in V(I) = \mathrm{Supp}\, B/A$ に注意）．さらに，$\mathrm{Spec}\, B/I \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A/I$ が全単射であることから，この体拡大は純非分離的である．したがって，任意の $b \in B$ に対し，$(\bar{b})^{p^m} \in (A/I)_{\mathfrak{p}}$ となる自然数 m が存在する．このとき $b^{p^m} \in A_{\mathfrak{p}}$ となるから，$\varphi(A_{\mathfrak{p}}) \subset A_{\mathfrak{p}}$（$A_{\mathfrak{p}} \subset K$ と見なしている）と合わせて $b = \varphi^m(b^{p^m}) \in A_{\mathfrak{p}}$ が従う．すなわち，任意の $b \in B$ に対し $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ が存在して $sb \in A$ となることが分かった．$b_1, \ldots, b_n \in B$ を B の A 加群としての生成元とし，各 i に対し $s_i b_i \in A$ となる $s_i \in A \setminus \mathfrak{p}$ をとると，$s_1 \cdots s_n \in I \setminus \mathfrak{p}$ となる．$I \subset \mathfrak{p}$ であったからこれは矛盾である．∎

この命題が適用できるような状況設定を整えるのが次の 2 つの定理である（証明はいずれも手間がかかるので省略する）．

定理 5.3（[MvdK], Theorem 4.8）
$G = \mathrm{GL}_r$ とおき，上半三角行列全体のなす G の Borel 部分群を B とする．B の冪単根基を U とおき，B, U の Lie 環を $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{u}$ と書く．

$\mathbf{r}$ に対応する Jordan 行列を含む G の標準放物型部分群を P と書き，その冪単根基を U_P とおく．P, U_P の Lie 環を $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{u}_P$ と書く．

このとき，$\pi\colon G \times^B \mathfrak{u}_P \longrightarrow \mathrm{cl}(N_{\mathbf{r}})$; $(g, X) \longmapsto gXg^{-1}$ は固有かつ全射であり，その任意のファイバーは連結である．

定理 5.4（[MvdK], Theorem 3.8）
$G \times^B \mathfrak{u}$ の Frobenius 分裂であって，閉部分スキーム $G \times^B \mathfrak{u}_P \subset G \times^B \mathfrak{u}$ にも Frobenius 分裂を誘導するようなものが存在する．

命題 5.2，定理 5.3，定理 5.4 より $\mathrm{cl}(N_{\mathbf{r}})$ の正規性が従う．実際，$\pi\colon G \times^B \mathfrak{u} \longrightarrow \mathbf{Nilp}_k;\ (g, X) \longmapsto gXg^{-1}$ は固有かつ双有理的であり，$\mathbf{Nilp}_k$ は正規であるから，$\pi_* \mathcal{O}_{G\times^B\mathfrak{u}} = \mathcal{O}_{\mathbf{Nilp}_k}$ が成り立つ．このことから，定理 5.4 により存在が保証された $G \times^B \mathfrak{u}_P$ の Frobenius 分裂は $\mathrm{cl}(N_{\mathbf{r}})$ の Frobenius 分裂を誘導することが分かる．よって定理 5.2 と定理 5.3 および $G \times^B \mathfrak{u}_P$ が k 上滑らかであること（例えば $\mathrm{pr}_1\colon G \times^B \mathfrak{u}_P \longrightarrow G/B$ が滑らかであることから出る）より，$\mathrm{cl}(N_{\mathbf{r}})$ が正規であることが従う．

さらに，詳細は省略するが，$G \times^P \mathfrak{u}_P \xrightarrow{\pi'} \mathrm{cl}(N_{\mathbf{r}})$ に Frobenius 分裂を持つ代数多様体に対する Grauert-Riemenschneider 消滅定理（[MvdK2]）を適用すると，$G \times^P \mathfrak{u}_P$ の標準束が自明であることと合わせて $R\pi'_* \mathcal{O}_{G\times^P\mathfrak{u}_P} \cong \mathcal{O}_{\mathrm{cl}(N_{\mathbf{r}})}$ が得られる．すなわち，$G \times^P \mathfrak{u}_P \longrightarrow \mathrm{cl}(N_{\mathbf{r}})$ は $\mathrm{cl}(N_{\mathbf{r}})$ の有理特異点解消であり，$\mathrm{cl}(N_{\mathbf{r}})$ が（高々）有理特異点を持つことが分かる．

参考文献

[BK] M. Brion, S. Kumar, *Frobenius splitting methods in geometry and representation theory*, Progress in Mathematics, 231. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2005.

[K] M. Kisin, *Moduli of finite flat group schemes and modularity*, to appear in Ann. of Math.

[LM] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algebriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, **39**. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[MR] V. B. Mehta, A. Ramanathan, *Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), no. 1, 27–40.

[MvdK] V. B. Mehta, W. van der Kallen, *A simultaneous Frobenius splitting for closures of conjugacy classes of nilpotent matrices*, Compositio Mathematica **84** (1992), no. 2, 211–221.

[MvdK2] V. B. Mehta, W. van der Kallen, *On a Grauert-Riemenschneider vanishing theorem for Frobenius split varieties in characteristic p*, Invent. Math. **108** (1992), no. 1, 11–13.

[PR] G. Pappas, M. Rapoport, *Local models in the ramified case. I. The EL-case*, J. Algebraic Geom. **12** (2003), no. 1, 107–145.

[RZ] M. Rapoport, Th. Zink, *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, **141**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[V] I. Vollaard, *On the Hilbert-Blumenthal moduli problem*, J. Inst. Math. Jussieu **4** (2005), no 4, 653–683.

[W] J. Weyman, *Two results on equations of nilpotent orbits*, J. Algebraic Geom. **11** (2002), no. 4, 791–800.